УДК 517.956

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОГО РІВНЯННЯ ЗМІШАНОГО ТИПУ З ХАРАКТЕРИСТИЧНОЮ ЛІНІЄЮ ЗМІНИ ТИПУ

У. І. Балтаєва

Хорезм. Академія Ма'муна, Хива, 220900, Узбекистан
Ургенч. держ. ун-т, Ургенч, 220100, Узбекистан
e-mail: umida_baltayeva@mail.ru

The unique solvability of the boundary-value problem for a loaded third-order integro-differential equation with parabolic-hyperbolic operator is proved. By using the method of integral equations, we prove the existence and uniqueness of a solution of boundary-value problems.

Доведено однозначну розв'язність крайової задачі для навантаженого інтегро-диференціального рівняння третього порядку параболо-гіперболічним оператором. Методом інтегральних рівнянь доведено існування і єдиність розв'язку крайових задач.

Крайові задачі для рівнянь змішаного та змішано-складеного типів вперше сформульовано й досліджено в роботах А. В. Біцадзе, М. С. Салахітдінова, Т. Д. Жураєва, Р. Б. Девіса та ін. Здобуті результати інтенсивно розвивалися в роботах [1 – 5], де досліджено ряд крайових задач для рівнянь третього порядку, що містять у головній частині змішані оператори параболо-гіперболічного та еліптико-параболічного типів.

При вивченні рівняння змішаного типу дослідники головним чином обмежувалися розглядом модельних рівнянь того чи іншого типів. Це пояснюється тим, що аналітичний метод дослідження цих рівнянь і відповідних їм крайових задач дозволяє подати загальний розв'язок у вигляді суми функцій. Таке зображення використовується, коли рівняння складаються з добутків переставних диференціальних операторів [2].

Відмова від використання зображення загального розв'язку рівняння дозволяє розв'язувати крайові задачі для узагальнених рівнянь, що складаються з добутків непереставних диференціальних операторів. Ця обставина є основою дослідження цієї роботи.

Крайові задачі для навантажених рівнянь [6] змішаного і змішано-складеного типів третього порядку вивчено порівняно мало. Це пов'язано, перш за все, з відсутністю зображення загального розв'язку для таких рівнянь; з іншого боку, такі задачі зводяться до маловивчених інтегральних рівнянь із зсувом. Відзначимо роботи В. А. Водахової [7], де вивчено крайові задачі для псевдопараболічного рівняння третього порядку. У роботі І. Н. Ланіна [8] доведено однозначну розв'язність задач для рівняння змішаного типу з навантаженим доданком у параболічній області. У роботах В. А. Єлєєва [9] і В. А. Нахушевої [10] досліджено коректність крайових задач для рівняння третього порядку з кратними характеристиками, а також навантажені рівняння змішаного типу з навантаженими доданками. У роботах В. А. Алієва і А. В. Дзарахохова [11] розглянуто задачу типу Трикомі для рівняння змішаного типу третього порядку у випадку, коли навантажена частина містить слід і похідну від шуканої функції.

Крайові задачі для навантажених інтегро-диференціальних рівнянь змішаного типу зі змінними коефіцієнтами з характеристичною і не характеристичною лініями зміни типу не досліджувалися.

У цій роботі вивчаються локальні крайові задачі для навантажених інтегро-диференціальних рівнянь третього порядку, що містять параболо-гіперболічний оператор зі змінними коефіцієнтами в обмежених змішаних областях, які мають всередині себе характеристичні лінії зміни типу.

Нехай Ω — кінцева область площини незалежних змінних x і y при $y > 0$, обмежена відрізками $AA_0,\ BB_0$ і $A_0B_0\big(A(0,0), B(1,0), A_0(0,h), B_0(1,1)\big)$ прямих $x=0,\ x=1$ і $y=1$ відповідно, а при $y<0$ — характеристиками рівняння коливання струни

$$AC\colon x+y=0, \qquad BC\colon x-y=1,$$

що виходять з точки $C\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Введемо такі позначення:

$$\Omega_1 = \Omega\cap\{y>0\}, \qquad \Omega_2 = \Omega\cap\{y<0\}, \qquad I = \{(x,y)\colon 0<x<1, y=0\}\,.$$

Розглянемо лінійне навантажене інтегро-диференціальне рівняння

$$\left(a\,\frac{\partial}{\partial x} + b\,\frac{\partial}{\partial y} + c\right)\tilde{L}u = 0, \tag{1}$$

