УДК 517.929

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ІЗ ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

З. П. Ординська, Р. Ф. Овчар

Нац. техн. ун-т України “Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: Zoya.o2501@gmail.com
rfovchar@gmail.com

We obtain the coefficient necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of weakly nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations with pulse action at fixed times and develop an iterative algorithm for construction of these solutions.

Отримано коефіцієнтні необхідні й достатні умови існування та ітераційний алгоритм побудови розв’язків слабконелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

1. Лінійні крайові задачі. Знайдемо критерій існування та структуру загального розв’язку лінійних неоднорідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z_{|t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \tag{1}$$

$$lz = \alpha, \quad \tau_i, t \in [a, b]. \tag{2}$$

Прийнято такі припущення та позначення [1, 2]: $A(t),\ \varphi(t)$ — $(n\times n)$-вимірні матричні та $(n \times 1)$-вимірні векторні функції, компоненти яких належать просторові $C([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I)$ неперервних чи кусково-неперервних на $[a,b]\backslash\{\tau_i\}$ функцій, що мають розриви першого роду за t при $t = \tau_i$; S_i — $(n \times n)$-вимірні сталі матриці такі, що $(E + S_i)$ невироджені; a_i — n-вимірний вектор-стовпець констант

$$a_i \in \mathbb{R}^n, \quad -\infty < a < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_p < b < +\infty, \quad i = 1, \ldots, p,$$

$l = \mathrm{col}\,(l_1, \ldots, l_m)$ — лінійний обмежений m-вимірний векторний функціонал;

$$\alpha = \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Позначимо через $X(t)$ нормальну $X(a) = E$ фундаментальну матрицю відповідної (1) однорідної $\varphi(t) = 0,\ a_i = 0$ системи з імпульсною дією, а як матрицю Коші $K(t,\tau)$ задачі Коші для цієї системи візьмемо [1] таку:

$$K(t,\tau) = \begin{cases} X(t)X^{-1}(\tau) & \text{при} \quad 0 \le \tau \le t \le T, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le t < \tau \le T. \end{cases}$$

Нехай $Q = lX(\bullet)$ — $(m \times n)$-вимірна матриця, отримана підстановкою до крайових умов матриці $X(t)$, а Q^+ — єдина псевдообернена до неї $(n \times m)$-вимірна матриця [2].

Позначимо через P_Q $(n\times n)$-вимірну матрицю (ортопроєктор $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$), що проєктує $\mathbb{R}^n$ на нуль-простір $N(Q)$ матриці $Q:\ P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; аналогічно P_{Q^*} — $(m\times n)$-вимірна матриця: $\mathbb{R}^m \to N(Q^*)$. Далі позначимо через P_{Q_r} $(n\times r)$-вимірну матрицю, стовпці якої — r-лінійно незалежні стовпці матриці $P_Q (r = n - n_1, n_1 = \operatorname{rank} Q)$; $P_{Q_d^*}$ — $(d\times m)$-вимірна матриця, рядки якої — d-лінійно незалежні рядки матриці $P_{Q^*}(d = m - n_1)$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Нехай лінійна неоднорідна крайова задача (1), (2) з імпульсною дією задовольняє вказані вище умови й* $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min(n,m)$. *Тоді відповідна (1), (2) однорідна* $\varphi(t) = 0,\ a_i = 0,\ \alpha = 0$ *крайова задача має* $r = n - n_1$ *і лише* r *лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна для тих і тільки тих* $\varphi(t) \in C([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^m$, *які задовольняють умову*

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int\limits_a^b K(\bullet,\tau)\varphi(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^{P} K(\bullet,\tau_i+0)a_i\right\} = 0, \tag{3}$$

і при цьому має r*-параметричну сім'ю розв'язків* $z_0(t,c_r)$ *на просторі* $C^1([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I)$ *кусково-неперервно-диференційовних вектор-функцій, що мають розриви першого роду за* t *при* $t=\tau_i$*:*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix}\varphi\\ a_i\end{bmatrix}(t) + X(t)Q^+\alpha\right), \tag{4}$$

де $\left(G\begin{bmatrix}*\\ *\end{bmatrix}\right)(t)$ *— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (1), (2), що має вигляд*

$$\left(G\begin{bmatrix}\varphi\\ a_i\end{bmatrix}\right)(t) \overset{\text{def}}{=} \Bigg(\Bigg[\int\limits_a^b K(t,\tau)*d\tau - X(t)Q^+l\int\limits_a^b K(\bullet,\tau)*d\tau,$$

$$\sum_{t=1}^{p} K(t,\tau_i+0)* - X(t)Q^+l\sum_{i=1}^{p} K(\bullet,\tau_i+0)*\Bigg]\begin{bmatrix}\varphi(\tau)\\ a_i\end{bmatrix}\Bigg)(t).$$

Доведення теореми проводиться аналогічно до [3], а у випадку періодичної крайової задачі (1), (2) $m = n,\ lz = z(0) - z(T),\ \alpha = 0,\ \tau_{i+p} = \tau_i + T$ з теореми 1 випливає встановлений у [4] факт.

