УДК 517.951.2

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З КРАТНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Ю. П. Апаков

Наманган. інж.-буд. ін-т
вул. Ісламa Карімова, 12, Наманган, 160100, Узбекистан
e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

С. М. Мамажонов

Інститут математики ім. В. І. Романовського АН Республіки Узбекистан
вул. Мірзи Улугбека, 81, Ташкент, 100174, Узбекистан
e-mail: sanjarbekmamajonov@gmail.com

For a fourth-order equation with lowest terms, a boundary-value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of solution of the stated problem is proved by the method of integrals of energy. The solution is expressed in terms of the constructed Green's function. Substantiating the uniform convergence, we establish that a "small denominator" differs from zero.

Для рівняння четвертого порядку з молодшими членами розглянуто одну крайову задачу в прямокутній області. Єдиність розв'язку поставленої задачі доведено методом інтегралів енергії. Розв'язок одержано за допомогою побудованої функції Гріна. При обґрунтуванні рівномірної збіжності встановлено відмінність від нуля "малого знаменника".

Вступ. Вивчення багатьох задач з газової динаміки, теорії пружності, теорії пластин і оболонок зводиться до розгляду задач у диференціальних рівняннях із частинними похідними високих порядків. Для фізичних додатків викликають велику зацікавленість і диференціальні рівняння четвертого порядку [1 – 4]. Монографію [5] присвячено класифікації диференціальних рівнянь із частинними похідними четвертого порядку і розв'язанню крайових задач для таких рівнянь. У [6 – 11] вивчено ряд коректних крайових задач для рівнянь третього порядку з кратними характеристиками. У [12] розглянуто задачу для неоднорідного рівняння четвертого порядку з одним молодшим членом. У [13] розв'язано задачу з початковими і граничними умовами для рівняння коливання балки, в якій балку затиснуто на кінцях у масивні лещата. У [14] вивчено крайову задачу для рівняння високого порядку з кратними характеристиками методом побудови функції Гріна. У [15] за допомогою методу Фур'є досліджено задачу для рівняння четвертого порядку, що має сингулярний коефіцієнт.

Постановка задачі. Розглянемо загальне рівняння четвертого порядку вигляду

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1 U_{xxx} + A_2 U_{xx} + A_3 U_x + A_4 U_y + A_5 U = 0,$$

де $A_i \in R,\ i = \overline{1,5}$. Заміною $U = ue^{-\frac{A_1}{4}x + \frac{A_4}{2}y}$ це рівняння можна звести до рівняння

$$u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

де

$$a_1 = A_2 - \frac{3A_1^2}{8}, \qquad a_2 = A_3 + \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_1A_2}{2}, \qquad a_3 = \frac{A_1^2A_2}{16} - \frac{3A_1^4}{256} - \frac{A_1A_3}{4} + \frac{A_4^2}{4} + A_5.$$

Для цього рівняння в області $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ розглянемо таку задачу.

Задача $\mathbf{A_1}$. Знайти функцію з класу $u(x,y) \in C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega})$, яка задовольняє в області Ω рівняння (1) і такі крайові умови:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad u(p,y) = \psi_2(y),$$

$$u_{xx}(0,y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(p,y) = \psi_4(y), \quad 0 \le y \le q, \tag{3}$$

де $\psi_i(y) \in C^3[0,q],\ i = \overline{1,4},$ — задані функції, причому

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0, \quad i = \overline{1,4}. \tag{4}$$

Зазначимо, що рівняння (1) розглянуто в роботі [12] у випадку $a_1 = a_2 = 0,\ a_3 = -c(x,t)$, а в роботах [13–15] — у випадку $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. В роботах [12–15] розглянуто випадок $\psi_i(x) = 0$ з початковим умовою, відмінною від нуля.

Основні результати.

Теорема єдиності. *Якщо задача* A_1 *має розв'язок, то при виконанні умов* $a_1 \le 0,\ a_3 \ge 0$ *він єдиний.*

Теорема існування. *Якщо функції* $\psi_i(y)$ *належать* $C^3[0,q],\ i = \overline{1,4}$, *і виконуються умови узгодження* $\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0,\ i = \overline{1,4}$, *і* $a_3 \ge 4p^4K^4(2|a_1| + |a_2|)^4 - \dfrac{\pi^2}{q^2}$, *то розв'язок задачі* A_1 *існує (K — відома стала).*

Доведення отриманих результатів. ***Доведення теореми єдиності.*** Припустимо обернене: нехай задача A_1 має два розв'язки $u_1(x,y)$ і $u_2(x,y)$. Тоді функція $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ задовольняє рівняння (1) і однорідні крайові умови. Доведемо, що $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. В області Ω справедлива тотожність

$$uL[u] \equiv 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_xu_{xx} + a_1uu_x + \frac{1}{2}a_2u^2\right) + u_{xx}^2 - a_1u_x^2 + a_3u^2 - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 = 0. \tag{5}$$

Інтегруючи тотожність (5) за областю Ω і враховуючи однорідні крайові умови, отримуємо

$$\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2(x,y)dxdy - a_1\int_0^p\int_0^q u_x^2(x,y)dxdy + a_3\int_0^p\int_0^q u^2(x,y)dxdy + \int_0^p\int_0^q u_y^2(x,y)dxdy = 0,$$

звідси $u(x,y) \equiv 0,\ (x,y) \in \bar{\Omega}$.

