УДК 517.9

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНИХ ОБМЕЖЕНИХ ПРИ $t \in \mathbb{R}^+$ $(t \in \mathbb{R}^-)$ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ АВТОНОМНИХ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Г. П. Пелюх

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: grygor@imath.kiev.ua

Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ierominat@ukr.net
olena_sivak@ukr.net

For the system of nonlinear functional-difference equations, we establish sufficient conditions for the existence of solutions continuous and bounded for $t \in \mathbb{R}^+$ $(t \in \mathbb{R}^-)$ and investigate their properties.

Одержано достатні умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ $(t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їхні властивості.

1. У цій статті досліджується система нелінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + f(x(t), x(qt)), \tag{1}$$

де A — деяка дійсна $(n \times n)$-вимірна матриця, q — деяка дійсна стала, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1 – 8]), і на сьогодні низку питань їхньої теорії досить детально вивчено. Основною метою роботи є встановлення достатніх умов існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ $(t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків вказаної вище системи рівнянь та дослідження їхніх властивостей.

Розглянемо систему рівнянь (1) за виконання таких умов:

1) $\det A \neq 0,\ a = |A| < 1,\ 0 < q < 1$; тоді лінійна однорідна система

$$x(t+1) = Ax(t)$$

має множину неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв'язків, яка залежить від довільної неперервної на $[0,1]$ вектор-функції й задовольняє умову

$$|x(t)| \leq Ma^t,$$

де M — деяка стала;

2) вектор-функція $f(x,y)$ є неперервною обмеженою при $x \in \mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\big|f(x,y) - f(x',y')\big| \leq L\big(|x| + |y| + |x'| + |y'|\big)^{k-1}\big(|x - x'| + |y - y'|\big),$$

$f(0,0) \equiv 0,\ L$ — деяка додатна стала, $k = \mathrm{const},\ k > 1$;

© Г. П. Пелюх, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова, 2021

3) для деякого $\Delta < 1$ виконується нерівність

$$\frac{\widetilde{a}\,L\,4^k M^{k-1}}{(1-\Delta)^{k-1}\left(1-\widetilde{a}a^{\widetilde{k}}\right)} \le \Delta,$$

де $\widetilde{a} = \left|A^{-1}\right|,\ \widetilde{k} = kq,\ \widetilde{k} > 1.$

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1)–3). Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції, які задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0. \tag{3}$$

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь

$$x_0(t+1) = Ax_0(t), \tag{4_0}$$

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) + f\left(\sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(qt)\right) - f\left(\sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(qt)\right),\ \ i = 1, 2, \ldots, \tag{4_i}$$

$x_{-1}(t) \equiv 0$, і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків.

Як зазначено в умові 1), система (4_0) має множину неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, яка задовольняє умову

$$|x_0(t)| \le Ma^t. \tag{5_0}$$

Безпосередньою підстановкою в (4_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned} x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \Bigg[f\left(\sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q(t+j))\right) - \\ - f\left(\sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(q(t+j))\right)\Bigg], \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{5_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь. Покажемо, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le M\,\Delta^i a^{\widetilde{k}t}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{6_i}$$

Дійсно, в силу (5_0), (5_1) і умов теореми отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{j+1} |f(x_0(t+j), x_0(q(t+j)))| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} L(|x_0(t+j)| + |x_0(q(t+j))|)^{k-1}(|x_0(t+j)| + |x_0(q(t+j))|) \le$$

$$\le L\widetilde{a} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j} \left(Ma^{t+j} + Ma^{q(t+j)}\right)^{k-1} \left(Ma^{t+j} + Ma^{q(t+j)}\right) \le$$

$$\le L\widetilde{a}(2M)^k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}a^{kq}\right)^j a^{kqt} \le M\, \frac{L\widetilde{a}2^k M^{k-1}}{1-\widetilde{a}a^{\widetilde{k}}}\, a^{\widetilde{k}t} \le M\Delta a^{\widetilde{k}t},$$

тобто оцінка (6_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, доведено вже для деякого $i \ge 1$ і доведемо, що ряд (5_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \ge 0$ і виконується оцінка (6_i). Згідно з (5_{i+1}), (6_i) отримуємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{j+1} \left| f\left(\sum_{l=0}^{i} x_l(t+j), \sum_{l=0}^{i} x_l(q(t+j))\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q(t+j))\right) \right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} L \times$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^{i} |x_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i} |x_l(q(t+j))| + \sum_{l=0}^{i-1} |x_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i-1} |x_l(q(t+j))|\right)^{k-1} \times$$

$$\times (|x_i(t+j)| + |x_i(q(t+j))|) \le \widetilde{a}L \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j \left(\frac{4M}{1-\Delta}\, a^{\widetilde{k}q(t+j)}\right)^{k-1} 2M\Delta^i a^{\widetilde{k}q(t+j)} \le$$

$$\le \widetilde{a}L\Delta^i \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j \frac{(4M)^k}{(1-\Delta)^{k-1}}\, a^{\widetilde{k}qk(t+j)} \le M\Delta^i \frac{\widetilde{a}L4^k M^{k-1}}{(1-\Delta)^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}\, a^{\widetilde{k}^2}\right)^j a^{\widetilde{k}^2 t} \le$$

$$\le M\Delta^i \frac{\widetilde{a}\, L4^k M^{k-1}}{(1-\Delta)^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}a^{\widetilde{k}}\right)^j a^{\widetilde{k}t} \le M\Delta^i \frac{\widetilde{a}\, L4^k M^{k-1}}{(1-\Delta)^{k-1}(1-\widetilde{a}a^{\widetilde{k}})}\, a^{\widetilde{k}t} \le M\Delta^{i+1} a^{\widetilde{k}t}.$$

Отже, системи рівнянь (4_i), $i = 1, 2, \ldots$, мають розв'язки у вигляді рядів (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, що рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умови (6_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Безпосередньо з (6_i), $i = 0, 1, \ldots$, випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ і виконується оцінка

$$|x(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}\, a^t.$$

Таким чином, справедливе співвідношення (3).

