УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ІЗ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА ПІВОСІ*

О. Д. Кічмаренко

Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2, Одеса, 65026, Україна
e-mail: olga.kichmarenko@gmail.com

О. А. Капустян, Н. В. Касімова, Т. Ю. Жук

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна
e-mail: olena.kap@gmail.com
zadoianchuk.nv@gmail.com
zhuktetiana6@gmail.com

In this paper, we investigate the optimal control problem for the system of differential inclusions with rapidly oscillating coefficients on a semiaxis. We apply the averaging method to the study of this object. We substantiate the solvability of the original exact problem and the corresponding averaged problem. We prove the convergence of optimal controls and optimal trajectories of solutions of the exact problem to optimal control and optimal trajectory of solutions of the averaged problem. We show that optimal control of the averaged problem is almost optimal for the original exact problem.

Досліджено задачу оптимального керування системою диференціальних включень із швидкоколивними коефіцієнтами на півосі. До вивчення такого об'єкту застосовано метод усереднення. Обґрунтовано розв'язність вихідної точної та відповідної їй усередненої задач. Доведено збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і оптимальної траєкторії усередненої задачі. Показано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже" оптимальним для точної задачі.

1. Вступ. Розвиток теорії диференціальних включень як природного узагальнення диференціального рівняння значною мірою викликано численним застосуванням. Велику кількість задач із механіки, електротехніки, теорії автоматичного керування описують такі об'єкти. Зараз широко розвинені напрями досліджень диференціальних включень. Їхній розгляд із самого початку вимагає узагальнення поняття розв'язку. На початку 60-х років минулого століття з'явився цикл робіт Т. Важевського [1, 2] і А. Ф. Філліпова [3], в яких розглянуто різні означення розв'язків диференціальних включень, вказано умови їхнього застосування, отримано принципові результати про їхнє існування і властивості. Одним із найбільш важливих результатів цих робіт було встановлення зв'язку диференціальних включень із задачами оптимального керування. Природно, при цьому виникають усі проблеми, властиві звичайним диференціальним рівнянням — це теореми існування розв'язку, продовжуваності розв'язку, обмеженості, неперервної залежності від початкових умов і параметрів та ін. Багатозначність, зі свого боку, породжує ряд специфічних

* Підтримано Національним фондом досліджень України, проєкт Ф81/41743.

проблем, таких як замкненість, опуклість сім'ї розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями та багато інших. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу стосовно багатозначних функцій дає можливість вирішувати ці проблеми.

Для дослідження задач керування диференціальними рівняннями та включеннями існує багато підходів, зокрема широко застосовуються асимптотичні методи. Серед них варто виділити метод усереднення, строге математичне обґрунтування якого запропонували М. М. Крилов і М. М. Боголюбов. У роботах Плотнікова та його школи (див., наприклад, [4]) дано строге обґрунтування методу усереднення до задач керування. У [5] висвітлено обґрунтування методу усереднення, зокрема для звичайних диференціальних включень, включень із частинними похідними, включень із похідною Хукухари. У [6] спочатку проводилось усереднення за часом, що явно входить у систему, при цьому функція керування вважалася параметром і за нею усереднення не проводилося. При цьому авторам довелося накладати умову асимптотичної сталості на функцію керування. У [7] застосовано підхід із [6] до розв'язання задачі оптимального керування на скінченному часовому інтервалі, проте при цьому знято досить жорстку умову асимптотичної сталості. У [8] отримано аналогічні до [7] результати на півосі. У [9] застосовано метод усереднення до розв'язання задачі оптимального керування із швидкоколивними змінними, лінійної за керуванням, на скінченному інтервалі. Об'єктом керування при цьому виступає система диференціальних включень із ліпшицевою за фазовою змінною правою частиною. Також задачі оптимального керування на півосі в різних задачах зі збуреннями вивчалися в [10 – 17].

У цій роботі метод усереднення застосовується для дослідження задачі оптимального керування із швидкоколивними змінними системою диференціальних включень на півосі. Зокрема, за допомогою прямого методу варіаційного числення доведено розв'язність вихідної та усередненої задач. Обґрунтовано збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому показано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметра ε реалізується мінімум критерію якості.