Теорему єдиності доведено.

Доведення теореми існування. Розв'язок задачі A_1 шукаємо у вигляді

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{6}$$

Підставляючи (6) в (1), розділяючи змінні відносно $X(x)$, $Y(y)$ і враховуючи граничні умови (2), (3), отримуємо такі задачі:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} X^{IV}(x) + a_1 X''(x) + a_2 X'(x) + (a_3 + \lambda) X(x) = 0, \\ X(0) = \psi_{1n}, \quad X(p) = \psi_{2n}, \quad X''(0) = \psi_{3n}, \quad X''(p) = \psi_{4n}, \end{cases} \tag{8}$$

де λ — параметр розділення, $\psi_{in} = \dfrac{2}{q}\displaystyle\int_0^q \psi_{in}(\eta)\sin\dfrac{\pi n}{q}\,\eta\,d\eta,\ i = \overline{1,4}.$

Відомо [16], що нетривіальний розв'язок задачі (7) існує тільки при $\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{q}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$ Ці числа є власними значеннями задачі (7), а відповідні їм власні функції мають вигляд

$$Y_n(y) = \sin\frac{\pi n}{q}\,y, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Після розділення змінних ми отримали задачу

$$\begin{cases} X^{IV}(x) + a_1 X''(x) + a_2 X'(x) + a_{3n} X(x) = 0, \\ X(0) = \psi_{1n}, \quad X(p) = \psi_{2n}, \quad X''(0) = \psi_{3n}, \quad X''(p) = \psi_{4n}, \end{cases} \tag{10}$$

де $a_{3n} = a_3 + \lambda_n$.

Введемо позначення

$$V(x) = X(x) - \rho(x), \tag{11}$$

де

$$\rho_n(x) = \psi_{1n} + \left(\frac{\psi_{2n} - \psi_{1n}}{p} - \frac{2\psi_{3n} + \psi_{4n}}{6}p\right)x + \frac{\psi_{3n}}{2}x^2 + \frac{\psi_{4n} - \psi_{3n}}{6p}\,x^3. \tag{12}$$

Підставляючи (10), (11) у (8), одержуємо задачу

$$\begin{cases} V^{IV} + a_{3n} V = a_{3n} f(x) - a_1 V'' - a_2 V', \\ V(0) = V(p) = V''(0) = V''(p) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$f_n(x) = -\frac{a_1}{a_{3n}}\psi_{3n} - \frac{a_1}{a_{3n}}\,\frac{\psi_{4n} - \psi_{3n}}{p}x - \frac{a_2}{a_{3n}}\,\frac{\psi_{2n} - \psi_{1n}}{p} +$$

$$+\frac{a_2}{a_{3n}}\,\frac{2\psi_{3n}+\psi_{4n}}{6}p-\frac{a_2}{a_{3n}}\psi_{3n}x-\frac{a_2}{a_{3n}}\,\frac{\psi_{4n}-\psi_{3n}}{2p}x^2-\psi_{1n}-$$

$$-\left(\frac{\psi_{2n}-\psi_{1n}}{p}-\frac{2\psi_{3n}+\psi_{4n}}{6}p\right)x-\frac{\psi_{3n}}{2}x^2-\frac{\psi_{4n}-\psi_{3n}}{6p}x^3.$$

Згідно з теоремою Гільберта розв'язок шукаємо таким чином:

$$V_n(x)=a_{3n}\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi-\int\limits_0^p G_n(x,\xi)\left(a_1V_n''(\xi)+a_2V_n'(\xi)\right)d\xi,$$

тут $G_n(x,\xi)$ — функція Гріна для задачі (12):

$$G_n(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\left\{\begin{array}{l}
[\cos(\mu_np)\,\mathrm{sh}(\mu_np)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n(\xi-p)\right)-\right.\\
\qquad\left.-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)+\\
\qquad+\sin\left(\mu_np\right)\mathrm{ch}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n(\xi-p)\right)+\right.\\
\qquad\left.+\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)]\cos\left(\mu_nx\right)\mathrm{sh}\left(\mu_nx\right)+\\
\qquad+[\sin\left(\mu_np\right)\mathrm{ch}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n(\xi-p)\right)-\right.\\
\qquad\left.-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)-\\
\qquad-\cos\left(\mu_np\right)\mathrm{sh}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n(\xi-p)\right)+\right.\\
\qquad\left.+\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)]\sin\left(\mu_nx\right)\mathrm{ch}\left(\mu_nx\right),\quad 0\le x<\xi,\\
[\cos\left(\mu_np\right)\mathrm{sh}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n\xi\right)-\sin\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n\xi\right)\right)+\\
\qquad+\sin\left(\mu_np\right)\mathrm{ch}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n\xi\right)+\right.\\
\qquad\left.+\sin\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n\xi\right)\right)]\cos\left(\mu_n\left(x-p\right)\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n\left(x-p\right)\right)+\\
\qquad+[\sin\left(\mu_np\right)\mathrm{ch}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n\xi\right)-\sin\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n\xi\right)\right)-\\
\qquad-\cos\left(\mu_np\right)\mathrm{sh}\left(\mu_np\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{sh}\left(\mu_n\xi\right)+\right.\\
\qquad\left.+\sin\left(\mu_n\xi\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n\xi\right)\right)]\sin\left(\mu_n\left(x-p\right)\right)\mathrm{ch}\left(\mu_n\left(x-p\right)\right),\quad \xi<x\le p,
\end{array}\right.$$

