УДК 517.9

СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ДЛЯ АТРАКТОРА ДИСИПАТИВНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ PDE–ODE*

О. В. Капустян, Т. В. Юсипів

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua
yusypivt7@gmail.com

In the paper, we consider the dissipative evolutionary system that consists of a parabolic reaction–diffusion-type system and a system of ordinary differential equations disturbed by external bounded signals. We prove that the global attractor of the unperturbed system is stable in the ISS sense to the value of disturbances.

Розглянуто дисипативну еволюційну систему, що складається з параболічної системи типу реакція–дифузія та системи звичайних диференціальних рівнянь, збурених вхідними обмеженими сигналами. Доведено, що глобальний атрактор незбуреної системи є стійким у сенсі ISS щодо величини збурень.

1. Вступ. Одним із популярних підходів до вивчення робастної стійкості положень рівноваги нелінійних диференціальних рівнянь є теорія стійкості від входу до стану (*input-to-state stability*, ISS) [1, 2]. Для нескінченновимірних систем відповідні узагальнення цієї теорії зроблено в [3 – 6]. Для дисипативних диференціальних рівнянь із частинними похідними ключовим об'єктом вивчення якісної теорії є глобальний атрактор — компактна інваріантна підмножина фазового простору, що притягує всі траєкторії рівномірно за обмеженими початковими даними [7 – 12]. Робастність такого об'єкту стосовно зовнішніх збурень у термінах теорії ISS вперше встановлено в [13, 14] для параболічного рівняння. У цій роботі ми встановлюємо властивість ISS для атрактора змішаної системи, що складається з параболічної системи типу реакції–дифузії та системи звичайних диференціальних рівнянь, що зазнають адитивних обмежених збурень.

2. Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена область. Розглядаємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u - f(u) + B(x)v(t) + D(x)d_1(t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -F(v) + \int\limits_{\Omega} G(x)u(x,t)dx + d_2(t), \tag{2}$$

де A — $(N \times N)$-вимірна матриця, $\dfrac{1}{2}(A + A^*) \geq \nu_1 I,\ u = u(x,t) = (u^1, \ldots, u^N),\ v = v(t) = (v^1, \ldots, v^M)$ — невідомі функції, $B, D, G \in L^2(\Omega)$ — задані матриці відповідних розмірностей, $d_1 \in L^\infty\big(0, +\infty; \mathbb{R}^N\big),\ d_2 \in L^\infty\big(0, +\infty; \mathbb{R}^M\big)$ — вхідні "збурюючі" сигнали, і

* Робота виконана за підтримки НФДУ, проєкт Ф81/41743.

для всіх $u, \omega \in \mathbb{R}^N,\ y \in \mathbb{R}^M$ виконуються умови

$$\begin{gathered} f \in C^1\big(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N\big), \quad F \in C^1\big(\mathbb{R}^M;\mathbb{R}^M\big), \\ \sum_{i=1}^N f^i(u)u^i \geq \nu_2 \sum_{i=1}^N |u^i|^{p_i} - c_1, \\ \sum_{i=1}^N |f^i(u)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq c_2 \left(\sum_{i=1}^N |u^i|^{p_i} + 1\right), \\ (Df(u)\omega,\omega)_{\mathbb{R}^N} \geq -c_3 \|\omega\|^2_{\mathbb{R}^N}, \\ \sum_{i=1}^M F^i(y)y^i \geq \nu_3 \|y\|^2_{\mathbb{R}^M} - c_4, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ — задані додатні константи, $p_i \geq 2,\ i = \overline{1,N}$.

Далі будемо використовувати позначення

$$\begin{gathered} p = (p_1,\ldots,p_N), \quad q = (q_1,\ldots,q_N), \quad q_i = \frac{p_i}{p_i-1}, \\ L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times L^{p_N}(\Omega), \\ L^p\big(0,T;L^p(\Omega)\big) = L^{p_1}\big(0,T;L^{p_1}(\Omega)\big) \times \ldots \times L^{p_N}\big(0,T;L^{p_N}(\Omega)\big), \\ H = \big(L^2(\Omega)\big)^N, \quad V = \big(H_0^1(\Omega)\big)^N, \end{gathered}$$

$AC\left([0,T];\mathbb{R}^M\right)$ — простір абсолютно неперервних функцій із $[0,T]$ в $\mathbb{R}^M$.