в області Ω, де

$$\tilde{L}u \equiv \begin{cases} \tilde{L}_1u \equiv u_{xx} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u - \sum_{i=1}^{n} d_i D_{0x}^{\alpha_i}u(x,0), & \Omega_1, \\ \tilde{L}_2u \equiv u_{xx} - u_{yy} + a_2(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c_2(x,y)u - \sum_{i=1}^{n} e_i D_{0\xi}^{\beta_i}u(\xi,0), & \Omega_2, \end{cases}$$

$a,\ b$ і c — задані постійні числа $\big(a^2+b^2\neq 0\big),\ a_i(x,y),\ b_i(x,y),\ c_i(x,y),\ d_i(x,y),\ e_i(x,y)$ — задані достатньо гладкі функції в $\Omega_i,\ i=1,2,$ причому $b_1(x,y)<0,\ c_1(x,y)\le 0$ в $\bar{\Omega}_1$, крім того, в Ω_1 функції $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_{1x},\ a_{1y},\ b_{1x},\ b_{1y}$ задовольняють умову Гельдера, $d_i\in C^1\big(\bar{\Omega}_1\big)\cap C^2\big(\Omega_1\big)$, а в області $\Omega_2\colon a_2, b_2\in C^2\big(\bar{\Omega}_2\big),\ c_2, e_i\in C^1\big(\bar{\Omega}_2\big),\ e_i\in C^3\big(\Omega_2\big)$, $\xi = x+y,\ D_{0x}^{\alpha_i}$ — інтегро-диференціальний оператор, $\alpha_i,\ \beta_i<1,\ i=1,\ldots,n.$

Як показано в [2], залежно від коефіцієнтів a і b ставляться й досліджуються різні крайові задачі для рівняння (1).

Рівняння (1) охоплює широкий клас вивчених раніше рівнянь. Наприклад, якщо $d_i(x,y)$, $e_i(x,y)=0$, то Lu — параболо-гіперболічний оператор, і тоді отримуємо рівняння, розглянуте в роботах [2, 3]; якщо $a=0,\ b=0,$ то одержуємо рівняння, досліджене в роботі [12]; якщо $a=0$ і $b=0$ або $b=0$ і $c=0,\ \alpha_i=0,$ то маємо рівняння, вивчені в [13, 14], якщо $a\neq 0$ і $b=0,$ то отримуємо рівняння з [15] з навантаженим оператором. Виходячи з цього, ми розглянемо задачі для рівняння (1) при $ab\neq 0$.

Означення 1. *Регулярним розв'язком рівняння (1) називається функція* $u(x,y)$, *що має в областях* Ω_1 *і* Ω_2 *всі неперервні частинні похідні, які входять у рівняння (1), і задовольняє рівняння в звичайному сенсі.*

Задача 1. Потрібно знайти функцію $u(x,y)$, що задовольняє такі умови:

1) $u(x,y)$ неперервна в замкненій області $\bar{\Omega}$;

2) $u(x,y)$ є регулярним розв'язком рівняння (1) в областях Ω_1 і Ω_2;

3) $u_x(u_y)$ неперервна до $AA_0\cup AC\cup BC\cup AB(AB\cup AC\cup BC),\ u_{xx}\in C(AA_0),\ u_{xx}\in C(BB_0)$ відповідно;

4) задовольняє такі крайові умови:

а) якщо $0 < b/a \le 1$, то при $a \ne b$, а також при $a = b$, але $c \ne 0$, виконуються умови:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,y) + a_1(0,y)u_x(0,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_3(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}; \tag{6}$$

б) якщо $1 < b/a < +\infty$, то виконуються умови (2)–(6) і

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_4(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1; \tag{7}$$

в) якщо $-1 \le b/a < 0$, то при $a \ne -b$, а також при $a = -b$, але $c \ne 0$, виконуються умови (2), (4), (5), (7), і

$$u_{xx}(1,y) + a_1(1,y)u_x(1,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{8}$$

г) якщо $-\infty < b/a < -1$, то виконуються умови (2)–(7) і (8), а на лініях зміни типу виконуються умови склеювання

$$u_x(x,+0) = u_x(x,-0), \quad u_y(x,+0) = u_y(x,-0), \quad (x,0) \in C(I), \tag{9}$$