де $\Delta=\cos(2\mu_np)-\mathrm{ch}(2\mu_np)$. Функція $G_n(x,\xi)$ має такі властивості:

$$\frac{\partial^4G_{in}(x,\xi)}{\partial x^4}+a_{3n}G_{in}(x,\xi)=0,\quad i=1,2,$$

$$G_{1n}(0,\xi)=G_{2n}(p,\xi)=G_{1nxx}(0,\xi)=G_{2nxx}(p,\xi)=0,$$

$$G_{2n}(\xi,\xi)-G_{1n}(\xi,\xi)=0,\qquad G_{2nx}(\xi,\xi)-G_{1nx}(\xi,\xi)=0,$$

$$G_{2nxx}(\xi,\xi)-G_{1nxx}(\xi,\xi)=0,\qquad G_{2nxxx}(\xi,\xi)-G_{1nxxx}(\xi,\xi)=1. \tag{14}$$

Запишемо визначник Δ у вигляді

$$\Delta=-e^{2\mu_np}\left(\frac{1+e^{-4\mu_np}}{2}-\cos\left(2\mu_np\right)e^{-2\mu_np}\right).$$

Якщо введемо позначення $\bar{\Delta} = \dfrac{1+e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos\left(2\mu_n p\right) e^{-2\mu_n p}$, то отримаємо

$$\Delta = -e^{2\mu_n p}\bar{\Delta}.$$

Припустимо, що $\bar{\Delta} = 0$. Тоді маємо

$$2\cos\left(2\mu_n p\right) = e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p}.$$

Проте, оскільки

$$e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p} > 2, \quad \mu_n p > 0,$$

і

$$2\cos\left(2\mu_n p\right) \le 2,$$

одержуємо суперечність. Отже,

$$\bar{\Delta} > 0.$$

Враховуючи, що $\Delta = -e^{2\mu_n p}\bar{\Delta}$, маємо $\Delta \neq 0$.

Щоб знайти мінімальне значення $\bar{\Delta}$, підставимо найбільше значення $\cos(2\mu_n p)$, яке дорівнює 1. Тоді отримаємо нерівність

$$\bar{\Delta} \ge \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\mu_n p}\right)^2.$$

Права частина цієї нерівності зростає при $n \to \infty$. Отже, $\bar{\Delta}$ набуває мінімальних значень при $n = 1$:

$$\min\left|\bar{\Delta}\right| = \delta = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{2}\sqrt[4]{a_3+\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}p}\right)^2 > 0. \tag{15}$$

Інтегруючи частинами другий інтеграл в (13), маємо

$$V_n(x) = a_{3n}\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi + \int\limits_0^p \left(a_2 G_{n\xi}(x,\xi) - a_1 G_{n\xi\xi}(x,\xi)\right)V_n(\xi)d\xi. \tag{16}$$

Для зручності введемо позначення

$$V_{0n}(x) = a_{3n}\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi \qquad \text{і} \qquad \bar{G}_n(x,\xi) = a_2 G_{n\xi}(x,\xi) - a_1 G_{n\xi\xi}(x,\xi).$$

Тоді (15) набуває вигляду

$$V_{0n}(x) = V_n(x) - \int\limits_0^p \bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi \tag{17}$$

і є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду. Легко показати, що інтегральне рівняння (17) має розв’язок.

Оцінимо $G_n(x,\xi)$:

$$|G_n(x,\xi)| \le \frac{e^{\mu_n(\xi+x)}}{2\mu_n^3 e^{2\mu_n p}\left|\bar{\Delta}\right|}.$$

Вираз $e_n^{\mu}(\xi+x)$ набуває максимального значення при $x=\xi=p$. Тоді оцінка функції Гріна має вигляд

$$|G_n(x,\xi)| \le \frac{K}{\mu_n^3},$$

тут $K=\dfrac{1}{2\left|\bar{\Delta}\right|}$. Враховуючи (14), одержуємо $K \le \dfrac{1}{2\delta}$.