Відомо [9], що за умов (3) задача (1), (2) для довільних збурень $d = \{d_1, d_2\} \in L^\infty\big(0,+\infty;\mathbb{R}^N\big) \times L^\infty\big(0,+\infty;\mathbb{R}^M\big)$ і для довільних початкових даних $z_0 = \{u_0, v_0\}$ із фазового простору $X = \big(L^2(\Omega)\big)^N \times \mathbb{R}^M$ і $\forall T > 0$ має єдиний розв'язок

$$z = \{u, v\} \in \Big(L^2(0,T;V) \cap L^p\big(0,T;L^p(\Omega)\big)\Big) \times AC\left([0,T];\mathbb{R}^M\right).$$

Продовжуючи кожен такий розв'язок на $[0,+\infty)$, покладемо

$$S_d(t,z_0) := z(t), \quad z(\cdot) \text{ — розв'язок (1), (2) зі збуренням } d, \quad z(0) = z_0.$$

Доведемо, що за відсутності збурень $(d \equiv 0)$ напівгрупа S_0 має глобальний атрактор $\Theta \subset X$, тобто існує компактна множина $\Theta \subset X$, яка є інваріантною:

$$S_0(t,\Theta) = \Theta \quad \forall t > 0$$

і рівномірно притягуючою:

$$\operatorname{dist}\left(S_0(t,B),\Theta\right) \to 0, \quad t \to \infty \quad \text{для будь-якої обмеженої множини } B \subset X,$$

де тут і далі

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{a\in A}\sup_{b\in B} \|a-b\|_X.$$

За наявності збурень S_d вже не є напівгрупою, і виникає питання про те, як залежить відхилення траєкторій збуреної системи S_d від множини Θ стосовно величини

$$\|d\|_\infty := \max\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{t\geq 0}\|d_1(t)\|_{\mathbb{R}^N},\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\geq 0}\|d_2(t)\|_{\mathbb{R}^M}\right\}.$$

При цьому відхилення точки $z \in X$ від множини $\Theta \subset X$ будемо оцінювати за допомогою величини

$$\|z\|_\Theta := \inf_{\theta\in\Theta}\|z-\theta\|_X.$$

Доведемо, що Θ є стійким у сенсі ISS, тобто існують $r > 0,\ \beta \in \mathcal{KL},\ \gamma \in \mathcal{K}$ такі, що

$$\|S_d(t,z_0)\|_\Theta \leq \beta(\|z_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty) \quad \forall \|z_0\|_\Theta \leq r, \quad \forall \|d\|_\infty \leq r, \quad \forall t \geq 0, \tag{4}$$

де $\mathcal{K}$ — клас неперервних строго зростаючих функцій $\gamma\colon [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ з $\gamma(0) = 0$, $\mathcal{KL}$ — клас неперервних функцій $\beta\colon [0,+\infty) \times [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ з $\gamma(0) = 0$, для яких $\forall s \geq 0\ \beta(\cdot, s) \in \mathcal{K},\ \forall t \geq 0\ \beta(t,s) \to 0,\ s \to +\infty$.

3. Основний результат.

Теорема. *За умов (3) при $d = 0$ напівгрупа S_0 має глобальний атрактор Θ у фазовому просторі X, який є стійким до збурень у сенсі (4).*

Доведення. Спочатку доведемо існування глобального атрактора в S_0. Згідно з [7] для цього достатньо встановити, що S_0 є дисипативною, неперервною і асимптотично компактною.