де n — внутрішня нормаль, $\varphi_i(y),\ \psi_i(x),\ i = \overline{1,4}$, — задані функції, причому $\psi_m(m - 1) = \varphi_m(0) = 0,\ \psi_1(1/2) = \psi_2(1/2),\ \psi'_m(m-1) = \sqrt{2}\psi_{m+2}(m-1) \mp 2\varphi'_m(0),\ \psi'_3(1/2) = -\psi'_4(1/2)$,

$$\varphi_m(y) \in C^1[0,1], \quad \varphi_3(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \tag{10}$$

$$\psi_{2m-1}(x) \in C^{2-m}[0,1/2] \cap C^{4-m}(0,1/2), \tag{11}$$

$$\psi_{2m}(x) \in C^{2-m}[1/2,1] \cap C^{4-m}(1/2,1), \quad m = 1,2. \tag{12}$$

Зауваження 1. У задачі 1 можна обмежитися розглядом випадків а) і б), оскільки методика дослідження випадків в), г) аналогічна випадкам а), б), тобто за допомогою заміни $\xi = 1 - x$ незалежної змінної з випадків в), г) отримуємо випадки, аналогічні випадкам а) і б). Тому достатньо розглянути тільки випадки а) і б).

Дослідження задачі 1 у випадку $0 < b/a \le 1$.

Теорема 1. *Якщо $b_1(x,y) < 0,\ c_1(x,y) \le 0$ і $a_i(x,y) \ge 0\ \forall (x,y) \in \Omega_i$ і виконані умови (10)–(12) при $m = 1$, то в області Ω існує єдиний розв'язок задачі 1 при $0 < b/a \le 1$.*

Введемо позначення

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

тоді рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{L}_1 u_1 = \omega_1(bx-ay)\exp\Big[-\dfrac{c}{2ab}\,(bx+ay)\Big], & y \ge 0, \\ \tilde{L}_2 u_2 = \omega_2(bx-ay)\exp\Big[-\dfrac{c}{2ab}\,(bx+ay)\Big], & y < 0. \end{cases} \tag{13}$$

де $\omega_1(x,y),\ \omega_2(x,y)$ — довільні досить гладкі функції.

У характеристичних змінних область Ω_2 відображається в трикутник Ω_2^0 площини змінних ξ і η зі сторонами $\xi=0,\ 0\le\eta\le1,\ \eta=1,\ 0\le\xi\le\eta,\ \eta=\xi$, вершини якого знаходяться в точках $A_1(0,0),\ B_1(1,1)$ і $C_1(0,1)$.

У області Ω_2, переходячи до характеристичних координат $\xi=x+y,\ \eta=x-y$, з рівняння (13) при $y\le0$ маємо

$$u_{2\xi\eta}+a_3(\xi,\eta)u_{2\xi}+b_3(\xi,\eta)u_{2\eta}+c_3(\xi,\eta)u_2$$
$$= E_i(\xi,\eta)D_{0\xi}^{\beta_i}\tau(\xi)+\frac14\,\omega_2\bigg(\frac{b-a}{2}\,\xi+\frac{b+a}{2}\,\eta\bigg)\exp\bigg(-\frac{c}{2ab}\,\bigg(\frac{b+a}{2}\,\xi+\frac{b-a}{2}\,\eta\bigg)\bigg), \tag{14}$$

а умови (4) – (6) набувають вигляду

$$u_2(\xi,\eta)|_{\xi=0}=\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right),\quad 0\le\eta\le1, \tag{15}$$

$$u_2(\xi,\eta)|_{\eta=1}=\psi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right),\quad 0\le\xi\le1, \tag{16}$$

і

$$\left.\frac{\partial u_2(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=\frac{1}{\sqrt2}\,\psi_3\left(\frac{\eta}{2}\right),\quad 0<\eta<1, \tag{17}$$

де

$$a_3(\xi,\eta)=\frac14\left[a_2\bigg(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\bigg)+b_2\bigg(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\bigg)\right],$$

$$b_3(\xi,\eta)=\frac14\left[a_2\bigg(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\bigg)-b_2\bigg(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\bigg)\right],$$

$$c_3(\xi,\eta)=\frac14\,c_2\bigg(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\bigg),\quad E_i(\xi,\eta)=\frac14\,e_i\left(\frac{\xi-\eta}{2},\frac{\xi+\eta}{2}\right),$$

$\tau(\xi)=u_2(\xi,\xi)$, під повторюваним індексом $i=1,2,\dots,n$ маємо на увазі підсумовування.