Знайдемо першу і другу похідні $G_n(x,\xi)$ по ξ. Після деяких обчислень одержимо

$$|G_{n\xi}(x,\xi)| \le \frac{K}{\mu_n^2}, \qquad |G_{n\xi\xi}(x,\xi)| \le \frac{2K}{\mu_n}.$$

Тоді маємо оцінку для $\bar{G}_n(x,\xi)=a_2G_{n\xi}(x,\xi)-a_1G_{n\xi\xi}(x,\xi)$ у вигляді

$$\left|\bar{G}_n\right| \le |a_1|\,|G_{n\xi\xi}|+|a_2|\,|G_{n\xi}| \le \left(\frac{2|a_1|}{\mu_n}+\frac{|a_2|}{\mu_n^2}\right)K.$$

Тепер знайдемо розв'язок рівняння (16) за допомогою резольвенти

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int\limits_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi, \tag{18}$$

де

$$R_n(x,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi), \qquad \bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int\limits_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds, \quad m=2,3,\ldots.$$

Оцінимо розв'язок (17). Із

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_{1n}(x,\xi)+\bar{G}_{2n}(x,\xi)+\ldots+\bar{G}_{mn}(x,\xi)+\ldots$$

отримуємо оцінку

$$|R_n(x,\xi)| \le \left|\bar{G}_{1n}(x,\xi)\right|+\left|\bar{G}_{2n}(x,\xi)\right|+\ldots+\left|\bar{G}_{mn}(x,\xi)\right|+\ldots.$$

Для правої частини цієї нерівності складемо мажоруючий ряд. Враховуючи

$$J=\max_{\substack{x\in[0,p]\\ n\in N}}\left|\bar{G}_n(x,\xi)\right|=\left(\frac{2|a_1|}{\mu_1}+\frac{|a_2|}{\mu_1^2}\right)K,$$

маємо

$$\left|\bar{G}_{1n}(x,\xi)\right| \le \left|\bar{G}_n(x,\xi)\right| \le \left(\frac{2|a_1|}{\mu_n}+\frac{|a_2|}{\mu_n^2}\right)K \le J,$$

$$\left|\bar{G}_{2n}(x,\xi)\right| \le \int\limits_0^p \left|\bar{G}_{1n}(x,s)\right| \left|\bar{G}_{1n}(s,\xi)\right| ds \le J^2 p,$$

$$\left|\bar{G}_{3n}(x,\xi)\right| \le \int\limits_0^p \left|\bar{G}_{1n}(x,s)\right| \left|\bar{G}_{2n}(s,\xi)\right| ds \le J^3 p^2,$$

. . . .

$$\left|\bar{G}_{mn}(x,\xi)\right| \le \int\limits_0^p \left|\bar{G}_{1n}(x,s)\right| \left|\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)\right| ds \le J^m p^{m-1}, \quad i = 2,3,\ldots,$$

. . . .

Тоді мажоруючий ряд набуває вигляду

$$\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{\infty}(Jp)^m.$$

Якщо справедлива нерівність $Jp < 1$, то цей ряд є нескінченно спадною геометричною прогресією.

Оскільки

$$J = \max_{\substack{x\in[0,p]\\ n\in N}} \left|\bar{G}_n(x,\xi)\right| = \left(\frac{2|a_1|}{\mu_1} + \frac{|a_2|}{\mu_1^2}\right)K, \qquad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{a_3 + \left(\frac{\pi}{q}\right)^2},$$

то для того щоб була справедливою нерівність $Jp < 1$, має виконуватися співвідношення

$$\left(\frac{2|a_1|}{\mu_1} + \frac{|a_2|}{\mu_1^2}\right)K < \frac{1}{p}.$$

Після деяких перетворень маємо умову на коефіцієнти рівняння (1):

$$a_3 > 4\left(2|a_1|Kp + \frac{|a_2|}{2|a_1|}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{q}\right)^2.$$

У цьому випадку для резольвенти знаходимо оцінку

$$\left|R_n(x,\xi)\right| \le \frac{J}{1 - Jp}.$$

Враховуючи умови (4), інтегруємо частинами ψ_{in} три рази:

$$\psi_{in} = -\frac{q^3}{\pi^3 n^3}\,\frac{2}{q}\int\limits_0^q \psi_i{}'''(\eta)\cos\frac{\pi n}{q}\,\eta d\eta = -\left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{\psi'''_{in}}{n^3}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Звідси отримуємо такі оцінки:

$$|\psi_{in}| \le \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\psi'''_{in}|}{n^3}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{19}$$

Тоді, інтегруючи $V_{0n}(x),$ після деяких обчислень одержуємо оцінку

$$|V_{0n}(x)| \leq \frac{a_{3n}}{\mu_n^4 n^3} H_0, \tag{20}$$

де

$$H_0 = |B_{01n}(x)| \left|\psi_{1n}'''\right| + |B_{02n}(x)| \left|\psi_{2n}'''\right| + |B_{03n}(x)| \left|\psi_{3n}'''\right| + |B_{04n}(x)| \left|\psi_{4n}'''\right| < \infty,$$

$$|B_{0in}(x)| < \infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Згідно з (18), (19) маємо

$$|V_n(x)| \leq |V_{0n}(x)| + \int\limits_0^p |R_n(x,\xi)| \, |V_{0n}(\xi)| \, d\xi \leq \frac{a_{3n}}{\mu_n^4 n^3} \frac{H_0}{1 - Jp}.$$

Завдяки (6) і (9) розв'язок задачі A_1 має вигляд

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) + \rho_n(x)) \sin \frac{\pi n}{q} y. \tag{21}$$