Встановимо деякі апріорні оцінки для $z(t) = \{u(t), v(t)\} = S_d(t, z_0)$. Оскільки для $u \in L^2(0,T;V) \cap L^p\big(0,T;L^p(\Omega)\big),\ v \in C\left([0,T];\mathbb{R}^M\right)$ завдяки (3)

$$A\Delta u - f(u) + Bv + Dd \in L^2\left(0,T;V^*\right) + L^q\left(0,T;L^q(\Omega)\right) +$$
$$+ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2\left(0,T;V^*\right) + L^q\left(0,T;L^q(\Omega)\right),$$

то згідно з [9] $u\colon [0,T] \mapsto H$ є абсолютно неперервною функцією, і після множення (1) на u скалярно в H, (2) на v скалярно в $\mathbb{R}^m$ одержуємо: для майже всіх (м.в.) $t > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \nu_1\|u(t)\|_V^2 + \nu_2\|u(t)\|_{L^p}^p \leq c_1|\Omega| + \|B\|_{L^2}\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M} + \|D\|_{L^2}\|d\|_\infty, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \nu_3\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq c_4 + \|G\|_{L^2}\|u(t)\|_H + \|d\|_\infty. \tag{6}$$

З (5), (6), нерівностей Юнга й Пуанкаре виводимо, що існують $\nu > 0,\ c > 0$, що залежать лише від констант задачі та $\|B\|_{L^2},\ \|G\|_{L^2}$ такі, що для м.в. $t > 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2\right) + \nu\left(\|u(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2\right) \leq c + \|d\|_\infty\left(1 + \|D\|_{L^2}\right).$$

Звідси завдяки неперервності $z. = \{u(\cdot), v(\cdot)\}\colon [0,+\infty) \mapsto X$ виводимо

$$\forall t \geq 0 \quad \|z(t)\|_X^2 \leq \|z_0\|_X^2 e^{-\nu t} + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu}\|d\|_\infty. \tag{7}$$

З (7) при $d = 0$ одержуємо дисипативність S_0.

Тепер розглянемо $z_1 - z_2$, де $z_1 = \{u_1, v_1\}$, $z_2 = \{u_2, v_2\}$ — розв'язки (1), (2) при $d_1 = d_2 = 0$. Використовуючи оцінку (7) при $d = 0$, для кожного розв'язку одержуємо

$$\sup_{t\geq 0} \|z(t)\|_x^2 \leq \|z_0\|_X^2 + \frac{c}{\nu}. \tag{8}$$

Звідси виводимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1 - u_2\|_H^2 + \nu_1\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq c_3\|u_1 - u_2\|_H^2 + \|B\|_{L^2}\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}\|u_1 - u_2\|_H,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^M}\leq r_0} \|DF(v)\|\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \|G\|_{L^2}\|u_1 - u_2\|_H\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M},$$

де $r_0 = \sqrt{\max\left\{\|z_1(0)\|_X^2, \|z_2(0)\|_X^2\right\} + \frac{c}{\nu}}$.

Отже, з деякою константою $c(r_0) > 0$ маємо

$$\forall t \geq 0 \quad \|z_1(t) - z_2(t)\|_X^2 \leq e^{c(r_0)t}\|z_1(0) - z_2(0)\|_X. \tag{9}$$

З (9) випливає неперервність S_0.

Доведемо асимптотичну компактність S_0, тобто передкомпактність послідовності $\{\xi_n = S_0\left(t_n, z_0^n\right)\}$, де $t_n \to +\infty$, $\{z_0^n\}$ обмежена в X. Оскільки $\{\xi_n = S_0(1, S_0(t_n - 1, z_0^n))\}$, то завдяки (7) достатньо показати передкомпактність $\{S_0\left(1, z_0^n\right)\}$, $\|z_0^n\|_X \leq r$. Нехай $z_n(t) = \{u_n(t), v_n(t)\} = S_0\big(t, z_0^n\big)$, $\big\|z_0^n\big\|_X \leq r$. Обмеженість, а отже, й передкомпактність $\{v_n(1)\}$ у $\mathbb{R}^M$ випливає з (7).

Доведемо, що

$$\|u_n(1)\|_V \leq K(r) \tag{10}$$

з деякою константою $K(r)$, яка не залежить від n. Тоді з компактності вкладення $V \subset H$ одержимо передкомпактність $\{u_n(1)\}$ в H.