Розв'язок рівняння (14), що задовольняє умови (15) і (16), визначає формула [16]:

$$u_2(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)+\frac14\int\limits_0^\xi D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)dt\int\limits_1^\eta E_i(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\eta)d\tau+$$

$$+\frac14\int\limits_0^\xi dt\int\limits_1^\eta R(t,\tau;\xi,\eta)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\,t+\frac{b+a}{2}\,\tau\right)\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\,t+\frac{b-a}{2}\,\tau\right)\right)d\tau, \tag{18}$$

де

$$f(\xi,\eta)=R(0,1;\xi,\eta)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)+\int\limits_1^{\eta}\left(a_3(0,\tau)\psi_2\left(\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\psi_2'\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)R(0,\tau;\xi,\eta)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{\xi}\left(b_3(t,1)\psi_2\left(\frac{t+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\psi_2'\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)R(t,1;\xi,\eta)dt,$$

а $R(t,\tau;\xi,\eta)$ — функція Рімана рівняння (14), що задовольняє умови:

1°. $R(t,\tau;\xi,\eta)$, як функція (ξ,η), є розв'язком характеристичного рівняння

$$R_{\xi\eta}(t,\tau;\xi,\eta)+a_3(\xi,\eta)R_\xi(t,\tau;\xi,\eta)+b_3(\xi,\eta)R_\eta(t,\tau;\xi,\eta)+c_3(\xi,\eta)R(t,\tau;\xi,\eta)=0;$$

2°. а) $R_\tau(t,\tau;\xi,\eta)-a_3(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\eta)=0$ при $t=\xi$;

б) $R_t(t,\tau;\xi,\eta)-b_3(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\eta)=0$ при $\tau=\eta$;

в) $R(t,\tau;\xi,\eta)=1$ при $t=\xi$ і $\tau=\eta$;

3°. $R_\xi(t,\tau;\xi,\eta)+b_3(\xi,\eta)R(t,\tau;\xi,\eta)=0$ при $\eta=\tau$;

4°. $R_\eta(t,\tau;\xi,\eta)+a_3(\xi,\eta)R(t,\tau;\xi,\eta)=0$ при $\xi=t$;

під індексом i маємо на увазі підсумовування від 1 до n.

Якщо (18) задовольняє крайову умову (17), то з урахуванням властивостей функції Рімана 1°, 3°, і 4° отримаємо таке функціональне співвідношення:

$$\int\limits_1^{\eta}R(0,\tau;0,\eta)\exp\left(-\frac{c(b-a)}{4ab}\,\tau\right)\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\,\tau\right)d\tau=$$

$$=2\sqrt{2}\psi_3\left(\frac{\eta}{2}\right)-4f_\xi(0,\eta)-\tau(0)\int\limits_1^{\eta}E_i(0,\tau)R(0,\tau;0,\eta)\,d\tau,$$

де

$$f_\xi(0,\eta)=R_\xi(0,1;0,\eta)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)+\left[b_3(0,1)\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)\right]R(0,1;0,\eta)+$$

$$+\int\limits_1^{\eta}\left[a_3(0,1)\psi_2\left(\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\psi_2'\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]R_\xi(0,\tau;0,\eta)\,d\tau.$$

Далі, диференціюючи одержане співвідношення по η і змінюючи $-x$ на y, з урахуванням

$$\tau(0)=\psi_1(0)=0,\qquad u_2(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_2(0),\qquad \psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\,\psi_3\left(\frac{1}{2}\right) \tag{19}$$

і властивостей функції Рімана $2^\circ - 4^\circ$ маємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду відносно $w_2(y)$:

$$\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\,\eta\right) - \int\limits_1^\eta K_1(\tau,\eta)\omega_2\left(\frac{a+b}{2}\,\tau\right)d\tau = g_1(\eta), \tag{20}$$

де

$$K_1(\tau,\eta) = a_3(0,\eta)R(0,\tau;0,\eta)\exp\left(-\frac{c(b-a)}{4ab}\,(\eta-\tau)\right),$$

$g_1(\eta) \in C[0,1]$ — відомі функції.

Неважко помітити, що з урахуванням (11), (12) права частина $g_1(\eta)$ рівняння (20) в $0 \le \eta \le 1$ і ядро $K_1(\tau,\eta)$ неперервні в $[0,1]\times[0,1]$ при $\tau \ne \eta$. Таким чином, рівняння (20) має єдиний розв'язок у класі неперервно диференційовних функцій. Розв'язуючи його, знаходимо $\omega_2\left(\dfrac{b+a}{2}\,\eta\right)$.