Перевіримо цей розв'язок на збіжність:

$$|u(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|V_n(x)| + |\rho_n(x)|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{3n}}{\mu_n^4 n^3} \frac{H_0}{1 - Jp} + \frac{T_0}{n^3} \right) < \infty;$$

тут

$$\mu_n = O\big(n^{\frac{1}{2}}\big), \quad a_{3n} = O\left(n^2\right), \quad \frac{a_{3n}}{\mu_n^4 n^3} = O\left(n^{-3}\right), \quad |\rho_n(x)| \leq \frac{T_0}{n^3}$$

і

$$T_0 = \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \left(\left|\frac{p-x}{p}\right| |\psi_{1n}'''| + \left|\frac{x}{p}\right| |\psi_{2n}'''| + \left|\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6p} - \frac{2px}{6}\right| |\psi_{3n}'''| + \left|\frac{x^3}{6p} - \frac{px}{6}\right| |\psi_{4n}'''| \right).$$

Покажемо можливість диференціювання (21) за змінною $x.$ Маємо

$$V_n'(x) = {V_{0n}}'(x) + \int\limits_0^p R_{nx}(x,\xi) V_{0n}(\xi) d\xi.$$

Після деяких обчислень знаходимо оцінки

$$\left|V_{0n}'(x)\right| \leq \frac{a_{3n}}{\mu_n^3 n^3} H_1, \tag{22}$$

$$|R_{nx}(x,\xi)| \leq \frac{2J\mu_n}{1 - Jp}, \tag{23}$$

де

$$H_1 = |B_{11n}(x)| \left|\psi_{1n}'''\right| + |B_{12n}(x)| \left|\psi_{2n}'''\right| + |B_{13n}(x)| \left|\psi_{3n}'''\right| + |B_{14n}(x)| \left|\psi_{4n}'''\right| < \infty,$$

$$|B_{1in}(x)| < \infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Завдяки (20), (22) і (23) отримуємо оцінку

$$\left|V_n'(x)\right| \le \left|V_{0n}{}'(x)\right| + \int\limits_0^p |R_{nx}(x,\xi)|\,|V_{0n}(\xi)|\,d\xi \le$$

$$\le \frac{a_{3n}}{\mu_n^3 n^3}\,\frac{H_1 + (2H_0 - H_1)\,Jp}{1 - Jp}.$$

Тоді, враховуючи

$$\left|\rho_n{}'(x)\right| \le \frac{T_1}{n^3},$$

де

$$T_1 = \left(\frac{\pi}{q}\right)^3 \left(\frac{1}{p}\left|\psi_{1n}'''\right| + \frac{1}{p}\left|\psi_{2n}'''\right| + \left|x - \frac{x^2}{2p} - \frac{2p}{6}\right|\left|\psi_{3n}'''\right| + \left|\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{6}\right|\left|\psi_{4n}'''\right|\right),$$

маємо оцінку

$$|u_x(x,y)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|V_n'(x)\right| + \left|\rho_n{}'(x)\right|\right) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{3n}}{\mu_n^3 n^3}\,\frac{H_1 + (2H_0 - H_1)\,Jp}{1 - Jp} + \frac{T_1}{n^3}\right) < \infty,$$

де $\dfrac{a_{3n}}{\mu_n^3 n^3} = O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right)$.

Покажемо рівномірну збіжність $u_{xx}(x,y)$. Після деяких обчислень знаходимо оцінку

$$\left|V_{0n}{}''(x)\right| \le \frac{a_{3n}}{\mu_n^2 n^3} H_2, \tag{24}$$

де

$$H_2 = |B_{21n}(x)|\left|\psi_{1n}'''\right| + |B_{22n}(x)|\left|\psi_{2n}'''\right| + |B_{23n}(x)|\left|\psi_{3n}'''\right| + |B_{24n}(x)|\left|\psi_{4n}'''\right|,$$

$$|B_{2in}(x)| < \infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Функція Гріна має розрив за змішаними частинними похідними третього порядку. Тому спочатку обчислимо $\bar{G}_{mnxx}(x,\xi)$, $m = 2,3,\ldots$. Для цього, враховуючи

$$G_{2n\xi\xi x}(x,x) - G_{1n\xi\xi x}(x,x) = 1,$$

обчислюємо

$$\bar{G}_{2nxx}(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^x \left(a_2 G_{2n\xi x}(x,\xi) - a_1 G_{2n\xi\xi x}(x,\xi)\right)\bar{G}_1(s,\xi)ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^p \left(a_2 G_{1n\xi x}(x,\xi) - a_1 G_{1n\xi\xi x}(x,\xi)\right)\bar{G}_1(s,\xi)ds\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \Big(a_2\left(G_{2n\xi x}(x,x) - G_{1n\xi x}(x,\xi)\right) - \\ &\quad - a_1\left(G_{2n\xi\xi x}(x,x) - a_1 G_{1n\xi\xi x}(x,\xi)\right)\Big)\bar{G}_{1n}(x,\xi) + \\ &\quad + \int\limits_0^x \left(a_2 G_{2n\xi xx}(x,\xi) - a_1 G_{2n\xi\xi xx}(x,\xi)\right)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds + \\ &\quad + \int\limits_x^p \left(a_2 G_{1n\xi xx}(x,\xi) - a_1 G_{1n\xi\xi xx}(x,\xi)\right)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds = \\ &= -a_1\bar{G}_{1n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxx}(x,\xi)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds. \end{aligned}$$