Виведемо (10), слідуючи міркуванням із [13], які обґрунтовуються переходом до гальоркінських апроксимацій задачі (1), (2). Домножимо (1) на Δu_n в H. З урахуванням умов (3) одержимо нерівність

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_V^2 + \nu_1\|\Delta u_n(t)\|_H^2 \leq$$
$$\leq c_3\|u_n(t)\|_V^2 + \|B\|_{L^2}\|v_n(t)\|_{\mathbb{R}^M}\|\Delta u_n(t)\|_H + \|f(0)\|_{\mathbb{R}^N}\|\Delta u_n(t)\|_H. \tag{11}$$

Оскільки

$$\sup_{t\geq 0} \|v_n(t)\|_{\mathbb{R}^M} \leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu}}, \tag{12}$$

то з (11) виводимо

$$\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_V^2 + \lambda\|u_n(t)\|_V^2 \leq c(r)\big(\|u_n(t)\|_V^2 + 1\big) \tag{13}$$

з деякими додатними константами λ і $c(r)$.

Після множення (13) на $te^{\lambda t}$ маємо

$$\frac{d}{dt}\Big(t\|u_n(t)\|_V^2 e^{\lambda t}\Big) \le c(r)\big(\|u_n(t)\|_V^2+1\big)te^{\lambda t} + \|u_n(t)\|_V^2 e^{\lambda t}.$$

Інтегруючи останню нерівність від 0 до 1, одержуємо

$$\|u_n(1)\|_V^2 \le (c(r)+1)\int\limits_0^1 \|u_n(t)\|_V^2 dt + c(r). \tag{14}$$

З нерівностей (5) і (12) маємо

$$\nu_1 \int\limits_0^1 \|u_n(t)\|_V^2 dt \le \frac{1}{2}r^2 + c_1(\Omega) + \|B\|_{L^2}\sqrt{r^2+\frac{c}{\nu}}. \tag{15}$$

З (14) і (15) виводимо оцінку (10).

Таким чином, напівргупа S_0 має глобальний атрактор $\Theta \subset X$. Встановимо його робастну стійкість у сенсі (4). Скористаємося наступним результатом, який випливає з [13, 14].

Лема [13, 14]**.** *Нехай S_0 має глобальний атрактор Θ і виконуються умови:*

1) існують $\sigma_1 \in \mathcal{K}$ і $c_0 > 0$ такі, що

$$\sup_{t\ge 0}\|S_0(t,z_0)\|_X \le \sigma_1(\|z_0\|_X) + c_0 \quad \forall z_0 \in X;$$

2) існує локально обмежена $c\colon [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ така, що

$$\|z_0^1\|_X \le r, \quad \|z_0^2\|_X \le r \implies \left\|S_0\left(t,z_0^1\right) - S_0\left(t,z_0^2\right)\right\|_X \le e^{c(r)t}\left\|z_0^1 - z_0^2\right\|_X \quad \forall r>0, \quad \forall t \ge 0;$$

3) існує $\sigma_2 \in \mathcal{K}$ і неперервна функція $\varphi\colon [0,+\infty)^2 \mapsto [0,+\infty)$ такі, що

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\, \frac{\varphi(r,t)}{t} < \infty \quad \forall r > 0$$

і

$$\|z_0\|_X \le r, \|d\|_\infty \le r \implies \big\|S_d(t,z_0) - S_0(t,z_0)\big\|_X \le \varphi(r,t)\sigma_2(\|d\|_\infty) \quad \forall t \ge 0.$$

Тоді для S_d виконується властивість (4).