Очевидно, що для закінчення доведення теореми 1 достатньо показати, що ряд (2) задовольняє систему рівнянь (1), тобто виконується тотожність

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) \equiv A \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + f\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt)\right).$$

Для цього досить довести, що ряд

$$f(x_0(t), x_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left[f\left(\sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(qt)\right) - f\left(\sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(qt)\right)\right]$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ і його сумою є $f\left(\sum_{l=0}^{\infty} x_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} x_l(qt)\right)$. А це, у свою чергу, буде доведено, коли покажемо, що при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ виконується співвідношення

$$\lim_{i\to\infty} f\left(\sum_{l=0}^{i} x_l(t), \sum_{l=0}^{i} x_l(qt)\right) = f\left(\sum_{l=0}^{\infty} x_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} x_l(qt)\right). \tag{7}$$

Нехай ε — як завгодно мале додатне число. Тоді завдяки умовам теореми існує такий номер N, що виконується умова

$$L\left(\frac{4M}{1-\Delta}\right)^k \Delta^{N+1} < \varepsilon.$$

Далі, беручи до уваги умови теореми і (6_i), $i = 1, 2, \ldots,$ знаходимо

$$\left|f\left(\sum_{l=0}^{\infty} x_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} x_l(qt)\right) - f\left(\sum_{l=0}^{i} x_l(t), \sum_{l=0}^{i} x_l(qt)\right)\right| \le$$

$$\le L\left(\sum_{l=0}^{\infty} |x_l(t)| + \sum_{l=0}^{\infty} |x_l(qt)| + \sum_{l=0}^{i} |x_l(t)| + \sum_{l=0}^{i} |x_l(qt)|\right)^{k-1} \times$$

$$\times \left(\sum_{l=i+1}^{\infty} |x_l(t)| + \sum_{l=i+1}^{\infty} |x_l|(qt)\right) \le$$

$$\le L\,\frac{(4M)^{k-1}}{(1-\Delta)^{k-1}}\,\frac{2M\Delta^{i+1}}{1-\Delta} \le L\left(\frac{4M}{1-\Delta}\right)^k \Delta^{i+1} < \varepsilon$$

при всіх $i \ge N$. Цим самим співвідношення (7) і теорема 1 доведені.

Розглянемо тепер систему (1) у випадку, коли $q > 1$, і встановимо умови, при виконанні яких система рівнянь (1) матиме сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків.

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $\det A \neq 0,\ a = |A| < 1,\ q > 1;$

2) вектор-функція $f(x, y)$ *є неперервною обмеженою при* $x \in \mathbb{R}^n$ *і задовольняє умову*

$$\left|f(x, y) - f(x', y')\right| \le L\left(|x| + |y| + |x'| + |y'|\right)^{k-1}\left(|x - x'| + |y - y'|\right),$$

$f(0,0) \equiv 0,\ L$ *— деяка додатна стала,* $k = \mathrm{const},\ k > 1;$

3) для деякого $\widetilde{\Delta} < 1$ виконується нерівність

$$\frac{\widetilde{a}\,L\,4^k M^{k-1}}{\left(1-\widetilde{\Delta}\right)^{k-1}(1-\widetilde{a}a^k)} \le \widetilde{\Delta}.$$

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків у вигляді ряду (2), що задовольняє умову (3).

Для доведення теореми достатньо, як і у випадку теореми 1, показати, що послідовність систем рівнянь (4_i), $i = 0, 1, \ldots,$ має неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язки у вигляді рядів (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ що задовольняють умови

$$|x_i(t)| \le \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^i a^t, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{8_i}$$

Дійсно, беручи до уваги умови теореми, легко переконатися, що ряд (5_1) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняє систему рівнянь (4_1). Крім цього, маємо

$$\begin{aligned}
|x_1(t)| &\le \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{j+1} |f(x_0(t+j), x_0(q(t+j)))| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} L\left(|x_0(t+j)| + |x_0(q(t+j))|\right)^{k-1}\left(|x_0(t+j)| + |x_0(q(t+j))|\right) \le \\
&\le L\widetilde{a}\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}^j\left(Ma^{t+j} + Ma^{q(t+j)}\right)^{k-1}\left(Ma^{t+j} + Ma^{q(t+j)}\right) \le \\
&\le L\widetilde{a}(2M)^k\sum_{j=0}^{\infty}\left(\widetilde{a}a^k\right)^j a^{kt} \le M\,\frac{L\widetilde{a}2^kM^{k-1}}{1-\widetilde{a}a^k}\,a^{kt} \le M\widetilde{\Delta}a^t,
\end{aligned}$$

тобто умова (8_i) виконується при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (8_i) доведено вже для деякого $i \ge 1$, тому доведемо її справедливість для $i+1$. Справді, завдяки умовам теореми, (5_{i+1}) і (8_i), одержуємо

$$\begin{aligned}
|x_{i+1}(t)| &\le \sum_{j=0}^{\infty}|A^{-1}|^{j+1}\left| f\left(\sum_{l=0}^{i} x_l(t+j), \sum_{l=0}^{i} x_l(q(t+j))\right) - \right.\\
&\left. - f\left(\sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q(t+j))\right)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}^{j+1}L\times \\
&\times\left(\sum_{l=0}^{i}|x_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i}|x_l(q(t+j))| + \sum_{l=0}^{i-1}|x_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i-1}|x_l(q(t+j))|\right)^{k-1}\times \\
&\times\left(|x_i(t+j)| + |x_i(q(t+j))|\right) \le \widetilde{a}L\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}^j\left(\frac{4M}{1-\widetilde{\Delta}}\,a^{t+j}\right)^{k-1} 2M\widetilde{\Delta}^i a^{t+j} \le
\end{aligned}$$

$$\leq \widetilde{a} L \widetilde{\Delta}^i \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j M \widetilde{\Delta}^i \frac{\widetilde{a}\, L 4^k M^{k-1}}{(1-\widetilde{\Delta})^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a} a^k\right)^j a^{kt} \leq$$

$$\leq M \widetilde{\Delta}^i \frac{\widetilde{a}\, L 4^k M^{k-1}}{(1-\widetilde{\Delta})^{k-1}(1-\widetilde{a} a^k)} a^t \leq M \widetilde{\Delta}^{i+1} a^t.$$

Цим самим довели, що умови (8_i) виконуються при всіх $i \geq 1$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ і його сума $x(t)$ задовольняє умову (3).