Отже,

$$\bar{G}_{2nxx}(x,\xi) = -a_1\bar{G}_{1n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxx}(x,\xi)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds.$$

Далі обчислимо

$$\bar{G}_{3nxx}(x,\xi) = -a_1\bar{G}_{2n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxx}(x,\xi)\bar{G}_{2n}(s,\xi)ds.$$

Продовжуючи процес, одержуємо

$$\bar{G}_{mnxx}(x,\xi) = -a_1\bar{G}_{(m-1)n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxx}(x,\xi)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds.$$

Тепер для $R_{nxx}(x,\xi)$ знаходимо оцінку

$$|R_{nxx}(x,\xi)| \le \frac{2\,|a_2|\,K}{(1-Jp)e^{4\mu_n p}} + \frac{2\mu_n^2 + |a_1|}{1-Jp}J. \tag{25}$$

Завдяки (20), (24) і (25) отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} &\left|V_n''(x)\right| \le \left|V_{0n}''(x)\right| + \int\limits_0^p |R_{nxx}(x,\xi)|\,|V_{0n}(\xi)|\,d\xi \le \\ &\qquad \le \frac{a_{3n}}{\mu_n^2 n^3}\left(H_2 + \left(\frac{2|a_2|K}{(1-Jp)e^{4\mu_n p}} + \left(2 + \frac{|a_1|}{\mu_n^2}\right)\frac{J}{1-Jp}\right)H_0\right). \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи

$$\left|\rho_n''(x)\right| \le \frac{T_2}{n^3}, \qquad T_2 = \left(\left|1-\frac{x}{p}\right|\left|\psi_{3n}'''\right| + \left|\frac{x}{p}\right|\left|\psi_{4n}'''\right|\right)\left(\frac{\pi}{q}\right)^3,$$

здобуваємо оцінку

$$
\begin{aligned}
|u_{xx}(x,y)| &\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|V_n''(x)\right| + \left|\rho_n{}''(x)\right|\right) \le \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{3n}}{\mu_n^2 n^3}\left(H_2 + \left(\frac{2\,|a_2|\,K}{(1-Jp)\,e^{4\mu_n p}} + \left(2 + \frac{|a_1|}{\mu_n^2}\right)\frac{J}{1-Jp}\right)H_0\right) + \frac{T_2}{n^3}\right) < \infty,
\end{aligned}
$$

де $\dfrac{a_{3n}}{\mu_n^2 n^3} = O\big(n^{-2}\big)$.

Покажемо рівномірну збіжність $u_{xxx}(x,y)$. Після деяких обчислень знаходимо оцінку

$$\left|V_{0n}'''(x)\right| \le \frac{a_{3n}}{\mu_n n^3} H_3, \tag{26}$$

де

$$H_3 = |B_{31n}(x)|\left|\psi_{1n}'''\right| + |B_{32n}(x)|\left|\psi_{2n}'''\right| + |B_{33n}(x)|\left|\psi_{3n}'''\right| + |B_{34n}(x)|\left|\psi_{4n}'''\right| < \infty,$$

$$|B_{3in}(x)| < \infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Функція Гріна має розрив за змішаними частинними похідними третього порядку. Тому спочатку обчислимо $\bar{G}_{mnxxx}(x,\xi),\ m = 2,3,\ldots.$ Для цього, враховуючи

$$G_{2n\xi xx}(x,x) - G_{1n\xi xx}(x,x) = -1,$$

обчислюємо

$$
\begin{aligned}
\bar{G}_{2nxxx}(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(&\int_0^x \left(a_2 G_{2n\xi xx}(x,\xi) - a_1 G_{2n\xi\xi xx}(x,\xi)\right)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds + \\
&+ \int_x^p \left(a_2 G_{1n\xi xx}(x,\xi) - a_1 G_{1n\xi\xi xx}(x,\xi)\right)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds\Bigg) = \\
= (a_2\,&(G_{2n\xi xx}(x,x) - G_{1n\xi xx}(x,\xi)) - \\
&- a_1\,(G_{2n\xi\xi xx}(x,x) - a_1 G_{1n\xi\xi xx}(x,\xi)))\,\bar{G}_{1n}(x,\xi) + \\
&+ \int_0^x \left(a_2 G_{2n\xi xxx}(x,\xi) - a_1 G_{2n\xi\xi xxx}(x,\xi)\right)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds + \\
&+ \int_x^p \left(a_2 G_{1n\xi xxx}(x,\xi) - a_1 G_{1n\xi\xi xxx}(x,\xi)\right)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds = \\
= -a_2\bar{G}_{1n}(x,\xi) &+ \int_0^p \bar{G}_{1nxxx}(x,\xi)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$\bar{G}_{2nxxx}(x,\xi) = -a_2\bar{G}_{1n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxxx}(x,\xi)\bar{G}_{1n}(s,\xi)ds.$$

