УДК 517.9

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ, ОБЕРНЕНОЇ ДО ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІЗНИЦЕВО-АЛГЕБРАЇЧНОГО РІВНЯННЯ

С. М. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Лозановича, 14, кв. 31, Слов'янськ, 84112, Україна
e-mail: chujko-slav@kr.net

О. В. Нєсмєлова

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84100, Україна
e-mail: star-o@ukr.net

Я. В. Калініченко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: kalinichenkoddpu@ukr.net

We determine conditions of solvability of the problem inverse to the Cauchy problem for the difference equation. In the case of insolvability of the problem inverse to the Cauchy problem for the difference equation, we propose conditions of solvability of the problem inverse to the Cauchy problem for the difference-algebraic equation.

Знайдено умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницевого рівняння. У випадку нерозв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницевого рівняння, запропоновано умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння.

Дослідження нетерових крайових задач для різницевих рівнянь започатковано у статті О. А. Бойчука [1] як розвиток досліджень періодичних крайових задач для різницевих рівнянь [2, 3]. Обернені задачі для різноманітних рівнянь математичної фізики відносяться до некоректно поставлених [4, 5] і мало досліджені.

1. Умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницевого рівняння. Досліджуємо задачу про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь

$$z(k+1) = Az(k) + b, \quad z(0) = c, \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

за відомою множиною розв'язків цієї задачі

$$\{z(0), z(1), \ldots, z(q)\} \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невідома стала матриця; b, $c \in \mathbb{R}^n$ — невідомі постійні вектор-стовпці. Визначимо оператор $\mathcal{M}[A] \colon \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \cdot n}$ як оператор, що ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, утворений із n стовпців матриці A, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] \colon \mathbb{R}^{m \cdot n} \to \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Зазначимо, що оператор $\mathcal{M}[A]$, як і обернений оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, можуть бути зображені явно [6 – 8]. Позначимо

$$\{\Theta_j\}_{j=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

природний базис [9] простору $\mathbb{R}^{n\times n}$. Матрицю A шукаємо у вигляді суми

$$A = \sum_{j=1}^{n^2} \Theta_j a_j, \quad a_j \in \mathbb{R}^1;$$

при цьому

$$Az(k) = \Xi_k\, a, \qquad \Xi_k := \begin{pmatrix} \Theta_1 z(k) & \Theta_2 z(k) & \ldots & \Theta_{n^2} z(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n^2}, \quad a \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Позначимо матрицю і вектори

$$\Omega := \begin{pmatrix} \Xi_0 & I_n & O_{n^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Xi_{q-1} & I_n & O_{n^2} \\ O_{n\times n^2} & O_{n\times n^2} & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(q+1)n\times(n^2+2n)},$$

$$\omega := \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \ldots \\ z(q) \\ z(0) \end{pmatrix}, \qquad \alpha := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Невідомі вектори $a \in \mathbb{R}^{n^2},\ b, c \in \mathbb{R}^n$ визначає рівняння

$$\Omega\,\alpha = \omega, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n^2+2n}, \tag{3}$$

розв'язне за умови [10, 11]

$$P_{\Omega^*}\,\omega = 0. \tag{4}$$

За умови (4) і тільки за неї рівняння (3) має сім'ю розв'язків

$$\alpha = \Omega^+\omega + P_{\Omega_r}\beta_r, \quad \beta_r \in \mathbb{R}^r,$$

яка визначає матрицю

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\,\alpha), \qquad \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_{n^2} & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times(n^2+2n)}$$

та вектори

$$b = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1\,\alpha), \qquad c = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2\,\alpha);$$

тут

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_n & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n^2+2n)},$$

$$\mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & O & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n^2+2n)},$$

$\Omega^+ \in \mathbb{R}^{(n^2+2n)\times qn}$ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця [1]; $P_{\Omega^*} : \mathbb{R}^{qn} \to \to \mathbb{N}(\Omega^*)$ — матриця-ортопроектор, матриця $P_{\Omega_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_\Omega \in \mathbb{R}^{(n^2+2n)\times(n^2+2n)}$.