2. Постановка задачі. Умови на параметри задачі. Розглянемо задачу оптимального керування системою диференціальних включень на півосі з малим параметром і швидко осцилюючими коефіцієнтами

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t), \quad x(0, u(0)) = x_0 \tag{1}$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[x, u] = \int_0^\infty \left(e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)\right) dt \to \inf. \tag{2}$$

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор у $\mathbb{R}^d$, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, який набирає значень у деякій множині $U \subset \mathbb{R}^m$.

Нехай для багатозначної функції f існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ середнє

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x)\, dt = f_0(x), \tag{3}$$

де інтеграл від багатозначної функції розуміємо в сенсі Аумана [18], а межу багатозначної функції розуміємо в сенсі Хаусдорфа.

Задачі оптимального керування на півосі (1), (2) ставиться у відповідність усереднена задача керування:

$$\dot{y} \in f_0(y) + f_1(y)u(t), y(0, u(0)) = x_0 \tag{4}$$

із критерієм якості

$$J_0[x, u] = \int_0^\infty \left(e^{-jt} A(t, y(t)) + u^2(t)\right) dt \to \inf . \tag{5}$$

Для задачі (1), (2) і відповідної їй усередненої задачі (4), (5) будемо вважати виконаними такі умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями будемо вважати m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in \in L_2([0, \infty))$, що набирають значень у замкненій, опуклій множині $U \subset \mathbb{R}^m$, при цьому вважаємо також, що $0 \in U$.

Умова 2. Функція $A(t, s)$ визначена при $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ u \in U$, вимірна по t і неперервна по x, причому

$$\exists C > 0\colon A(t, x) \geq -C,$$

і задовольняє при $x \in \mathbb{R}^d$ умову росту

$$\exists K > 0\colon |A(t, x)| \leq K\left(1 + |x|^p\right)$$

для кожного $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^d,\ p \geq 0$.

Умова 3. Багатозначна функція $f(t, x)\big(f\colon Q = \{t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d\} \to \operatorname{conv}\left(\mathbb{R}^d\right)\big)$ визначена і неперервна в метриці Хаусдорфа за сукупністю змінних в Q, а матричнозначна функція $f_1(x)$ неперервна по $x \in \mathbb{R}^d$ і виконуються такі умови:

1) $f(t, x)$ в області Q задовольняє умову лінійного зростання по x із константами L_1 та L_2, тобто

$$\|f(t, x)\|_+ := \sup_{\xi \in F(t,x)} \|\xi\| \leq L_1 + L_2|x| \quad \forall (t, x) \in Q;$$

$f_1(x)$ в області $\mathbb{R}^d$ задовольняє умову лінійного зростання за x із константами L_3 та L_4, тобто

$$|f_1(x)| \leq L_3 + L_4|x|,$$

де

$$j > L_2 p; \tag{6}$$

2) $f(t, x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняють умову Ліпшиця по x рівномірно по t із константами $K_1,\ K_2 > 0$ відповідно.

Умова 4. Середнє значення багатозначної функції f у сенсі границі (3) є однозначною неперервною функцією.

3. Аналіз множини допустимих пар. Обґрунтуємо результат стосовно розв'язності задачі (1), (2), (4), (5).

Лема (про існування розв'язку задачі (1), (2))**.** *При виконанні умов 1 – 3 розв'язок задачі оптимального керування (1), (2) існує.*

Доведення. Обґрунтування проведемо у кілька кроків. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$.

Крок 1. Існування розв'язку задачі Коші (1).

З умов 1, 3 та теореми 1 із [19] випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t,u)$ задачі Коші (1) існує на $[0,+\infty)$ та є абсолютно неперервною функцією. Тому множина допустимих пар задачі (1), (2) є непорожньою.

Крок 2. Покажемо, що функціонал у (2) досягає скінченного екстремуму. Спочатку виведемо апріорну оцінку для $x(t)$. Оскільки x — абсолютно неперервна функція, то $t \mapsto |x(t)|$ — абсолютно неперервна і $\dfrac{d}{dt}|x(t)| \le |\dot{x}(t)|$ м.с.