Далі обчислимо

$$\bar{G}_{3nxxx}(x,\xi) = -a_2\bar{G}_{2n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxxx}(x,\xi)\bar{G}_{2n}(s,\xi)ds.$$

Продовжуючи процес, отримуємо

$$\bar{G}_{mnxxx}(x,\xi) = -a_2\bar{G}_{(m-1)n}(x,\xi) + \int\limits_0^p \bar{G}_{1nxxx}(x,\xi)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds.$$

Тепер для $R_{nxxx}(x,\xi)$ знаходимо оцінку

$$|R_{nxxx}(x,\xi)| \leq \frac{|a_2| + 4\mu_n^3}{1 - Jp}J. \tag{27}$$

Завдяки (20), (26) і (27) одержуємо оцінку

$$\left|V_n'''(x)\right| \leq \left|V_{0n}'''(x)\right| + \int\limits_0^p |R_{nxxx}(x,\xi)|\,|V_{0n}(\xi)|\,d\xi \leq$$

$$\leq \frac{a_{3n}}{\mu_n n^3}\left(H_3 + \left(4 + \frac{|a_2|}{\mu_n^3}\right)\frac{JH_0p}{1 - Jp}\right).$$

Тоді з урахуванням

$$\left|\rho_n''(x)\right| \leq \frac{T_3}{n^3}, \quad T_3 = \left(\frac{1}{p}\left|\psi_{3n}'''\right| + \frac{1}{p}\left|\psi_{4n}'''\right|\right)\left(\frac{\pi}{q}\right)^3$$

маємо оцінку

$$|u_{xxx}(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|V_n'''(x)\right| + \left|\rho_n'''(x)\right|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{3n}}{\mu_n n^3}\left(H_3 + \left(4 + \frac{|a_2|}{\mu_n^3}\right)\frac{JH_0p}{1 - Jp}\right) + \frac{T_3}{n^3}\right) < \infty,$$

де $\frac{a_{3n}}{\mu_n n} = O\big(n^{-\frac{3}{2}}\big)$.

Тепер покажемо рівномірну збіжність $u_{xxxx}(x,y)$:

$$V_{0n}{}^{(4)}(x) = a_{3n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^x G_{2nxxx}(x,\xi)f_n(\xi)d\xi + \int\limits_x^p G_{1nxxx}(x,\xi)f_n(\xi)d\xi\right) =$$

$$= a_{3n}\left(G_{2nxxx}(x,x) - G_{1nxxx}(x,x)\right) f_n(x) + a_{3n}\int\limits_0^x G_{2nxxxx}(x,\xi) f_n(\xi)d\xi +$$

$$+ a_{3n}\int\limits_x^p G_{1nxxxx}(x,\xi) f_n(\xi)d\xi = a_{3n} f_n(x) + a_{3n}\int\limits_0^p G_{nxxxx}(x,\xi) f_n(\xi)d\xi.$$

А тому

$$V_{0n}{}^{(4)}(x) = a_{3n} f_n(x) + a_{3n}\int\limits_0^p G_{nxxxx}(x,\xi) f_n(\xi)d\xi. \tag{28}$$

Враховуючи (19), маємо

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^3}\left\{\left|\frac{a_2}{a_{3n}p} + \frac{x-p}{p}\right| \left|\psi_{1n}'''\right| + \left|\frac{a_2}{a_{3n}p} + \frac{x}{p}\right| \left|\psi_{2n}'''\right| +\right.$$

$$+\left|\frac{a_1 x}{a_{3n}p} - \frac{a_1}{a_{3n}} + \frac{a_2 p}{3a_{3n}} - \frac{a_2 x}{a_{3n}} + \frac{a_2 x^2}{2a_{3n}p} + \frac{px}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6p}\right| \left|\psi_{3n}'''\right| +$$

$$\left.+\left|\frac{a_2 p}{6a_{3n}} - \frac{a_1 x}{a_{3n}p} - \frac{a_2 x^2}{2a_{3n}p} + \frac{px}{6} - \frac{x^3}{6p}\right| \left|\psi_{4n}'''\right|\right\}\left(\frac{q}{\pi}\right)^3.$$

Інтегруючи частинами (28), одержуємо оцінку

$$\left|V_{0n}{}^{(4)}(x)\right| \le \frac{a_{3n}}{n^3} H_4, \tag{29}$$

де

$$H_4 = |B_{41n}(x)| \left|\psi_{1n}'''\right| + |B_{42n}(x)| \left|\psi_{2n}'''\right| + |B_{43n}(x)| \left|\psi_{3n}'''\right| + |B_{44n}(x)| \left|\psi_{4n}'''\right| < \infty,$$

$$|B_{4in}(x)| < \infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Тепер для $R_{nxxxx}(x,\xi)$ знаходимо оцінку

$$|R_{nxxxx}(x,\xi)| \le \frac{4\mu_n^4 J}{1 - Jp}. \tag{30}$$

Завдяки (20), (29) і (28) маємо

$$\left|V_n^{(4)}(x)\right| \le \left|V_{0n}^{(4)}(x)\right| + \int\limits_0^p |R_{nxxxx}(x,\xi)|\,|V_{0n}(\xi)|\,d\xi \le \frac{a_{3n}}{n^3}\left(H_4 + \frac{4Jp}{1-Jp}H_0\right).$$