Таким чином, довели таку лему.

Лема. *За умови (4) і тільки за неї задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків цієї задачі (2) має сім'ю розв'язків*

$$A = \mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{P}_0\left(\Omega^+\omega + P_{\Omega_r}\beta_r\right)\right], \qquad b = \mathcal{M}^{-1}\big[\mathcal{P}_1(\Omega^+\omega + P_{\Omega_r}\beta_r)\big],$$

$$c = \mathcal{M}^{-1}\big[\mathcal{P}_2(\Omega^+\omega + P_{\Omega_r}\beta_r)\big], \quad \beta_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови $P_\Omega = 0$ задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків цієї задачі розв'язна однозначно.

Приклад 1. Умови доведеної леми справджуються в задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків

$$z(0) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad z(1) := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad z(2) := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad z(3) := \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$z(4) := \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad z(5) := \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad z(6) := \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$ складають матриці [9]

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Xi_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\Xi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_6 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо матрицю і вектор

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ -7 \\ 8 \\ -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

які забезпечують виконання умови (4), тому задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь

$$z(k+1) = Az(k) + b, \quad z(0) = c$$

за відомою множиною розв'язків (5) цієї задачі розв'язна; тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку $P_\Omega = 0$, тому задача про відновлення задачі Коші за відомою множиною розв'язків (5) розв'язна однозначно.

За умови $P_{\Omega^*}\omega \neq 0$ задача про відновлення задачі Коші для лінійної системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків цієї задачі не розв'язна, при цьому її можна регуляризувати аналогічно [4, 12]. Для знаходження псевдорозв'язків задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків цієї задачі також застосовний метод найменших квадратів [13, 14].

2. Умова розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння. За умови $P_{\Omega^*}\omega \neq 0$ поставимо задачу про відновлення задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння

$$Az(k+1) = Bz(k) + b, \quad z(0) = c \tag{6}$$

за відомою множиною розв'язків (2); тут $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невідомі постійні матриці; $b, c \in \in \mathbb{R}^n$ — невідомі постійні вектор-стовпці. Матриці $A,\ B$ будемо шукати у вигляді сум

$$A = \sum_{j=1}^{n^2} \Theta_j \alpha_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}^1, \qquad B = \sum_{j=1}^{n^2} \Theta_j \beta_j, \quad \beta_j \in \mathbb{R}^1;$$

при цьому

$$Az(k+1) = \Xi_{k+1}\,\alpha, \qquad Bz(k) = \Xi_k\,\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n^2},$$

де

$$\Xi_k := \begin{pmatrix} \Theta_1 z(k) & \Theta_2 z(k) & \dots & \Theta_{n^2} z(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n^2}.$$

Позначимо матрицю

$$\Psi := \begin{pmatrix} \Xi_1 & -\Xi_0 & -I_n & O_{n\times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Xi_q & -\Xi_{q-1} & -I_n & O_{n\times n} \\ O_{n\times n^2} & O_{n\times n^2} & O_{n\times n^2} & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(q+1)n \times 2n(n+1)}$$

і вектори

$$\xi := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n(n+1)}, \qquad \psi := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(q+1)n}.$$

Невідомі вектори $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n^2},\ b, c \in \mathbb{R}^n$ визначає рівняння

$$\Psi\,\xi = \psi, \tag{7}$$

розв'язне за умови [10, 11]

$$P_{\Psi^*}\,\psi = 0. \tag{8}$$

За умови (8) і тільки за неї рівняння (7) має сім'ю розв'язків

$$\xi = \Psi^+\psi + P_{\Psi_r}\zeta_r, \quad \zeta_r \in \mathbb{R}^r,$$

яка визначає матриці

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\,\xi), \quad \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_{n^2} & O & O & O \end{pmatrix},$$

$$B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1\,\xi), \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_{n^2} & O & O \end{pmatrix}$$