Далі в $0 < b/a \le 1$ без обмеження загальності можна покласти $a > 0$ і $b > 0$, і тоді виконуються нерівності

$$0 \le \frac{b+a}{2}\,\eta + \frac{b-a}{2}\,\xi \le \frac{b+a}{2}.$$

Замість $\omega_2\left(\dfrac{b+a}{2}\,\eta\right)$ ми можемо взяти $\omega_2\left(\dfrac{b+a}{2}\,\eta + \dfrac{b-a}{2}\,\xi\right)$.

Підставляючи значення функції $\omega_2\left(\dfrac{b+a}{2}\,\eta + \dfrac{b-a}{2}\,\xi\right)$ у (18), знаходимо розв'язок $u_2(\xi,\eta)$ задачі (14)–(17) в області Ω_2^0 відносно $\tau(\xi)$. Якщо одержаний розв'язок задовольняє крайові умови

$$u(\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi} = \tau(\xi),$$

то отримуємо таке інтегро-диференціальне рівняння:

$$\tau(\xi) - \int\limits_0^\xi N_i(\xi,t)D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)dt = f(\xi) + \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_1^\xi R(t,\tau;\xi,\xi)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\,t + \frac{b+a}{2}\,\tau\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\,t + \frac{b-a}{2}\,\tau\right)\right)d\tau,$$

де

$$f(\xi) = f(\xi,\xi), \quad N_i(\xi,t) = \frac{1}{4}\int\limits_1^\xi E_i(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\xi)d\tau,$$

під індексом i маємо на увазі підсумовування від 1 до n.

Зауважимо, що розв'язність інтегро-диференціального рівняння можна довести, зводячи його до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$\tau(\xi) - \int\limits_0^\xi N_{1i}(\xi,t)\tau(t)dt = f(\xi) + \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_1^\xi R(t,\tau;\xi,\xi)\,\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\,t + \frac{b+a}{2}\,\tau\right)\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\,t+\frac{b-a}{2}\,\tau\right)\right)d\tau, \tag{21}$$

де

$$N_{1i}(\xi,t)=\frac{1}{(-\beta_i)}(\xi-t)^{-\beta_i}\int\limits_0^1 z^{-1-\beta_i}N_i\left(\xi,t+(\xi-t)z\right)dz, \quad \beta_i<0,$$

$$N_{1i}(\xi,t)=\frac{1}{(1-\beta_i)}(\xi-t)^{1-\beta_i}\int\limits_0^1 z^{-\beta_i}\,N'_{is}(\xi,s)\big|_{s=t+(\xi-t)z}\,dz, \quad 0<\beta_i<1,$$

Отже, при виконанні умов (11), (12) при $E_i\in C^1\left(\bar{\Omega}_2^0\right)$ робимо висновок, що рівняння (21) однозначно і безумовно розв'язне в класі $\tau(\xi)\in C^1[0,1)\cap C^2(0,1)$. Підставляючи знайдену функцію $\tau(\xi)$ в (18), повністю визначаємо розв'язок $u_2(\xi,\eta)$ задачі (14) – (17) в області Ω_2^0. Згідно з умовами задачі введемо позначення

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu(x), \qquad u_x(x,+0)=u_x(x,-0)=\tau'(x), \tag{22}$$

де $\tau(x)$ і $\nu(x)$ — поки невідомі функції.

Далі, для відновлення розв'язку задачі 1, в області Ω_1 нам необхідно знайти функцію $\omega_1(z)$. З цією метою проінтегруємо рівняння (13) по x від 0 до x при $y\geq 0$:

$$\int\limits_0^x \omega_1(bt-ay)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\,(bt+ay)\right)dt+u_{1x}(0,y)=$$

$$=u_{1x}(x,y)+$$

$$+\int\limits_0^x\left[a_1(t,y)u_{1t}(t,y)+b_1(t,y)u_{1y}(t,y)+c_1(t,y)u_1(t,y)-\sum_{i=1}^n d_iD_{0t}^{\alpha_i}u_1(t,0)\right]dt.$$

Звідси, з урахуванням властивостей задачі 1 і введених позначень (22), переходячи до границі при $y\to+0$ і диференціюючи по x, знаходимо

$$\omega_1(bx)=\Big[\tau''(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+b_1(x,0)\nu(x)+$$

$$+c_1(x,0)\tau(x)-\sum_{i=1}^n d_i(x,0)D_{0x}^{\alpha_i}\tau(x)\Big]\exp\left(-\frac{cx}{2a}\right). \tag{23}$$