Для закінчення доведення теореми 2 достатньо довести справедливість співвідношення (7), що можна здійснити аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 1.

2. Розглянемо тепер систему рівнянь (1) у випадку, коли виконуються умови:

$1'$) $\det A \neq 0$, $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, де A_1, A_2 — деякі дійсні $(p \times p)$- і $(r \times r)$-вимірні матриці $(p + r = n)$, для яких виконуються співвідношення $a_1 = |A_1| < 1$, $\widetilde{a}_2 = \left|A_2^{-1}\right| < 1$. Перепишемо систему (1) у вигляді

$$\begin{gathered} \widetilde{x}(t+1) = A_1 \widetilde{x}(t) + \widetilde{f}\left(\widetilde{x}(t), \widetilde{\widetilde{x}}(t), \widetilde{x}(qt), \widetilde{\widetilde{x}}(qt)\right), \\ \widetilde{\widetilde{x}}(t+1) = A_2 \widetilde{\widetilde{x}}(t) + \widetilde{\widetilde{f}}\left(\widetilde{x}(t), \widetilde{\widetilde{x}}(t), \widetilde{x}(qt), \widetilde{\widetilde{x}}(qt)\right), \end{gathered} \tag{9}$$

де $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widetilde{\widetilde{x}} = (x_{p+1}, \ldots, x_{p+r})$, $\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_p)$, $\widetilde{\widetilde{f}} = (f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$.

При цьому виконуються умови:

$2'$)
$$\left|\widetilde{f}\left(\widetilde{x}', \widetilde{\widetilde{x}}', \widetilde{x}', \widetilde{\widetilde{x}}'\right) - \widetilde{f}\left(\widetilde{x}'', \widetilde{\widetilde{x}}'', \widetilde{x}'', \widetilde{\widetilde{x}}''\right)\right| \leq$$
$$\leq L_1 \left(\left|\widetilde{x}'\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}'\right| + \left|\widetilde{x}'\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}'\right| + \left|\widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}''\right| + \left|\widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}''\right|\right)^{k-1} \times$$
$$\times \left(\left|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}' - \widetilde{\widetilde{x}}''\right| + \left|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}' - \widetilde{\widetilde{x}}''\right|\right),$$
$$\left|\widetilde{\widetilde{f}}\left(\widetilde{x}', \widetilde{\widetilde{x}}', \widetilde{x}', \widetilde{\widetilde{x}}'\right) - \widetilde{\widetilde{f}}\left(\widetilde{x}'', \widetilde{\widetilde{x}}'', \widetilde{x}'', \widetilde{\widetilde{x}}''\right)\right| \leq$$
$$\leq L_2 \left(\left|\widetilde{x}'\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}'\right| + \left|\widetilde{x}'\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}'\right| + \left|\widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}''\right| + \left|\widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}''\right|\right)^{k-1} \times$$
$$\times \left(\left|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}' - \widetilde{\widetilde{x}}''\right| + \left|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''\right| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}' - \widetilde{\widetilde{x}}''\right|\right), \quad k > 1,$$

де L_1, L_2 — деякі додатні сталі, що залежать від L $(L_1 = L_1(L),\ L_2 = L_2(L),\ L_1 \to 0,\ L_2 \to 0$ при $L \to 0)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $1'$, $2'$, $q > 1$, $\widetilde{f}(0,0,0,0) \equiv 0$, $\widetilde{\widetilde{f}}(0,0,0,0) \equiv 0$, *а також умови:*

$3'$) $\widetilde{a}_1\, a_1^k < 1$, $\widetilde{a}_2\, a_1^k < 1$, *де* $\widetilde{a}_1 = \left|A_1^{-1}\right|$;

$4'$) $\theta = \max\left\{\dfrac{L_1 \widetilde{a}_1 \widetilde{M}^{k-1} 8^k}{(1-\theta)^{k-1}\left(1 - \widetilde{a}_1 a_1^k\right)}, \dfrac{L_2 \widetilde{a}_2 \widetilde{M}^{k-1} 8^k}{(1-\theta)^{k-1}\left(1 - \widetilde{a}_2 a_1^k\right)}\right\} < 1.$

Тоді система рівнянь (9) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків у вигляді рядів*

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t), \qquad \widetilde{\widetilde{x}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{x}}_i(t), \tag{10}$$

де $\widetilde{x}_i(t),\ \widetilde{\widetilde{x}}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервні обмежені при* $t \in \mathbb{R}^+$ *вектор-функції, що задовольняють умову*

$$\lim_{t \to +\infty} \widetilde{x}(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \widetilde{\widetilde{x}}(t) = 0. \tag{11}$$

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь

$$\widetilde{x}_0(t+1) = A_1 \widetilde{x}_0(t), \quad \widetilde{\widetilde{x}}_0(t) \equiv 0, \tag{12_0}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_i(t+1) = A_1 \widetilde{x}_i(t) + \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right) - \\
- \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right), \\
\widetilde{\widetilde{x}}_i(t+1) = A_2 \widetilde{\widetilde{x}}_i(t) + \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right) - \\
- \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right), \quad i = 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{12_i}$$

де $\widetilde{x}_{-1}(t) \equiv 0,\ \widetilde{\widetilde{x}}_{-1}(t) \equiv 0,$ і покажемо, що вони мають неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язки $\widetilde{x}_i(t),\ \widetilde{\widetilde{x}}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ у вигляді рядів

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A_1^{-(j+1)} \Bigg[\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j))\right) - \\
- \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j))\right) \Bigg], \\
\widetilde{\widetilde{x}}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A_2^{-(j+1)} \Bigg[\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j))\right) - \\
- \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j))\right) \Bigg], \quad i = 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{13_i}$$

для яких виконуються оцінки

$$|\widetilde{x}_i(t)| \le \widetilde{M} \theta^i a_1^t, \quad \left|\widetilde{\widetilde{x}}_i(t)\right| \le \widetilde{M} \theta^i a_1^t, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{14_i}$$

де $\widetilde{M}$ — деяка додатна стала.