та вектори

$$b = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2\,\xi), \qquad c = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_3\,\xi),$$

де

$$\mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & O & I_n & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2n(n+1)}, \qquad \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} O & O & O & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2n(n+1)},$$

$P_{\Psi^*}\colon \mathbb{R}^{(q+1)\,n} \to \mathbb{N}(\Psi^*)$ — матриця-ортопроектор, матриця $P_{\Psi_r} \in \mathbb{R}^{2n(n+1)\times r}$ утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_\Psi \in \mathbb{R}^{2n(n+1)\times 2n(n+1))}$.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема. *За умови (8) і тільки за неї задача про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків (2) має сім'ю розв'язків*

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\,\xi), \qquad B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1\,\xi),$$
$$b = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2\,\xi), \qquad c = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_3\,\xi),$$

де

$$\xi = \Psi^{+}\psi + P_{\Psi_r}\zeta_r, \quad \zeta_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови $P_\Psi = 0$ задача про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків цієї задачі розв'язна однозначно.

Приклад 2. Умови доведеної теореми виконуються в задачі про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків

$$z(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z(1) := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z(2) := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z(3) := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$z(4) := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad z(5) := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad z(6) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Умови доведеної леми не виконуються в задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків (9). Дійсно, матриці

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\Xi_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\Xi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

дозволяють переконатися, що умови (4) не виконуються: $P_{\Omega^*}\,\omega \neq 0$, тому задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь

$$z(k+1) = Az(k) + b, \quad z(0) = c$$

за відомою множиною розв'язків (9) цієї задачі не розв'язна; тут

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У той же час умови доведеної теореми справджуються у задачі про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків (9) цієї задачі. Дійсно, умова (8) у даному випадку виконується:

$$P_{\Psi^*} \psi = 0,$$

тому задача про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6)

$$A\, z(k+1) = B\, z(k) + b, \quad z(0) = c$$

за відомою множиною розв'язків (5) цієї задачі розв'язна; тут

$$\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку

$$P_\Psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad P_{\Psi_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тому задача про відновлення задачі Коші за відомою множиною розв'язків (9) розв'язна не однозначно. Наприклад, для $c_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^*$ отримуємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сенс переходу від відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (1) до відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) полягає у суттєвому розширенні розмірності невідомих, зокрема, в даному прикладі від $\omega \in \mathbb{R}^8$ до $\psi \in \mathbb{R}^{12}$.

Таким чином, відновлена задача Коші для системи різницевих рівнянь (6) вироджена [15], причому має місце виродження першого порядку. При цьому задача Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) розв'язна:

$$z(k, c) = X_1(k)\, c + K[\nu_1(j)](k), \quad c = z(0) \in \mathbb{R}^2,$$

проте неоднозначно:

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тут $X_1(k)$ —- нормальна $X_1(0) = I_2$ фундаментальна матриця:

$$X_1(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_1(2) = X_1(3) = X_1(4) = X_1(5) = X_1(6) = 0.$$

Природно виникає питання: чи співпадають розв'язки системи різницевих рівнянь (1) із заданою множиною розв'язків (9). Виявляється, що співпадають при

$$\nu_1(1) = \nu_1(2) = 1, \qquad \nu_1(3) = 0, \qquad \nu_1(4) = \nu_1(5) = -1, \qquad \nu_1(6) = 0.$$

Якщо умова (8) розв'язності задачі про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків (2) не виконується, то можна поставити задачу про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь

$$A\,z(k+1) = B\,z(k) + b, \quad z(0) = c, \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

за відомою множиною розв'язків (2); тут $m > n,\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — невідомі сталі матриці, $b \in \mathbb{R}^m$ — невідомий сталий вектор-стовпець.