Отже, з рівняння (13) при $y\to+0$ і (23) випливає, що $u_{1xx}(0,y)=u_{2xx}(0,y)$. Таким чином, рівність (23) можна переписати у вигляді

$$\omega_1(z)=\Big[\tau''\left(\frac{z}{b}\right)+a_1\left(\frac{z}{b},0\right)\tau'\left(\frac{z}{b}\right)+b_1\left(\frac{z}{b},0\right)\nu\left(\frac{z}{b}\right)+$$

$$+ c_1\left(\frac{z}{b},0\right)\tau\left(\frac{z}{b}\right) - \sum_{i=1}^{n} d_i\left(\frac{z}{b},0\right) D^{\alpha_i}_{0 z/b}\tau\left(\frac{z}{b}\right)\Bigg]\exp\Big(-\frac{cz}{2ab}\Big), \qquad (24)$$

де $z = bx - ay,\ 0 \le z \le b$.

Функція $\omega_1(bx - ay)$ визначилася в проміжку $0 \le bx - ay \le b$.

Щоб знайти функцію $\omega_1(bx - ay)$ при $-ah \le z \le b,\ (x,y) \in \overline{\Omega}_1$, у рівнянні (13) при $y \ge 0$ згідно з властивостями задачі і умовами (2), (3), переходячи до границі при $x \to +0$, маємо

$$\omega_1(-ay) = \left[\varphi_3(y) + b_1(0,y)\varphi_1'(y) + c_1(0,y)\varphi_1(y) - \sum_{i=1}^{n} d_i(0,y) D^{\alpha_i}_{0x}\tau\,\big|_{x\to+0}\right]\exp\Big(\frac{cy}{2b}\Big)$$

або

$$\omega_1(z) = \Bigg[\varphi_3\left(-\frac{z}{a}\right) + b_1\left(0,-\frac{z}{a}\right)\varphi_1'\left(-\frac{z}{a}\right) +$$

$$+ c_1\left(0,-\frac{z}{a}\right)\varphi_1\left(-\frac{z}{a}\right) - k^*\Bigg]\exp\Big(-\frac{cz}{2ab}\Big), \qquad (25)$$

де $z = bx - ay,\ -ah \le z \le 0$.

Отже, з (24) і (25) при $z = 0$ одержуємо

$$\begin{gathered} \tau''(0) - \nu(0) = \varphi_3(0) - \varphi_1'(0), \\ a\left(\tau''(0) - \nu(0)\right) + b\left(\varphi_3'(0) - \varphi_1''(0)\right) + c\left(\varphi_3(0) - \varphi_1'(0)\right) = 0. \end{gathered} \qquad (26)$$

При виконанні рівностей (19) і (2.31), (2.32) з [2] функції $\omega_1(z)$ і $\omega_1'(z)$ будуть неперервними й уздовж прямої $bx - ay = 0$, тобто рівняння (1) при $y \ge 0$ виконується в точках цієї прямої.

Отже, функція $\omega_1(z)$ визначена повністю в області Ω_1. Таким чином, для відновлення розв'язку задачі $u_1(x,y)$ в області Ω_1 приходимо до такої допоміжної задачі.

Допоміжна задача 1. *Знайти функцію $u_1(x,y)$ в області Ω_1, що задовольняє умови*

$$L_1^* u_1 - \sum_{i=1}^{n} d_i D^{\alpha_i}_{0t}\tau(t) = \omega_1(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right],$$

$$u_1(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_1(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h,$$

$$u_1(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

де $L_1^* u \equiv u_{xx} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u$.

Розв'язок цієї задачі існує і він єдиний [17]. Таким чином, аналогічно до [15] робимо висновок, що задача 1 однозначно розв'язна при $0 < b/a \le 1$.

Дослідження задачі 1 у випадку $1 < b/a < +\infty$.

Теорема 2. *Якщо $b_1(x,y) < 0,\ c_1(x,y) \le 0$ і $a_i(x,y) \ge 0\ \forall (x,y) \in \Omega_i$ і виконані умови (10) – (12), то в області Ω існує єдиний розв'язок задачі 1 при $1 < b/a < +\infty$.*

У $1 < b/a < +\infty$ без обмеження загальності можна покласти $a > 0$ і $b > 0$. Тоді виконуються нерівності $0 < (b+a)/2 < b$. Тому мають місце такі випадки:

$$0 \le bx - ay \le (b+a)/2, \quad (x,y) \in \Omega_{21},$$

$$(b+a)/2 \le bx - ay \le b, \quad (x,y) \in \Omega_{22},$$

або в характеристичних координатах

$$0 \le \frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\,\eta \le \frac{b+a}{2}, \tag{27}$$

$$\frac{b+a}{2} \le \frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\,\eta \le b. \tag{28}$$

Тут Ω_{21} — трикутник з вершинами $A(0,0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{b+a}{2b}, 0\right)$, Ω_{22} — трикутник з вершинами $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{b+a}{2b}, 0\right)$ і $\Omega_{21} \cup CE \cup \Omega_{22} = \Omega_2$.