Дійсно, оскільки система рівнянь (12_0) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $(\widetilde{x}_0(t), 0)$, яка залежить від довільної неперервної при $t \in [0,1]$ вектор-функції $\omega(t)$ вимірності p, що задовольняють умову

$$|\widetilde{x}_0(t)| \leq \widetilde{M} a_1^t, \quad \left|\widetilde{\widetilde{x}}_0(t)\right| \leq \widetilde{M} a_1^t, \tag{15_0}$$

то оцінки (14_0) справедливі.

Безпосередньою підстановкою (13_i) в (12_i) можна переконатися, що ряди (13_i), $i = 1, 2, \ldots,$ є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (12_i), $i = 1, 2, \ldots$. Доведемо справедливість оцінок (14_i), $i = 1, 2, \ldots$. Справді, беручи до уваги (13_1), (15_0) і умови теореми, отримуємо

$$\begin{aligned}
|\widetilde{x}_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |A_1^{-1}|^{j+1} \left| \widetilde{f}\left(\widetilde{x}_0(t+j), \widetilde{\widetilde{x}}_0(t+j), \widetilde{x}_0(q(t+j)), \widetilde{\widetilde{x}}_0(q(t+j))\right)\right| \leq \\
&\leq L_1 \widetilde{a}_1 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^j \left(|\widetilde{x}_0(t+j)| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_0(t+j)\right| + |\widetilde{x}_0(q(t+j))| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_0(q(t+j))\right|\right)^k \leq \\
&\leq L_1 \widetilde{a}_1 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^j \left(\widetilde{M} a_1^{t+j} + \widetilde{M} a_1^{t+j} + \widetilde{M} a_1^{q(t+j)} + \widetilde{M} a_1^{q(t+j)}\right)^k \leq \\
&\leq L_1 \widetilde{a}_1 \left(4\widetilde{M}\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}_1 a_1^k\right)^j a_1^{kt} \leq \widetilde{M}\, \frac{L_1 \widetilde{a}_1 4^k \widetilde{M}^{k-1}}{1 - \widetilde{a}_1 a_1^k}\, a_1^{kt} \leq \widetilde{M}\, \theta a_1^t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\widetilde{x}}_1(t)\right| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|A_2^{-1}\right|^{j+1} \left| \widetilde{\widetilde{f}}\left(\widetilde{x}_0(t+j), \widetilde{\widetilde{x}}_0(t+j), \widetilde{x}_0(q(t+j)), \widetilde{\widetilde{x}}_0(q(t+j))\right)\right| \leq \\
&\leq L_2 \widetilde{a}_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^j \left(|\widetilde{x}_0(t+j)| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_0(t+j)\right| + |\widetilde{x}_0(q(t+j))| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_0(q(t+j))\right|\right)^k \leq \\
&\leq L_2 \widetilde{a}_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^j \left(\widetilde{M} a_1^{t+j} + \widetilde{M} a_1^{t+j} + \widetilde{M} a_1^{q(t+j)} + \widetilde{M} a_1^{q(t+j)}\right)^k \leq \\
&\leq L_2 \widetilde{a}_2 (4\widetilde{M})^k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}_2 a_1^k\right)^j a_1^{kt} \leq \widetilde{M}\, \frac{L_2 \widetilde{a}_2 4^k \widetilde{M}^{k-1}}{1 - \widetilde{a}_2 a_1^k}\, a_1^{kt} \leq \widetilde{M} \theta a_1^t,
\end{aligned}$$

тобто умови (14_i) виконуються при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (14_i) доведені вже для деякого $i \geq 1$. Доведемо їхню справедливість для $i + 1$. Справді, завдяки умовам теореми з урахуванням (13_{i+1}) і (14_i) отримуємо