2. Слабконелінійні крайові задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{gathered}\dot z = A(t)z + \varphi(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \quad t \ne \tau_i \in [a,b],\\ \Delta z_{|t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon),\\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\bullet,\varepsilon),\varepsilon), \quad i = 1,\ldots,k.\end{gathered} \tag{5}$$

Знайдемо умови існування й алгоритм побудови розв'язку

$$z(t,\varepsilon):\ z(\bullet,\varepsilon) \in C^1([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I), \quad z(t,\bullet) \in C[0,\varepsilon_0],$$

задачі (5), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ на породжуючий розв'язок $z_0(t,c)$ (4) породжуючої крайової задачі (1), (2), що отримується з (5) при $\varepsilon = 0$. При цьому природно припустити, що виконуються умови теореми 1. Крім того, нелінійна n-вимірна вектор-функція $Z(z,t,\varepsilon)$ така, що

$$Z(\bullet,t,\varepsilon) \in C^1[\|z-z_0\|<q], \quad Z(z,\bullet,\varepsilon) \in C([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I), \quad Z(z,t,\bullet) \in C[0,\varepsilon_0],$$

$J_i(z(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon),\ J(z(\bullet,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійні n- і m-вимірні векторні функціонали, за першим аргументом z неперервно-диференційовні (за Фреше), а як вектор-функції другого аргументу — неперервні за $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$.

Необхідну умову існування шуканого розв'язку крайової задачі (5) встановлює така теорема.

Теорема 2. *Нехай слабконелінійна крайова задача (5) із імпульсною дією у фіксовані моменти часу має розв'язок* $z(t,\varepsilon)\colon z(\bullet,\varepsilon) \in C^1([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I),\ z(t,\bullet) \in [0,\varepsilon_0]$, *який перетворюється при* $\varepsilon = 0$ *на один із розв'язків* $z_0 = z_0(t,c_r)$ *породжуючої для (5) крайової задачі (1), (2) з константою* $c_r = c_r^* \in \mathbb{R}^r,\ r = n - \operatorname{rank} Q = n - n_1$. *Тоді векторна константа* c_r^* *задовольняє рівняння* $F\big(c_r^*\big) = 0$, *де рівняння*

$$F(c_r) = P_{Q_d^*}\Bigg\{ J(z_0(\bullet,c_r),0) - l\int_a^b K(\bullet,\tau)Z(z_0(\tau,c_r),\tau,0)d\tau -$$

$$-l\sum_{i=1}^{p} K(t,\tau_i+0)J_i(z_0(\tau_i-0,c_r),0)\Bigg\} = 0 \tag{6}$$

називатимемо рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (5) із імпульсною дією.

Доведення проводиться методом від супротивного з використанням теореми 1 і аналогічно до доведення відповідних теорем для періодичних крайових задач із імпульсною дією [4] і для крайових задач [2, 5, 6]. Рівняння (6) при цьому переходить у раніше одержані рівняння для породжуючих констант відповідних крайових задач.

Знайдемо достатні умови існування шуканого розв'язку крайової задачі (5). Здійснюючи у (5) заміну змінних

$$z(t,\varepsilon) = z_0\left(t,c_r^*\right) + x(t,\varepsilon),$$

приходимо до задачі відшукання розв'язку $x(t,\varepsilon)\colon x(\bullet,\varepsilon) \in C^1([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I)$,

$$x(t,\bullet) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) = 0$$

крайової задачі

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon Z\left(z_0\left(t,c_r^*\right) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right), \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta x_{|t=\tau_i} = S_i x(\tau_i-0) + \varepsilon J_i\left(z_0\left(\tau_i-0,c_r^*\right) + x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon\right), \tag{7}$$

$$lx = \varepsilon J\left(z_0\left(\bullet,c_r^*\right) + x(\bullet,\varepsilon)\varepsilon\right).$$

Враховуючи умови на нелінійності, маємо такі розклади в околі $x = 0,\ \varepsilon = 0$:

$$Z(z_0+x,t,\varepsilon) = Z(z_0,t,0) + A_1(t)x + R(x,t,\varepsilon),$$

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,0)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_r^*)}, \quad R(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x} = 0,$$

$$J_i\left(z_0\left(\tau_i - 0, c_r^*\right) + x\left(\tau_i - 0, \varepsilon\right), \varepsilon\right) = J_i\left(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0\right) + A_{1i}x(\tau_i - 0, \varepsilon + R_i\left(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon\right),$$

$$A_{1i} = \left.\frac{\partial J_i(z,0)}{\partial z}\right|_{z=z_0(\tau_i - 0, c_r^*)}, \quad R_i(0,0) = 0, \quad \frac{\partial R_i(0,0)}{\partial x} = 0,$$

$$J\left(z_0\left(\bullet, c_r^*\right) + x(\bullet, \varepsilon), \varepsilon\right) = J\left(z_0\left(\bullet, c_r^*\right), 0\right) + l_1 x(\bullet, \varepsilon) + R_0(x(\bullet, \varepsilon), \varepsilon),$$