3. Умова розв'язності задачі про відновлення скалярної задачі Коші. Дослідимо задачу про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь

$$z(k+p) = a_1 z(k+p-1) + \ldots + a_p z(k) + a_{p+1}, \quad z(0) = c_0, \ldots, z(p-1) = c_{p-1} \tag{10}$$

за відомою множиною розв'язків цієї задачі

$$\{z(0), z(1), \ldots, z(q)\} \in \mathbb{R}^1, \quad q > p, \tag{11}$$

де

$$a_1, a_2, \ldots,\ a_p, a_{p+1}, c_0, c_1, \ldots,\ c_{p-1} \in \mathbb{R}^1$$

— невідомі сталі. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів, вимагаємо мінімізації величини нев'язки [4, 12]

$$\Delta(a,c) := \sum_{k=0}^{q-p} \big(z(k+p) - (a_1 z(k+p-1) + \ldots + a_p z(k) + a_{p+1})\big)^2 + \sum_{k=0}^{p-1} (z(k) - c_k)^2 \to \min$$

для фіксованої множини розв'язків (11) цієї задачі. Позначимо вектор

$$\gamma := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p & a_{p+1} & c_0 & c_1 & \ldots & c_{p-1} \end{pmatrix}^* \in \mathbb{R}^{2p+1}.$$

Для цієї множини розв'язків мінімум функції $\Delta(\gamma)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Невідомі сталі визначає система

$$\Gamma\gamma = \delta, \tag{12}$$

де

$$\Phi(k) := \begin{pmatrix} z(k+p-1) \\ z(k+p-2) \\ \cdots\cdots \\ z(k+1) \\ z(k) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta := \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2p+1}, \qquad \delta_1 := \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ \cdots\cdots \\ z(p-2) \\ z(p-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p,$$

крім того

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 & O \\ O & \Gamma_1 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_0 := \sum_{k=0}^{q-p} \Phi(k)\Phi^*(k), \qquad \Gamma_1 := I_p, \qquad \delta_0 := \sum_{k=0}^{q-p} \Phi(k) z(k+p).$$

Система (12) однозначно розв'язна за умови невиродженості матриці Грама Γ :

$$\gamma = \Gamma^{-1}\delta,$$

при цьому $a = \Gamma_0^{-1}\delta_0,\ c = \delta_1$. Умова розв'язності системи (12) $\det\Gamma \neq 0$ рівнозначна умові невиродженості матриці Грама Γ_0.

Таким чином, довели таке твердження.

Наслідок 1. *За умови невиродженості матриці Грама Γ_0 задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (10) однозначно розв'язна у сенсі мінімізації величини нев'язки $\Delta(a, c) \to \min$ для фіксованої множини розв'язків (11) цієї задачі:*

$$a = \Gamma_0^{-1}\delta_0, \quad c = \delta_1.$$

Приклад 3. Умови доведеного наслідку справджуються у випадку задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь

$$z(k+25) = a_1 z(k+24) + \ldots + a_{24} z(k) + a_{26}, \qquad z(0) = c_0, \ldots, z(24) = c_{24} \tag{13}$$

за відомою множиною розв'язків

$$\{5833, 4285, 5336, 7235, 10057, 10155, 9144, 7167, 5572, 3261, 6377, 9084,$$
$$12946, 13276, 9012, 6792, 9642, 11833, 15053, 15850, 15292, 11145, 7893,$$
$$11476, 14174, 16669, 18132, 17424, 11932, 8346, 10533, 11226, 17569,$$
$$19893, 20341, 13738, 10179, 13276, 15415, 19419, 17463, 12112, 7856,$$
$$11680, 14553, 16427, 17479, 14984, 10282, 6506, 8940, 12162, 16235, 14277,$$
$$12711, 7939, 5062, 7915, 9590, 11627, 10072, 8549, 5094, 2758, 2758, 2472,$$
$$2576, 6038, 8404, 8710, 5372, 2817, 2208, 4538, 6813, 7562, 6796\}.$$

Наведена множина являє собою дані "Української правди" щодо приросту захворюваності на Covid-19 з 28 лютого по 15 травня 2021 р.