$$\begin{aligned}
|\widetilde{x}_{i+1}(t)| \leq L_1 \sum_{j=0}^{\infty} \left|A_1^{-1}\right|^{j+1} \Bigg| \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j))\right) - \\
- \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j))\right) \Bigg| \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le L_1 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^{j+1} \left(\sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j)\right| + \sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| + \right. \\
&\quad + \sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| + \sum_{l=0}^{i-1} |\widetilde{x}_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j)\right| + \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{i-1} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| + \sum_{l=0}^{i-1} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| \right)^{k-1} \times \\
&\quad \times \left(|\widetilde{x}_i(t+j)| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_i(t+j)\right| + |\widetilde{x}_i(q(t+j))| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_i(q(t+j))\right| \right) \le \\
&\le L_1 \widetilde{a}_1 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^{j} \left(\frac{8\widetilde{M}}{1-\theta}\, a_1^{t+j} \right)^{k-1} 4\widetilde{M}\theta^i a_1^{t+j} \le \widetilde{a}_1 L_1 \theta^i \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^{j}\, \frac{(8\widetilde{M})^k}{(1-\theta)^{k-1}}\, a_1^{k(t+j)} \le \\
&\le \widetilde{M}\,\theta^i\, \frac{\widetilde{a}_1\, L_1 8^k \widetilde{M}^{k-1}}{(1-\theta)^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}_1\, a_1^k \right)^j a_1^{kt} \le \widetilde{M}\,\theta^i\, \frac{\widetilde{a}_1\, L_1 8^k \widetilde{M}^{k-1}}{(1-\theta)^{k-1} \left(1 - \widetilde{a}_1 a_1^k\right)}\, a_1^t \le \widetilde{M}\,\theta^{i+1} a_1^t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\widetilde{\widetilde{x}}_{i+1}(t)\right| &\le L_2 \sum_{j=0}^{\infty} \left|A_2^{-1}\right|^{j+1} \left| \widetilde{\widetilde{f}} \left(\sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j)) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \widetilde{\widetilde{f}} \left(\sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{x}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{x}}_l(q(t+j)) \right) \right| \le \\
&\le L_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^{j+1} \left(\sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j)\right| + \sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| + \right. \\
&\quad + \sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| + \sum_{l=0}^{i-1} |\widetilde{x}_l(t+j)| + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t+j)\right| + \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{i-1} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| + \sum_{l=0}^{i-1} |\widetilde{x}_l(q(t+j))| \right)^{k-1} \times \\
&\quad \times \left(|\widetilde{x}_i(t+j)| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_i(t+j)\right| + |\widetilde{x}_i(q(t+j))| + \left|\widetilde{\widetilde{x}}_i(q(t+j))\right| \right) \le \\
&\le L_2 \widetilde{a}_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^{j} \left(\frac{8\widetilde{M}}{1-\theta}\, a_1^{t+j} \right)^{k-1} 4\widetilde{M}\theta^i a_1^{t+j} \le \\
&\le \widetilde{a}_2 L_2 \theta^i \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^{j}\, \frac{(8\widetilde{M})^k}{(1-\theta)^{k-1}}\, a_1^{k(t+j)} \le \\
&\le \widetilde{M}\,\theta^i\, \frac{\widetilde{a}_2\, L_2 8^k \widetilde{M}^{k-1}}{(1-\theta)^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\widetilde{a}_2\, a_1^k \right)^j a_1^{kt} \le
\end{aligned}
$$

$$\leq \widetilde{M}\theta^i \frac{\widetilde{a}_2\, L_2 8^k \widetilde{M}^{k-1}}{(1-\theta)^{k-1}(1-\widetilde{a}_2 a_1^k)}\, a_1^t \leq \widetilde{M}\theta^{i+1} a_1^t.$$

Таким чином, ряди (13_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\widetilde{x}_i(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ що задовольняють відповідні системи рівнянь (12_i) і для яких виконуються оцінки (14_i), $i = 1, 2, \ldots .$ Звідси безпосередньо випливає, що ряди (10) рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ до деяких неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функцій $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{\widetilde{x}}(t)$, які задовольняють умови

$$|\widetilde{x}(t)| \leq \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}\, a_1^t, \qquad \left|\widetilde{\widetilde{x}}(t)\right| \leq \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}\, a_1^t$$

і, отже, умови (11).

Тепер покажемо, що виконуються співвідношення

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i}, \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right) \equiv$$

$$\equiv \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}, \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right),$$

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i}, \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right) \equiv$$

$$\equiv \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}, \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right). \tag{16}$$

Дійсно, нехай ε — як завгодно мале додатне число і N — ціле додатне число, що задовольняє умову

$$L_1 \left(\frac{8\widetilde{M}}{1-\theta}\right)^k \theta^{N+1} < \varepsilon, \qquad L_2 \left(\frac{8\widetilde{M}}{1-\theta}\right)^k \theta^{N+1} < \varepsilon$$

(завдяки умові $0 < \theta < 1$ таке число N завжди існує). Тоді згідно з умовами теореми і оцінками (14_i), $i = 0, 1, \ldots,$ одержуємо, що при всіх $i \geq N$ виконуються нерівності

$$\left|\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)\right| \leq$$

$$\leq L_1\left(\sum_{l=0}^{\infty} |\widetilde{x}_l(t)| + \sum_{l=0}^{\infty} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=0}^{\infty} |\widetilde{x}_l(qt)| + \sum_{l=0}^{\infty} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(t)| + \sum_{l=0}^{i} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=0}^{i} |\widetilde{x}_l(qt)| + \sum_{l=0}^{i} \left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right|\right)^{k-1} \times$$

$$\times\left(\sum_{l=i+1}^{\infty}|\widetilde{x}_l(t)|+\sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t)\right|+\sum_{l=i+1}^{\infty}|\widetilde{x}_l(qt)|+\sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right|\right)\leq$$

$$\leq L_1\left(\frac{8\widetilde{M}}{1-\theta}\right)^k\theta^{i+1}<\varepsilon,$$

$$\left|\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{\widetilde{x}}_l(tj),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)\right|\leq$$

$$\leq L_2\left(\sum_{l=0}^{\infty}|\widetilde{x}_l(t)|+\sum_{l=0}^{\infty}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t)\right|+\sum_{l=0}^{\infty}|\widetilde{x}_l(qt)|+\sum_{l=0}^{\infty}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{i}|\widetilde{x}_l(t)|+\sum_{l=0}^{i}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t)\right|+\sum_{l=0}^{i}|\widetilde{x}_l(qt)|+\sum_{l=0}^{i}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right|\right)^{k-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{l=i+1}^{\infty}|\widetilde{x}_l(t)|+\sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(t)\right|+\sum_{l=i+1}^{\infty}|\widetilde{x}_l(qt)|+\sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right|\right)\leq$$

$$\leq L_2\left(\frac{8\widetilde{M}}{1-\theta}\right)^k\theta^{i+1}<\varepsilon$$

і, отже, співвідношення (16) мають місце. Тоді, очевидно, маємо

$$\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=0}^{\infty}\left(\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)\right),$$

$$\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=0}^{\infty}\left(\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{\widetilde{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i-1}\widetilde{\widetilde{x}}_l(qt)\right)\right),$$