$l_1 x(\bullet, \varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала

$$J\left(z_0\left(\bullet, c_r^*\right) + x(\bullet, \varepsilon), \varepsilon\right), \quad R_0(0,0) = 0, \quad \frac{\partial R_0(0,0)}{\partial x} = 0.$$

З урахуванням розкладу нелінійностей для знаходження розв'язку крайової задачі (5) за аналогією з [2–4] приходимо до такої еквівалентної операторної системи:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0 c = -P_{Q_d^*}\Bigg\{l_1 x^{(1)}(\bullet,\varepsilon) + R_0(x(\bullet,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\bullet,\tau)\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau -$$

$$-l\sum_{i=1}^{p} K(\bullet,\tau_i + 0)\left[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\Bigg\},$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon X(t)Q^+\left[J\left(z_0\left(\bullet, c_r^*\right), 0\right) + l_1\left(X_r(\bullet)c + x^{(1)}(\bullet,\varepsilon)\right) + R_0(x(\bullet,\varepsilon),\varepsilon)\right] +$$

$$+\left(G\begin{bmatrix} Z\left(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0\right) + A_1(\tau)\left(X_r(\tau)c + x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\right) + R(x,\tau,\varepsilon) \\ J_i\left(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0\right) + A_{1i}\left(X_r(\tau_i - 0)c + x^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon)\right) + \\ +R_i(x(\tau_i - 0),\varepsilon) \end{bmatrix}\right)(t),$$

де

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{l_1 X_r(\bullet) - l\int_a^b K(\bullet,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^{p} K(\bullet,\tau_i + 0)A_{1i}X(\tau_i - 0)\right\}$$

— $(d \times r)$-вимірна матриця $r = n - n_1,\ d = m - n_1,\ n_1 = \operatorname{rank} Q$.

Позначимо через P_{B_0} $(r \times r)$-вимірну матрицю (ортопроєктор), що проєктує R^r на $N(B_0)$, а через $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-вимірну матрицю, що проєктує R^d на $N(B_0^*)$. Тоді для розв'язування отриманої операторної системи застосуємо метод простих ітерацій [5, 6].

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай крайова задача (7) задовольняє наведені вище умови так, що* $\operatorname{rank} Q = n_1$, *і відповідна породжуюча крайова задача (1), (2) за умови (3)* $d = m - n_1$ *і тільки за цієї умови має* r*-параметричну сім'ю* $r = n - n_1$ *породжуючих розв'язків* $z_0(t, c_r)$ *(4). Тоді для кожного значення вектора* $c_r = c_r^* \in R^r$, *що задовольняє рівняння (6) для породжуючих констант, за умови*

$$P_{B_0} = 0, \qquad P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$$

крайова задача (7) має єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)\colon x(t,\bullet)\in C[0,\varepsilon_0]$, *який перетворюється на нуль при* $\varepsilon=0$. *Цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу, що збігається на* $[0,\varepsilon_*]$*:*

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1 x_k^{(1)}(\bullet,\varepsilon) + R_0(x_k(\bullet,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- l\int\limits_a^b K(\bullet,\tau)\left[A_1(\tau)x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]d\tau -$$

$$- l\sum_{k=1}^{p} K(\bullet,\tau_i+0)\left[A_{1i}x_k^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i(x_k(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\right]\Bigg\},$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon X(t)Q^+\Big[J\left(z_0\left(\bullet,c_r^*\right),0\right) + l_1\Big(X_r(\bullet)c_k + x_k^{(1)}(\bullet,\varepsilon)\Big) + R_0(x_k(\bullet,\varepsilon),\varepsilon)\Big] +$$

$$+\varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z\left(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0\right) + A_1(\tau)\Big(X_r(\tau)c_k + x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big) + R(x_k,\tau,\varepsilon) \\ J_i\left(z_0(\tau_i-0,c_r^*),0\right) + A_{1i}\Big(X_r(\tau_i-0)c_k + x_k^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon)\Big) + \\ +R_i(x_k(\tau_i-0),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t), \quad (8)$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_0^{(1)} = x_0 = 0, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Крайова задача (5) має при цьому єдиний розв'язок $z(t,\bullet)\in C[0,\varepsilon_*]$, *який при* $\varepsilon=0$ *перетворюється на породжуючий* $z_0\left(t,c_r^*\right)$ *(5) і визначається за допомогою ітераційного процесу (8) та формули* $z_k(t,\varepsilon) = z_0\left(t,c_r^*\right) + x_k(t,\varepsilon),\ k=0,1,2,\ldots.$

Автори висловлюють подяку проф. О. А. Бойчуку за увагу до роботи.

Література

1. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
2. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
3. А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, *Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **44**, № 3, 582 – 586 (1992).
4. А. А. Бойчук, Р. Ф. Хращевская, *Слабонелинейные краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **45**, № 2, 221 – 225 (1993).
5. А. А. Бойчук, Н. А. Перестюк, А. М. Самойленко, *Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях*, Дифференц. уравнения, № 9, 1516 – 1521 (1991).
6. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465 – 476 (2017).

Одержано 07.10.21,
після доопрацювання — 19.10.21