При виконанні нерівності (27) так само, як і у випадку a цієї задачі, з (18) з урахуванням (17) знаходимо функцію $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\,\eta\right)$, яка є розв'язком рівняння (20). Завдяки (26) ми можемо брати $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\,\eta\right)$.

З метою знаходження функції $\omega_2(z)$ при виконанні нерівності (28) в умові (7), переходимо до характеристичних координат

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_4\left(\frac{\xi+1}{2}\right), \quad 0 \le \xi \le 1. \tag{29}$$

Підставляючи (18) в (29), отримуємо

$$\int_0^{\xi} R(t,1;\xi,1)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\,t + \frac{b+a}{2}\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\,t + \frac{b-a}{2}\right)\right)dt =$$

$$= -2\sqrt{2}\,\psi_4\left(\frac{\xi+1}{2}\right) - 4f_\eta(\xi,1) - \int_0^{\xi} D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)E_i(t,1)R(t,1;\xi,1)dt, \tag{30}$$

де

$$f_\eta(\xi,1) = R_\eta(0,1;\xi,1)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \left(a_3(0,1)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right)\right)R(0,1;\xi,1) +$$

$$+ \int_0^{\xi}\left(b_3(t,1)\psi_2\left(\frac{t+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\psi_2'\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)R_\eta(t,1;\xi,1)dt,$$

під повторюваним індексом $i = 1, 2, \ldots, n$ маємо на увазі підсумовування. Із співвідношення (30) при $\xi = 0$ випливає $\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}\psi_4\left(\frac{1}{2}\right)$.

Диференціюючи (30) по ξ і враховуючи властивості функції Рімана $2^\circ - 4^\circ$, отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду відносно $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)$:

$$\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) - \int_0^\xi K_2(t,\xi)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt =$$

$$= g_2(\xi) - \Phi_1(\xi)D_{0\xi}^{\beta_i}\tau(\xi) + \int_0^\xi \Phi_2(\xi,t)D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)dt, \tag{31}$$

де

$$K_2(t,\xi) = b_3(\xi,1)R(t,1;\xi,1)\exp\left(\frac{c(b+a)}{4ab}(\xi - t)\right),$$

$$\Phi_1(\xi) = E_i(\xi,1)\exp\left(\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\right)\right),$$

$$\Phi_2(\xi,t) = b_3(\xi,1)E_i(t,0)R(t,1;\xi,1)\exp\left(\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\right)\right),$$

$g_2(\xi)$ — відома функція.

З рівняння (31) з урахуванням (11), (12), властивостей інтегро-диференціальних рівнянь і з [3] випливає, що функції $K_2(t,\xi)$ і $g_2(\xi)$ неперервно диференційовні при $0 \le t,\ \xi \le 1$ і при $\xi = 0$ рівняння (31) має єдиний розв'язок у класі неперервно диференційованих функцій.

Вважаючи праву частину відомою, з урахуванням розв'язку рівняння (31), результатів з [18], умов (10)–(12) знаходимо $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)$ відносно $\tau(\xi)$:

$$\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) = g_2(\xi) + \int_0^\xi \tilde{R}(\xi,s)g_2(s)ds - \Phi_1(\xi)D_{0\xi}^{\beta_i}\tau(\xi) -$$

$$- \int_0^\xi D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)\left\{\Phi_1(t)\tilde{R}(\xi,t) - \Phi_2(\xi,t) - \int_t^\xi \tilde{R}(\xi,s)\Phi_2(s,t)ds\right\}dt, \tag{32}$$

$\tilde{R}(\xi,s)$ — резольвента ядра $K_2(t,\xi)$, яка має ті ж властивості, що й ядро $K_2(t,\xi)$. Згідно з (28) і (32) ми можемо визначити функцію $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right)$.