і, отже (завдяки (12_i), $i = 0, 1, \ldots$), ряди (10) є сім'єю розв'язків системи рівнянь (9), що задовольняють умову (11).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1′, 2′, $q > 1$ і умови:*

3″) $0 < a_1 a_2^{-k} < 1,\ 0 < a_2^{1-k} < 1$, де $a_2 = |A_2| > 1$;

4″) $\widetilde{\theta} = \max\left\{ \dfrac{L_1 \overline{M}^{k-1} 8^k}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}(a_2^k - a_1)},\ \dfrac{L_2 \overline{M}^{k-1} 8^k}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}(a_2^k - a_2)} \right\} < 1.$

Тоді система рівнянь (9) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків у вигляді рядів

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{x}_i(t), \quad \widetilde{\widetilde{x}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{x}}_i(t), \tag{17}$$

де $\overline{x}_i(t),\ \overline{\overline{x}}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^-$ вектор-функції, що задовольняють умову

$$\lim_{t \to -\infty} \widetilde{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} \widetilde{\widetilde{x}}(t) = 0. \tag{18}$$

Доведення. Розглянемо послідовності систем рівнянь

$$\overline{x}_0(t) = 0, \quad \overline{\overline{x}}_0(t+1) = A_2 \overline{\overline{x}}_0(t), \tag{19_0}$$

$$\overline{x}_i(t+1) = A_1 \overline{x}_i(t) + \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right) -$$

$$- \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-2} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right),$$

$$\overline{\overline{x}}_i(t+1) = A_2 \overline{\overline{x}}_i(t) + \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right) -$$

$$- \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-2} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{19_i}$$

і доведемо, що вони мають неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язки, які задовольняють умови

$$|\overline{x}_i(t)| \leq \overline{M}\, \widetilde{\theta}^i a_2^t, \quad \left|\overline{\overline{x}}_i(t)\right| \leq \overline{M}\, \widetilde{\theta}^i a_2^t, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{20_i}$$

де $\overline{M}$ — деяка додатна стала.

Дійсно, друга підсистема системи рівнянь (19_0) має, як відомо, сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків $\overline{\overline{x}}_0(t) = \overline{\overline{x}}_0(t, \omega^-(t))$, що залежить від довільної неперервної при $t \in [0, 1]$ вектор-функції $\omega^-(t)$ вимірності r, які задовольняють умову (20_0).

Далі, безпосередньою підстановкою в (19_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що ряди

$$\overline{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_1^{j-1} \left[\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(q(t-j)) \right) - \right.$$

$$
- \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-2}\overline{x}_l(t-j),\sum_{l=0}^{i-2}\overline{\overline{x}}_l(t-j),\sum_{l=0}^{i-2}\overline{x}_l(q(t-j)),\sum_{l=0}^{i-2}\overline{\overline{x}}_l(q(t-j))\right)\Bigg],
$$

$$
\overline{\overline{x}}_i(t)=\sum_{j=1}^{\infty}A_2^{j-1}\Bigg[\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i-1}\overline{x}_l(t-j),\sum_{l=0}^{i-1}\overline{\overline{x}}_l(t-j),\sum_{l=0}^{i-1}\overline{x}_l(q(t-j)),\sum_{l=0}^{i-1}\overline{\overline{x}}_l(q(t-j))\right)-
$$

$$
- \widetilde{\widetilde{f}}(\sum_{l=0}^{i-2}\overline{x}_l(t-j),\sum_{l=0}^{i-2}\overline{\overline{x}}_l(t-j),\sum_{l=0}^{i-2}\overline{x}_l(q(t-j)),\sum_{l=0}^{i-2}\overline{\overline{x}}_l(q(t-j)))\Bigg],\quad i=1,2,\ldots, \qquad (21_i)
$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (19_i), $i=1,2,\ldots$. Доведемо, що вони рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^-$ до деяких неперервних вектор-функцій $\overline{x}_i(t)$, $\overline{\overline{x}}_i(t)$, $i=1,2,\ldots$, які задовольняють умови (20_i), $i=1,2,\ldots$. Справді, враховуючи умови теореми і (20_0), отримуємо

$$
|\overline{x}_1(t)|\le\sum_{j=1}^{\infty}|A_1|^{j-1}\left|\widetilde{f}\left(\overline{x}_0(t-j),\overline{\overline{x}}_0(t-j),\overline{x}_0(q(t-j)),\overline{\overline{x}}_0(q(t-j))\right)\right|\le
$$

$$
\le L_1a_1^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_1^j\left(|\overline{x}_0(t-j)|+\left|\overline{\overline{x}}_0(t-j)\right|+|\overline{x}_0(q(t-j))|+\left|\overline{\overline{x}}_0(q(t-j))\right|\right)^k\le
$$

$$
\le L_1a_1^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_1^j\left(\overline{M}a_2^{t-j}+\overline{M}a_2^{t-j}+\overline{M}a_2^{q(t-j)}+\overline{M}a_2^{q(t-j)}\right)^k\le
$$

$$
\le L_1a_1^{-1}\left(4\overline{M}\right)^k\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_1a_2^{-k}\right)^j a_2^{kt}\le
$$

$$
\le\overline{M}\,\frac{4^k\overline{M}^{k-1}L_1a_1^{-1}a_1a_2^{-k}}{1-a_1a_2^{-k}}\,a_2^{kt}\le\overline{M}\,\frac{4^k\overline{M}^{k-1}L_1}{a_2^k-a_1}\,a_2^t\le\overline{M}\widetilde{\theta}a_2^t,
$$

$$
\left|\overline{\overline{x}}_1(t)\right|\le\sum_{j=1}^{\infty}|A_2|^{j-1}\left|\widetilde{\widetilde{f}}\left(\overline{x}_0(t-j),\overline{\overline{x}}_0(t-j),\overline{x}_0(q(t-j)),\overline{\overline{x}}_0(q(t-j))\right)\right|\le
$$