Тому будемо мати

$$\frac{d}{dt}|x(t)| \le |\dot{x}(t)| \le \|f(t,x)\|_+ + |f_1(x)||u(t)| \le$$

$$\le L_1 + L_2|x(t)| + (L_3 + L_4|x(t)|)|u(t)|.$$

Звідси

$$|x(t)| \le |x(0)| + \int_0^t (L_1 + L_2|x(s)| + (L_3 + L_4|x(s)|)|u(s)|)ds \le$$

$$\le |x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2}\|u\|_{L^2} + \int_0^t (L_2 + L_4|u(s)|)|x(s)|ds. \tag{7}$$

Застосуємо нерівність Гронуолла і отримаємо

$$|x(t)| \le \left(|x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2}||u||_{L_2}\right) e^{\int_0^t (L_2 + L_4|u(s)|)ds} =$$

$$= \left(|x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2}\|u\|_{L_2}\right) e^{L_2 t + L_4 t^{1/2}\|u\|_{L_2}}.$$

Використавши нерівність Юнга, в результаті будемо мати

$$|x(t)| \le \left(|x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2}\|u\|_{L_2}\right) e^{L_2 t + \frac{\delta}{2} L_4^2 t + \frac{1}{2\delta}\|u\|^2_{L_2}} \tag{8}$$

для досить малого $\delta > 0$.

Таким чином, враховуючи нерівність (6) та оцінку (8), для функціоналу якості одержимо

$$|J_\varepsilon[x,u]| \le \int_0^\infty e^{-jt}\left(K(1+|x|^p)\right)dt + \int_0^\infty u^2(t)dt < \infty.$$

Отже, критерій якості (2) має сенс для всіх допустимих керувань.

Крок 3. Нехай $\{(u_n, x_n) \in \Xi\}_{n\in\mathbb{N}}$ — мінімізуюча послідовність задачі (1), (2), де Ξ — множина допустимих пар задачі (1), (2):

$$\Xi = \big\{(u,x) : u \text{ задовольняє умову 1,}$$

$$x \text{ є розв'язком задачі Коші (1) для всіх допустимих } u\big\}.$$

Оскільки згідно з умовою 2 $J_\varepsilon[x,u] \geq -C/j$, то

$$\lim_{n\to\infty} J_\varepsilon[x_n,u_n] = \inf_{(u,x)\in\Xi} J_\varepsilon[x,u] = a_\varepsilon \in (-\infty,+\infty).$$

Завдяки умовам для функції $A(t,x(t))$ будемо мати, що

$$\int\limits_0^\infty u_n^2(t)\,dt \leq a_\varepsilon - \int\limits_0^\infty e^{-jt}A(t,x(t))dt + 1 \leq a_\varepsilon + \frac{C}{j} + 1 =: C_1^\varepsilon.$$

Звідки маємо обмеженість, а тому й слабку збіжність деякої підпослідовності з $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (для якої для спрощення, не обмежуючи загальності, залишимо ті ж позначення) до деякого елемента u^* у просторі $L_2([0,\infty))$. Належність u^* множині U для кожного $t \geq 0$ випливає з леми Мазура.

Згідно з оцінкою (8) та слабкою збіжністю послідовності $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі $L_2([0,\infty))$ будемо мати рівномірну обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на кожному скінченному інтервалі $[0,T]$, тобто $\exists L > 0$:

$$|x_n(t)| \leq L, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Далі для довільних $t_1 < t_2,\ t_1, t_2 \in [0,T]$, використовуючи (7) та (9), одержуємо

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} (L_1 + L_2\,L)ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} (L_3 + L_4\,L)|u_n(s)|ds \leq$$

$$\leq (L_1 + L_2\,L)(t_2 - t_1) + (L_3 + L_4\,L)(t_2 - t_1)^{1/2}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |u_n(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