Для наведеної множини розв'язків умову невиродженості матриці Грама Γ_0 виконано:

$$\det\Gamma_0 = 390420375351333032625624795182978689692987927740\ldots$$
$$\ldots 709135831286096584278933847288091926240713628397657464275 3\ldots$$
$$\ldots 682470990541436482634554986981920088002451388972471316590 4\ldots$$
$$\ldots 676543605107315484251810898708288388014 72 \neq 0,$$

тому задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (13) 7-го порядку найкращим чином у сенсі найменших квадратів однозначно розв'язна:

$$y(n+25) = 2888{,}83 - 0{,}359215\, y(n) + 0{,}244\,605\, y(1+n) -$$
$$- 0{,}0928\,509\, y(2+n) - 0{,}213\,853\, y(3+n) + 0{,}170\,472\, y(4+n) -$$

$$
\begin{aligned}
&-0{,}166244\,y(5+n)+0{,}149\,775\,y(6+n)+0{,}0402\,406\,y(7+n)+\\
&+0{,}0118\,887\,y(8+n)+0{,}0836\,438\,y(9+n)-0{,}0583\,258\,y(10+n)+\\
&+0{,}298\,539\,y(11+n)+0{,}0508\,938\,y(12+n)-0{,}324\,957\,y(13+n)+\\
&+0{,}0864\,673\,y(14+n)+0{,}170\,701\,y(15+n)+0{,}150\,117\,y(16+n)-\\
&-0{,}44\,104\,y(17+n)+0{,}29\,153\,y(18+n)+0{,}0396\,246\,y(19+n)+\\
&+0{,}41\,965\,y(20+n)+0{,}113\,361\,y(21+n)-0{,}39\,698\,y(22+n)-\\
&-0{,}173\,267\,y(23+n)+0{,}967\,565\,y(24+n),
\end{aligned}
$$

причому

$$y(0)=5833, \qquad y(1)=4285, \qquad y(2)=5336, \qquad y(3)=7235,\ldots,y(24)=14\,174.$$

Для оцінки точності отриманого розв'язку задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (13) знайдемо відносне відхилення отриманого розв'язку

$$
\begin{aligned}
&\{5833, 4285, 5336, 7235, 10057, 10155, 9144, 7167, 5572, 3261, 6377,\\
&9084, 12946, 13276, 9012, 6792, 9642, 11833, 15053, 15850, 15292, 11145,\\
&7893, 11476, 14174, 16701, 1, 17265, 16163, 12236, 1, 9948, 74, 11762, 8,\\
&15269, 3, 18093, 5, 18265, 5, 18078, 5, 14290, 2, 12135, 6, 13547, 9, 15171, 8,\\
&16772, 16889, 8, 15916, 13241, 4, 10624, 6, 11656, 12990, 2, 14201, 7, 15067, 3,\\
&14306, 6, 11604, 3, 8967, 12, 9489, 47, 10683, 3, 12347, 3, 12812, 6, 12251, 3,\\
&9367, 55, 6186, 54, 6455, 74, 7055, 24, 8573, 1, 9422, 86, 9021, 23, 6822, 21,\\
&4068, 37, 4169, 13, 5165, 61, 6656, 63, 7894, 87, 7729, 63, 5672, 83, 3241, 28,\\
&3284, 08, 4241, 43, 5811, 16, 7032, 83, 6968, 32, 5391, 11\}
\end{aligned}
$$

від вхідних даних

$$\delta_z := \frac{1}{q+1}\sqrt{\sum_{k=0}^{q}(z(k)-y(k))^2} \approx 175{,}8.$$

Середньоквадратичне для відхилення отриманого розв'язку від вхідних даних при цьому складає

$$\sigma := \frac{1}{q+1}\sqrt{\sum_{k=0}^{q}(z(k)-y(k)-M(\Delta z))^2} \approx 13{,}255,$$

де

$$M(\Delta z) := \frac{1}{q+1}\sum_{k=0}^{q}(z(k)-y(k)) \approx -52{,}8625$$

— середнє відхилення отриманого розв'язку, найкращого у сенсі найменших квадратів, від вхідних даних.