$$
\le L_2a_2^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_2^j\left(|\overline{x}_0(t-j)|+\left|\overline{\overline{x}}_0(t-j)\right|+|\overline{x}_0(q(t-j))|+\left|\overline{\overline{x}}_0(q(t-j))\right|\right)^k\le
$$

$$
\le L_2a_2^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_2^j\left(\overline{M}a_2^{t-j}+\overline{M}a_2^{t-j}+\overline{M}a_2^{q(t-j)}+\overline{M}a_2^{q(t-j)}\right)^k\le
$$

$$
\le L_2a_2^{-1}\left(4\overline{M}\right)^k\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_2a_2^{-k}\right)^j a_2^{kt}\le
$$

$$
\le\overline{M}\,\frac{4^k\overline{M}^{k-1}L_2a_2^{-1}a_2a_2^{-k}}{1-a_2a_2^{-k}}\,a_2^{kt}\le\overline{M}\,\frac{4^k\overline{M}^{k-1}L_2}{a_2^k-a_2}\,a_2^t\le\overline{M}\,\widetilde{\theta}\,a_2^t.
$$

Отже, ряди (21_1) рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^-$ до деяких неперервних вектор-функцій $\overline{x}_1(t), \overline{\overline{x}}_1(t)$, які задовольняють умови (20_1). Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (20_i) доведені вже для деякого $i \geq 1$ і покажемо, що вони зберігаються при переході від i до $i+1$. Дійсно, завдяки (20_{i+1}), умовам теореми і (20_i), знаходимо

$$
\begin{aligned}
|\overline{x}_{i+1}(t)| \leq{} & L_1 \sum_{j=1}^{\infty} |A_1|^{j-1} \left| \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(q(t-j)) \right) - \right. \\
& \left. - \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(q(t-j)) \right) \right| \leq \\
\leq{} & L_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{j-1} \left(\sum_{l=0}^{i} \left|\overline{x}_l(t-j)\right| + \sum_{l=0}^{i} \left|\overline{\overline{x}}_l(t-j)\right| + \sum_{l=0}^{i} \left|\overline{x}_l(q(t-j))\right| + \sum_{l=0}^{i} \left|\overline{x}_l(q(t-j))\right| + \right. \\
& \left. + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\overline{x}_l(t-j)\right| + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\overline{\overline{x}}_l(t-j)\right| + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\overline{x}_l(q(t-j))\right| + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\overline{x}_l(q(t-j))\right| \right)^{k-1} \times \\
& \times \left(|\overline{x}_i(t-j)| + \left|\overline{\overline{x}}_i(t-j)\right| + |\overline{x}_i(q(t-j))| + \left|\overline{\overline{x}}_i(q(t-j))\right| \right) \leq \\
\leq{} & L_1 a_1^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_1^j \left(\frac{8\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\, a_2^{t-j} \right)^{k-1} 4\overline{M}\widetilde{\theta}^i a_2^{t-j} \leq \\
\leq{} & a_1^{-1} L_1 \widetilde{\theta}^i \sum_{j=1}^{\infty} a_1^j \frac{(8\overline{M})^k}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}}\, a_2^{k(t-j)} \leq \\
\leq{} & \overline{M}\, \widetilde{\theta}^i \frac{a_1^{-1} L_1 8^k \overline{M}^{k-1}}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}} \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 a_2^{-k})^j a_2^{kt} \leq \\
\leq{} & \overline{M}\, \widetilde{\theta}^i \frac{8^k \overline{M}^{k-1} L_1}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}(a_2^k - a_1)}\, a_2^t \leq \overline{M}\widetilde{\theta}^{i+1} a_2^t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{\overline{x}}_{i+1}(t)\right| \leq{} & L_2 \sum_{j=1}^{\infty} |A_2|^{j-1} \left| \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(q(t-j)) \right) - \right. \\
& \left. - \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t-j), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(q(t-j)) \right) \right| \leq \\
\leq{} & L_2 \sum_{j=1}^{\infty} a_2^{j-1} \left(\sum_{l=0}^{i} \left|\overline{x}_l(t-j)\right| + \sum_{l=0}^{i} \left|\overline{\overline{x}}_l(t-j)\right| + \right. \\
& + \sum_{l=0}^{i} \left|\overline{x}_l(q(t-j))\right| + \sum_{l=0}^{i} \left|\overline{x}_l(q(t-j))\right| + \sum_{l=0}^{i-1} \left|\overline{x}_l(t-j)\right| +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{l=0}^{i-1}\left|\overline{\overline{x}}_l(t-j)\right|+\sum_{l=0}^{i-1}\left|\overline{x}_l(q(t-j))\right|+\sum_{l=0}^{i-1}\left|\overline{x}_l(q(t-j))\right|\Bigg)^{k-1}\times$$

$$\times\left(|\overline{x}_i(t-j)|+\left|\overline{\overline{x}}_i(t-j)\right|+|\overline{x}_i(q(t-j))|+\left|\overline{\overline{x}}_i(q(t-j))\right|\right)\le$$

$$\le L_2a_2^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}a_2^j\left(\frac{8\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\,a_2^{t-j}\right)^{k-1}4\overline{M}\widetilde{\theta}^ia_2^{t-j}\le$$

$$\le a_2^{-1}L_2\widetilde{\theta}^i\sum_{j=1}^{\infty}a_2^j\,\frac{(8\overline{M})^k}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}}\,a_2^{k(t-j)}\le$$

$$\le \overline{M}\,\widetilde{\theta}^i\,\frac{a_2^{-1}\,L_28^k\overline{M}^{k-1}}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}}\sum_{j=1}^{\infty}(a_2\,a_2^{-k})^ja_2^{kt}\le$$

$$\le \overline{M}\,\widetilde{\theta}^i\,\frac{8^k\overline{M}^{k-1}L_2}{(1-\widetilde{\theta})^{k-1}(a_2^k-a_2)}\,a_2^t\le\overline{M}\widetilde{\theta}^{i+1}a_2^t.$$

Таким чином, ряди (21_i) рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^-$ і всіх $i\ge 1$ до деяких неперервних вектор-функцій $\overline{x}_i(t),\ \overline{\overline{x}}_i(t),\ i=1,2,\ldots,$ які задовольняють умови (20_i), $i==1,2,\ldots.$ Звідси безпосередньо випливає, що ряди (17) рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^-$ до деяких неперервних вектор-функцій $\widetilde{x}(t),\ \widetilde{\widetilde{x}}(t)$, які задовольняють умови

$$|\widetilde{x}(t)|\le\frac{\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\,a_2^t,\qquad\left|\widetilde{\widetilde{x}}(t)\right|\le\frac{\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\,a_2^t$$

і, отже, умови (18).