З останньої нерівності випливає рівностепенева неперервність послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на кожному $[0,T]$. За теоремою Арцела маємо рівномірну збіжність послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (а точніше, її підпослідовності) до деякого елемента x^* на кожному $[0,T]$, тим самим маємо поточкову збіжність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на $(0,+\infty)$. За допомогою міркувань, аналогічних до [9] (теорема 3) можна показати, що x^* — це розв'язок задачі Коші (1). Тому $\big(u^*(t), x^*(t)\big) \in$ $\in \Xi$. Завдяки напівнеперервності знизу норми в просторі $L_2([0,\infty))$, властивостям функції $A(t,x(t))$, поточковій збіжності послідовності $x_n(t)$ й оцінці (8), застосувавши теорему Лебега, будемо мати

$$\inf_{(u,x)\in\Xi} J_\varepsilon[x,u] = \lim_{n\to\infty} J_\varepsilon[x_n,u_n] = \varliminf_{n\to\infty} J_\varepsilon[x_n,u_n] =$$

$$= \varliminf_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty e^{-jt}A(t,x_n(t))dt + \int_0^\infty u_n^2(t)dt\right) \geq$$

$$\geq \int_0^\infty e^{-jt}A\left(t,x^*(t)\right)dt + \int_0^\infty \left(u^*\right)^2(t)dt = J_\varepsilon\left[x^*,u^*\right].$$

Таким чином, пара $\big(u^*(t),x^*(t)\big)$ є оптимальною для задачі (1), (2).

Зауваження 1. Завдяки властивостям метрики Хаусдорфа умова 3 виконується для усередненої функції $f_0(x)$ із тими ж сталими, що й для функції $f(t,s)$. Дійсно,

$$\forall \xi \in F(t,x)\colon |\xi| \leq L_1 + L_2|x|.$$

Враховуючи, що

$$\mathrm{dist}_H\left(\frac{1}{s}\int_0^s f(t,x)dt, f_0(x)\right) \to 0, \quad s\to\infty,$$

маємо, що $\forall\varepsilon>0$

$$\exists s_0\colon \quad \forall s\geq s_0 \quad f_0(x)\in O_\varepsilon\left(\frac{1}{s}\int_0^s f(t,x)dt\right).$$

Далі одержуємо

$$|f_0(x)| \leq \left\|\frac{1}{s}\int_0^s f(t,x)dt\right\|_+ + \varepsilon \leq$$

$$\leq \frac{1}{s}\int_0^s \|f(t,x)\|_+ dt + \varepsilon \leq L_1 + L_2|x| + \varepsilon.$$

Звідси бачимо, що п. 1) умови 3 виконується. Аналогічними міркуваннями приходимо до висновку щодо виконання умови Ліпшиця для $f_0(x)$ з константою K_1.

Тому при виконанні умови 4 можемо зробити висновок про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (4) на півосі.

Крім того, завдяки лемі можна отримати висновок про існування розв'язку для усередненої задачі (4), (5).

4. Зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями й оптимальними значеннями критеріїв якості точної та усередненої задач. В подальшому результаті обґрунтовано збіжність оптимальних керувань, оптимальних траєкторій і оптимальних значень критерію якості точної задачі (1), (2) до відповідних параметрів усередненої задачі (4), (5).

Теорема. *Нехай* $\big(x_\varepsilon^*(t),u_\varepsilon^*(t)\big)$ *— розв'язок задачі (1), (2). Тоді для деякого розв'язку* $\big(y^*(t),u^*(t)\big)$ *задачі (4), (5) маємо*

1) $J_\varepsilon^*\to J_0^*,\ \varepsilon\to 0,$ *де*

$$J_\varepsilon^* = \inf_{(x,u)\in\Xi_1} J_\varepsilon[x,u], \qquad J_0^* = \inf_{(x,u)\in\Xi_2} J_0[x,u],$$

$\Xi_1,\ \Xi_2$ *— множини допустимих пар задач (1), (2) і (4), (5) відповідно;*

2) *для кожного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - J\left[x_\varepsilon^*, u^*\right]| < \eta,$$

де x_ε^* *— розв'язок задачі Коші (1);*

3) *існує послідовність* $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$, *така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^* \to y(t) \tag{10}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$ *для довільного* $T > 0$, *а*

$$u_{\varepsilon_n}^* \xrightarrow{w} u^* \tag{11}$$

слабко в $L_2([0, \infty))$.