Підставляючи значення функції $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta + \frac{b-a}{2}\xi\right)$ у (18), одержуємо розв'язок задачі (14)–(16) в області Ω_2^0 відносно $\tau(\xi)$. Звідси, підставляючи (18) у $u_2(\xi,\eta)|_{\eta=\xi} = \tau(\xi)$, з урахуванням (32) аналогічно, як і при $0 < b/a \le 1$, отримаємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду відносно $\tau(x)$, яке безумовно розв'язне.

Таким чином, знаходимо розв'язок $u_2(\xi,\eta)$ в області Ω_2^0.

З (20) і (32) при виконанні рівності (9) також випливає, що $g_1(1) = g_2(0)$, і відповідно до рівнянь (20) і (32) $\omega_2(z)$ буде неперервною і при $z = (b+a)/2$. Крім того, якщо виконуються рівності (2.38), (2.39) з [2], то функція $\omega_2'(z)$ буде неперервною при $z = (b+a)/2$. Таким чином, ми знайшли

$$\omega_2(z) \in C\left(\bar{\Omega}_2^0\right) \cap C^1\left(\Omega_2^0\right), \quad z = bx - ay = \frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\,\eta.$$

Далі, міркуючи аналогічно до випадку a, знаходимо $u_2(x,y)$ в області Ω_2. Потім для визначення $u_1(x,y)$ в області Ω_1 переходимо до першої крайової задачі для лінійного параболічного рівняння (13) при $y \geq 0$, де $b_1(x,y) < 0$, $c_1(x,y) \leq 0$ і $a_1(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \in \Omega_1$. З урахуванням (10) розв'язок її існує і єдиний.

Теорему 2 доведено.

Аналогічно до [19] наведемо постановку і доведення однозначної розв'язності задачі типу Трикомі для рівняння (1) у випадку $a = 0$, $b \neq 0$.

Зауваження 2. У задачі 1 замість умов (3) і (8) можна розглянути такі умови:

$$u_x(0,y) = \varphi_3^*(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

і

$$u_x(1,y) = \varphi_4^*(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

відповідно.

Зауваження 3. Задачу 1 (відповідно до [18]) можна розглянути із загальними розривними умовами склеювання.

Література

1. А. С. Бердышев, *О базисности системы корневых функций одной нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором*, Дифференц. уравнения, **36**, № 3, 372 – 376 (1977).
2. Т. Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажонов, *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*, ФАН, Ташкент (1986).
3. М. Мамажанов, Д. Халмуратов, *Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с не характеристической линией изменения типа*, Дифференц. уравнения, **25**, № 2, 271 – 275 (1989).
4. Д. Базаров, *Об аналоге задачи Бицадзе – Самарского для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка*, Дифференц. уравнения, **25**, № 1, 21 – 27 (1989).
5. А. С. Бердышев, *О базисности системы корневых функций одной нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором*, Дифференц. уравнения, **36**, № 3, 372 – 376 (2000).
6. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., Москва (1995).
7. В. А. Водахова, *Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А. М. Нахушева*, Дифференц. уравнения, **19**, № 1, 163 – 166 (1983).
8. И. Н. Ланин, *Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка*, Дифференц. уравнения, **17**, № 1, 97 – 106 (1981).
9. В. А. Елеев, *О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка*, Дифференц. уравнения, **30**, № 2, 230 – 237 (1994).
10. В. А. Нахушева, *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, Москва (2006).
11. В. А. Елеев, А. В. Дзарахохов, *Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка*, Владикавказ. мат. журн., **6**, вып. 3, 36 – 46 (2004).
12. К. У. Хубиев, *Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами*, Уфим. мат. журн., **9**, выпуск 2, 94 – 103 (2017).

13. Б. Исломов, У. И. Балтаева, *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка*, Уфим. мат. журн., **3**, № 3, 15 – 25 (2011).
14. Б. Исломов, Д. М. Курьязов, *Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа*, Узбек. мат. журн., № 2, 29 – 35 (2000).
15. B. Islomov, U. I. Baltaeva, *Boundary-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients*, Electron. J. Differential Equations, **2015**, № 221, 10 pp. (2015).
16. А. В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1976).
17. Т. Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент (1979).
18. M. Mirsaburov and G. M. Mirsaburova, *On a problem with a shift and with the Frankl condition on a segment of the degeneration line for a class of equations of mixed type*, Differ. Equ., **48**, № 3, 362 – 371 (2012).
19. U. I. Baltaeva, *On the solvability of boundary value problems with continuous and generalized gluing conditions for a mixed-type equation with a loaded term*, Ukr. Math. J., **69**, № 1, 1845 – 1854 (2018).

Одержано 07.02.21