Для закінчення доведення теореми слід показати, що ряди (17) задовольняють систему рівнянь (9). Для цього покажемо спочатку, що виконуються співвідношення

$$\lim_{i\to+\infty}\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i},\overline{\overline{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right)\equiv$$

$$\equiv\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty},\overline{\overline{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right),$$

$$\lim_{i\to+\infty}\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(t),\sum_{l=0}^{i},\overline{\overline{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{i}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right)\equiv$$

$$\equiv\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty},\overline{\overline{x}}_l(t),\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(qt),\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right).\tag{22}$$

Дійсно, нехай ε — як завгодно мале додатне число і N — ціле додатне число, що задовольняє умову

$$L_1\left(\frac{8\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\right)^k\widetilde{\theta}^{N+1}<\varepsilon,\qquad L_2\left(\frac{8\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\right)^k\widetilde{\theta}^{N+1}<\varepsilon$$

(завдяки умові $0 < \widetilde{\theta} < 1$ таке число N завжди існує). Тоді згідно з умовами теореми і оцінками (20_i), $i = 0, 1, \ldots,$ одержуємо, що при всіх $i \geq N$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right) - \\
&\qquad - \widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i}\overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right)\Bigg| \leq \\
&\quad \leq L_1\Bigg(\sum_{l=0}^{\infty}|\overline{x}_l(t)| + \sum_{l=0}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=0}^{\infty}|\overline{x}_l(qt)| + \sum_{l=0}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(qt)\right| + \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{i}|\overline{x}_l(t)| + \sum_{l=0}^{i}\left|\overline{\overline{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=0}^{i}|\overline{x}_l(qt)| + \sum_{l=0}^{i}\left|\overline{\overline{x}}_l(qt)\right|\Bigg)^{k-1} \times \\
&\qquad \times \left(\sum_{l=i+1}^{\infty}|\overline{x}_l(t)| + \sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=i+1}^{\infty}|\overline{x}_l(qt)| + \sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(qt)\right|\right) \leq \\
&\quad \leq L_1\left(\frac{8\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\right)^k \widetilde{\theta}^{i+1} < \varepsilon, \\
&\Bigg|\widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right) - \\
&\qquad - \widetilde{\widetilde{f}}\left(\sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i}\overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i}\overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right)\Bigg| \leq \\
&\quad \leq L_2\Bigg(\sum_{l=0}^{\infty}|\overline{x}_l(t)| + \sum_{l=0}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=0}^{\infty}|\overline{x}_l(qt)| + \sum_{l=0}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(qt)\right| + \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{i}|\overline{x}_l(t)| + \sum_{l=0}^{i}\left|\overline{\overline{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=0}^{i}|\overline{x}_l(qt)| + \sum_{l=0}^{i}\left|\overline{\overline{x}}_l(qt)\right|\Bigg)^{k-1} \times \\
&\qquad \times \left(\sum_{l=i+1}^{\infty}|\overline{x}_l(t)| + \sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(t)\right| + \sum_{l=i+1}^{\infty}|\overline{x}_l(qt)| + \sum_{l=i+1}^{\infty}\left|\overline{\overline{x}}_l(qt)\right|\right) \leq \\
&\quad \leq L_2\left(\frac{8\overline{M}}{1-\widetilde{\theta}}\right)^k \widetilde{\theta}^{i+1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

і, отже, співвідношення (22) мають місце. Тоді, очевидно, маємо

$$\widetilde{f}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty}\overline{\overline{x}}_l(qt)\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left(\widetilde{f}(\sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(qt)) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{f} \left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right) \right),$$

$$\widetilde{\widetilde{f}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left(\widetilde{\widetilde{f}} \left(\sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{\widetilde{f}} \left(\sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{x}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{x}}_l(qt) \right) \right),$$

де $\overline{x}_{-1}(t) \equiv 0$, $\overline{\overline{x}}_{-1}(t) \equiv 0$ і, отже (завдяки (19_i), $i = 0, 1, \ldots$), ряди (17) є сім'ю розв'язків системи рівнянь (9), що задовольняють умову (18).

Теорему 4 доведено.

Література

1. G. D. Birkhoff, *General theory of linear difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **12**, 243 – 284 (1911).
2. G. D. Birkhoff, *Formal theory of irregular linear difference equations*, Acta Math., **54**, № 1, 205 – 246 (1930).
3. W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of linear q-difference equations*, Acta Math., **61**, № 1, 1 – 38 (1933).
4. C. R. Adams, *On the irregular cases of linear ordinary difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **30**, № 3, 507 – 541 (1928).
5. А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев (1986).
6. Г. П. Пелюх, *К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом*, Докл. Акад. наук, **407**, № 5, 600 – 603 (2006).
7. Г. П. Пелюх, О. А. Сивак, *Про існування неперервних при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **6**, № 2, 450 – 459 (2009).
8. Г. П. Пелюх, О. А. Сивак, *Неперервні розв'язки нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості*, Нелін. коливання, **12**, № 4, 515 – 529 (2009).

Одержано 26.05.21,
після доопрацювання — 14.07.21