Якщо при цьому усереднена задача (4), (5) має єдиний розв'язок, то збіжності (10), (11) мають місце при всіх $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Згідно з лемою розв'язки для задач (1), (2) та (4), (5) існують.

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо

$$J_\varepsilon\left[x_\varepsilon^*, u_\varepsilon^*\right] \le J_\varepsilon\left[x_\varepsilon^*, 0\right].$$

Завдяки умові 2 маємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t))dt \ge -\frac{C}{j}. \tag{12}$$

При $u = 0$ для розв'язку $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (1) завдяки оцінці (8) отримуємо

$$|x_\varepsilon(t)| \le \left(|x_\varepsilon(0)| + L_1 t\right) e^{L_2 t + \frac{\delta}{2} L_4^2 t}, \quad t \ge 0,$$

а тому з умови 2 та (6) будемо мати

$$J_\varepsilon[x_\varepsilon, 0] = \int\limits_0^\infty e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t))dt \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty e^{-jt} K\left(1 + (|x_\varepsilon(0)| + L_1 t)^p e^{L_2 tp + \frac{\delta}{2} L_4^2 tp}\right) dt \le c_2. \tag{13}$$

З (12) та (13), у свою чергу, маємо

$$\int\limits_0^\infty |u_\varepsilon^*(t)|^2\, dt \le c_2 + \frac{C}{j} =: c_3, \tag{14}$$

де c_3 не залежить ні від ε, ні від u.

Тому послідовність u_ε^* слабко компактна в $L_2([0, +\infty))$.

Нехай $u_{\varepsilon_n}^*$ — слабко збіжна до u_0 послідовність оптимальних керувань, де u_0 — допустиме керування для задачі (4), (5). Нехай $x_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (4) з $u(t) = u_0(t)$. Оскільки зі слабкої збіжності в $L_2([0, \infty))$ випливає слабка збіжність у $L_2([0, T])$

для довільного $T > 0,$ то з теореми 3 із [9] одержуємо, що розв'язок $x^*_{\varepsilon_n}(t)$ задачі Коші (1) рівномірно на $[0, T]$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0.$ Завдяки довільності T звідси випливає поточкова збіжність $x^*_{\varepsilon_n}(t)$ до $x_0(t)$ при кожному $t \geq 0.$

Аналогічний результат отримуємо для розв'язків $x^*_{\varepsilon_n}\big(t, u^*\big)$ і $y^*(t)$ задач Коші (1) та (4) відповідно.

Тоді, з точністю до підпослідовності (див. [8]),

$$J^*_{\varepsilon_n} \leq J^*_0 + J_{\varepsilon_n}[x^*_{\varepsilon_n}, u^*] - J_0[y^*, u^*]. \tag{15}$$

Але

$$\big|J_{\varepsilon_n}[x^*_{\varepsilon_n}, u^*] - J_0[y^*, u^*]\big| \leq \int\limits_0^\infty e^{-jt}\left|A\left(t, x^*_{\varepsilon_n}\left(t, u^*\right) - A\left(t, y^*(t)\right)\right)\right| dt \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0, \tag{16}$$

згідно з теоремою Лебега, оцінкою (8) й умовами росту $A(t,x)$ по $x.$ З іншого боку,

$$J^*_0 \leq J^*_{\varepsilon_n} + J_0\big[y^*, u^*_{\varepsilon_n}\big] - J_{\varepsilon_n}\big[x^*_{\varepsilon_n}, u^*_{\varepsilon_n}\big]. \tag{17}$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot{z}_{\varepsilon_n} \in f(t, z_{\varepsilon_n}) + f_1(z_{\varepsilon_n})u^*_{\varepsilon_n}$$