З оцінки (8) виводимо умову 1) з $\sigma_1(r) = r,\ c_0 = \sqrt{\dfrac{c}{\nu}}$, з (9) виводимо умову 2). Залишилося довести умову 3). Оскільки властивість (4) носить локальний характер, то без обмеження загальності можемо вважати, що $\|d\|_\infty \le 1$. Нехай $z_1(t) = \{u_1(t), v_1(t)\} = S_d(t,z_0)$, $z_2(t) = \{u_2(t), v_2(t)\} = S_0(t,z_0)$. Тоді аналогічно до здобуття оцінки (9) маємо

$$\frac{d}{dt}\|z_1 - z_2\|_X^2 \le 2c_3\|u_1-u_2\|_H^2 + 2\sup_{\|v\|\le r}\|DF(v)\|\|v_1-v_2\|_{\mathbb{R}^M} +$$

$$+\big(\|B\|_{L^2} + \|G\|_{L^2}\big)\|z_1-z_2\|_X^2 + 4(\|D\|_{L^2}+1)\|z_1-z_2\|_X\|d\|_\infty,$$

де r_0 визначається з оцінки

$$\max\left\{\sup_{t\ge 0}\|v_1(t)\|_{\mathbb{R}^M},\ \sup_{t\ge 0}\|v_2(t)\|_{\mathbb{R}^M}\right\} \le$$

$$\leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu}\|d\|_\infty} \leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu}} =: r_0.$$

Позначимо $\bar{c}(r) = 2c_3 + \|B\|_{L^2} + \|G\|_{L^2} + \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^M} \leq r_0} \|DF(v)\|,\ \bar{D} = 4(\|D\|_{L^2} + 1)$. Тоді $\forall T \geq t \geq 0$ маємо

$$\frac{d}{dt}\|z_1 - z_2\|_X^2 \leq \bar{c}(r)\|z_1 - z_2\|_X^2 + \bar{D} \sup_{t\in[0,T]} \big\|z_1(t) - z_2(t)\big\|_X \|d\|_\infty.$$

Після інтегрування від 0 до t одержуємо

$$\big\|z_1(t) - z_2(t)\big\|_X^2 \leq \bar{c}(r) \int\limits_0^t \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|_X^2 ds + \bar{D}T \sup_{t\in[0,T]} \big\|z_1(t) - z_2(t)\big\|_X \|d\|_\infty.$$

З леми Гронуола виводимо

$$\sup_{t\in[0,T]} \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|_X \leq \bar{D}Te^{\bar{c}(r)T}\|d\|_\infty,$$

звідки й випливає умова 3) з $\varphi(r,t) = \bar{D}te^{\bar{c}(r)t}$.

Теорему доведено.

Література

1. E. D. Sontag, *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems. Second edition*, Springer-Verlag, New York (1998).
2. E. D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Trans. Automat. Control, **34**, № 4, 435 – 443 (1989).
3. S. Dashkovskiy, A. Mironchenko, *Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems*, Math. Control Signals Systems, **25**, 1 – 35 (2013).
4. A. Mironchenko, F. Wirth, *Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems*, IEEE Trans. Automat. Control, **63**, № 6, 1602 – 1617 (2018).
5. A. Mironchenko, Ch. Prieur, *Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions*, SIAM Rev, **62**, 529 – 614 (2020).
6. J. Schmid, *Weak input-to-state stability: characterization and counterexamples*, Math. Control Signals Systems, **31**, № 4, 433 – 454 (2019).
7. R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Second edition*, Springer-Verlag, New York (1997).
8. J. C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
9. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2002).
10. O. V. Kapustyan, P. O. Kasyanov, J. Valero, *Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation*, Appl. Math. Inf. Sci., **9**, № 5, 2257 – 2264 (2015),
11. N. V. Gorban, A. V. Kapustyan, E. A. Kapustyan, O. V. Khomenko, *Strong global attractors for the three-dimensional Navier – Stokes system of equations in unbounded domain of channel type*, J. Autom. Inform. Sci., **47(11)**, 48 – 59 (2015).
12. P. O. Kasianov, L. Toscano, N. V. Zadoianchuk, *Long-time behavior of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional "reaction–displacement" law*, Abstr. Appl. Anal. (2012).
13. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, J. Schmid, *A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations*, Math. Control Signals Systems, **32**, № 3, 309 – 326 (2020).
14. J. Schmid, V. Kapustyan, S. Dashkovskiy, *Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems* (2020); arXiv:1909.06302 [math.AP].

Одержано 23.10.21