Тоді

$$|u_{xxxx}(x,y)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|V_n^{(4)}(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{3n}}{n^3}\left(H_4 + \frac{4Jp}{1-Jp}H_0\right).$$

Враховуючи

$$H_0 = |B_{01n}(x)| \left|\psi_{1n}'''\right| + |B_{02n}(x)| \left|\psi_{2n}'''\right| + |B_{03n}(x)| \left|\psi_{3n}'''\right| + |B_{04n}(x)| \left|\psi_{4n}'''\right|,$$

$$H_4 = |B_{41n}(x)| \left|\psi'''_{1n}\right| + |B_{42n}(x)| \left|\psi'''_{2n}\right| + |B_{43n}(x)| \left|\psi'''_{3n}\right| + |B_{44n}(x)| \left|\psi'''_{4n}\right|,$$

і ввівши позначення

$$N_i = \left(\frac{a_3}{n^2} + \left(\frac{\pi}{q}\right)^2\right)\left(|B_{4in}(x)| + \frac{4Jp}{1-Jp}\,|B_{0in}(x)|\right), \quad i = \overline{1,4},$$

отримуємо

$$|u_{xxxx}(x,y)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(N_1 \left|\psi'''_{1n}\right| \frac{1}{n} + N_2 \left|\psi'''_{2n}\right| \frac{1}{n} + N_3 \left|\psi'''_{3n}\right| \frac{1}{n} + N_4 \left|\psi'''_{4n}\right| \frac{1}{n}\right).$$

Для того щоб показати збіжність правої частини цієї нерівності, використовуємо нерівності Коші – Буняковського і Бесселя:

$$|u_{xxxx}(x,y)| \le N_1 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\psi'''_{1n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} + N_2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\psi'''_{2n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} +$$

$$+ N_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\psi'''_{3n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} + N_4 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\psi'''_{4n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \le$$

$$\le N_1 \sqrt{\frac{2}{q}\|\psi'''_{1n}\|^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} + N_2 \sqrt{\frac{2}{q}\|\psi'''_{2n}\|^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} +$$

$$+ N_3 \sqrt{\frac{2}{q}\|\psi'''_{3n}\|^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} + N_4 \sqrt{\frac{2}{q}\|\psi'''_{4n}\|^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty,$$

де

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\psi'''_{in}\right|^2 \le \frac{2}{q} \left\|\psi'''_i(y)\right\|^2_{L_2[0,q]}, \quad \overline{i = 1,4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Враховуючи нерівність

$$|u_{yy}(x,y)| \le |u_{xxxx}(x,y)| + |a_1||u_{xx}(x,y)| + |a_2||u_x(x,y)| + |a_3||u(x,y)|,$$

приходимо до висновку, що й u_{yy} теж збігається.

Таким чином, теорему існування доведено.

Литература

1. М. В. Турбин, *Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел – Балкли*, Вест. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ.-мат., № 2, 246 – 257 (2013).
2. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
3. С. А. Шабров, *Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка*, Вест. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ.-мат., № 2, 168 – 179 (2015).
4. D. J. Benney, J. C. Luke, *Interactions of permanent waves of finite amplitude*, J. Math. Phys., **43**, 309 – 313 (1964).
5. Т. Д. Джураев, А. Сопуев, *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*, ФАН, Ташкент (2000).

6. T. D. Dzhuraev, Yu. P. Apakov, *On the theory of the third-order equation with multiple characteristics containing the second time derivative*, Ukr. Math. J., **62**, № 1, 43 – 55 (2010).
7. Yu. P. Apakov, S. Rutkauskas, *On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics*, Nonlinear Anal.: Model. Control., **16**, № 3, 255 – 269 (2011).
8. Yu. P. Apakov, *On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics*, Ukr. Math. J., **64**, № 1, 1 – 12 (2012).
9. Yu. P. Apakov, B. Yu. Irgashev, *Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation*, Ukr. Math. J., **66**, № 10, 1475 – 1490 (2015).
10. Yu. P. Apakov, A. Kh. Zhuraev, *Third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics*, Ukr. Math. J., **70**, № 9, 1467 – 1476 (2019).
11. Yu. P. Apakov, *On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation*, Lobachevskii J. Math., **41**, № 9, 1754 – 1761 (2020).
12. Д. Аманов, М. Б. Мурзамбетова, *Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом*, Вест. Удмурт. ун-та. Мат., мех., компьют. науки, вып. 1, 3 – 10 (2013).
13. К. Б. Сабитов, *Колебания балки с заделанными концами*, Вест. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки, **19**, № 2, 311 – 324 (2015).
14. Б. Ю. Иргашев, *Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами*, Бюл. Ин-та математики, № 6, 23 – 30 (2019).
15. A. K. Urinov, M. S. Azizov, *Boundary-value problems for a fourth order partial equation with an unknown right-hand part*, Lobachevskii J. Math., **42**, № 3, 632 – 640 (2021).
16. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).

Одержано 13.07.21