Знайдемо також відносне відхилення лінійної регресії, знайденої за схемою методу найменших квадратів

$$u(k) := \frac{37\,421\,155}{3081} - \frac{3\,591\,235}{79\,079}\,k,$$

від вхідних даних

$$\delta_u := \frac{1}{q+1}\sqrt{\sum_{k=0}^{q}\big(u(k) - y(k)\big)^2} \approx 532{,}438.$$

Визначимомо також відносне відхилення кубічної регресії, одержаної за схемою методу найменших квадратів [10, с. 41]:

$$v(k) := \frac{159\,849\,301}{2\,086\,329\,960}\,k^3 - \frac{38\,778\,620\,471}{2\,434\,051\,620}\,k^2 + \frac{592\,424\,555\,231}{768\,647\,880}\,k + \frac{1\,183\,488\,565}{332\,748}, \quad k \in \mathbb{N},$$

від вхідних даних

$$\delta_v := \frac{1}{q}\sqrt{\sum_{k=0}^{q}\big(v(k) - y(k)\big)^2} \approx 376{,}036.$$

Таким чином, відносне відхилення отриманого розв'язку задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (13) від вхідних даних менше, ніж відносне відхилення як лінійної, так і кубічної регресії, одержаних за схемою методу найменших квадратів.

Зауважимо, що при знаходженні розв'язку задачі про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь, а також при розв'язанні задачі про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків (2) ми не фіксували базисних функцій на відміну від традиційної схеми методу найменших квадратів [13, 14].

Задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (1) за відомою множиною розв'язків (1), а також задача про відновлення задачі Коші для системи різницевих рівнянь (10), рівнозначні до задачі про знаходження автокореляції [16] для системи векторів (1).

Таким чином, задача про відновлення задачі Коші для системи різницево-алгебраїчних рівнянь (6) за відомою множиною розв'язків (2) є узагальненням задачі про знаходження автокореляції [16].

Література

1. А. А. Бойчук, *Краевые задачи для систем разностных уравнений*, Укр. мат. журн., **49**, № 6, 832 – 835 (1997).
2. С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Введение в теорию разностных схем*, ГИФМЛ, Москва (1962).
3. Д. И. Мартынюк, *Лекции по качественной теории разностных уравнений*, Наук. думка, Киев (1972).
4. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1986).
5. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Численные методы решения обратных задач математической физики*, Изд-во ЛКИ, Москва (2009).
6. С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра*, Чебышев. сб., **16**, вып. 1, 52 – 66 (2015).
7. S. M. Chuiko, *A generalized matrix differential-algebraic equation*, J. Math. Sci. (N.Y.), **210**, № 1, 9 – 21 (2015).

8. S. M. Chuiko, *Generalized Green operator of a Noetherian boundary value problem for a matrix differential equation*, Russian Math. (Iz. VUZ), **60**, № 8, 64 – 73 (2016).
9. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).
10. А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, Москва (1977).
11. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, Berlin; Boston, De Gruyter (2016).
12. S. M. Chuiko, *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem*, J. Math. Sci. (N.Y.), **220**, № 5, 591 – 602 (2017).
13. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, Москва (1965).
14. S. M. Chuiko, *On approximate solution of boundary value problems by the least square method*, Nonlinear Oscil. (N. Y.), **11**, № 4, 585 – 604 (2008).
15. S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, Y. V. Kalinichenko, *Boundary value problems for systems of linear difference-algebraic equations*, J. Math. Sci. (N.Y.), **254**, № 2, 318 – 333 (2021).
16. К. Доугерти, *Введение в эконометрику*, ИНФРА-М, Москва (1997).

Одержано 05.07.21,
після доопрацювання — 06.11.21