і

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0) + f_1(x_0)u_0.$$

Застосувавши до них теорему 3 з [9], отримаємо, що $z_n(t)$ рівномірно на $[0, T]$ і поточково на півосі $t \geq 0$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0.$ Звідси та зі збіжності $x^*_{\varepsilon_n}(t)$ до x_0 одержимо

$$x^*_{\varepsilon_n}(t) - z_{\varepsilon_n} \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0,$$

для кожного $t \geq 0.$

Тому

$$\begin{aligned}\big|J_{\varepsilon_n}\big[x^*_{\varepsilon_n}, u^*_{\varepsilon_n}\big] - J_0\left[x_0, u^*_{\varepsilon_n}\right]\big| \leq \int\limits_0^\infty e^{-jt}|A(t, x^*_{\varepsilon_n}(t)) - A(t, x_0(t))|dt+ \\ + \int\limits_0^\infty e^{-jt}|A(t, z_{\varepsilon_n}(t)) - A(t, x_0(t))|dt \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0,\end{aligned} \tag{18}$$

згідно з теоремою Лебега, оцінками (8), (14) й умовами росту $A(t,x)$ по $x.$ Із (15), (17), (18) випливає, що

$$J^*_{\varepsilon_n} \to J^*_0, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Аналогічно до міркувань із [8] приходимо до висновку, що

$$J^*_\varepsilon \to J^*_0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{19}$$

Звідси маємо твердження 1) теореми.

Покажемо, що u_0 — оптимальне керування усередненої задачі. Дійсно,

$$J^*_{\varepsilon_n} = \int\limits_0^\infty e^{-jt} A\left(t, x^*_{\varepsilon_n}(t)\right) dt + \int\limits_0^\infty \left|u^*_{\varepsilon_n}(t)\right|^2 dt. \tag{20}$$

Враховуючи тепер умову напівнеперервності знизу норми в $L_2([0, +\infty))$, (19), теорему Лебега і переходячи до границі в (20) при $\varepsilon_n \to 0$, маємо

$$J^*_0 = \int\limits_0^\infty e^{-jt} A(t, x_0(t)) dt + \varliminf_{\varepsilon_n \to 0} \int\limits_0^\infty \left|u^*_{\varepsilon_n}(t)\right|^2 dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty e^{-jt} A(t, x_0(t)) dt + \int\limits_0^\infty |u_0(t)|^2 dt.$$

Звідси випливає оптимальність пари (x_0, u_0), що й доводить твердження 3) теореми.

Для доведення твердження 2) відзначимо, що

$$\left|J^*_\varepsilon - J_\varepsilon\left[x^*_{\varepsilon_n}, u_0\right]\right| \leq |J^*_\varepsilon - J^*_0| + \left|J_0[x_0, u_0] - J_\varepsilon\left[x^*_{\varepsilon_n}, u_0\right]\right|.$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot{x}_\varepsilon \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon\right) + f_1(x_\varepsilon) u_0(t) \tag{21}$$

і

$$\dot{y}_0 = f_0(y) + f_1(y) u_0(t). \tag{22}$$

Застосуємо теорему 3 з [9] до систем (21), (22), аналогічно до (16) отримаємо

$$J_0[x_0, u_0] - J_\varepsilon\left[x^*_{\varepsilon_n}, u_0\right] \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Звідси та з твердження 1) теореми одержимо твердження 2).

Якщо усереднена задача (4), (5) має єдиний розв'язок, то з наведених вище міркувань випливає, що з довільної послідовності $\left(x^*_{\varepsilon_n}, u^*_{\varepsilon_n}\right)$ виділяється збіжна підпослідовність і всі такі підпослідовності збігаються до однієї й тієї ж межі. Звідси маємо останнє твердження теореми.

Література

1. T. Ważewski, *Systèmes de comande et équations au contingent*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **9**, 151 – 155 (1961).
2. T. Ważewski, *Sur une condition équivalente à l'équation au contingent*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **9**, 865 – 867 (1961).
3. А. Ф. Филлипов, *Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью*, Вестн. МГУ, № 3, 16 – 26 (1967).
4. В. А. Плотников, *Метод усреднения в задачах управления*, Лыбидь, Киев; Одесса (1992).
5. В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы*, Астропринт, Одесса (1999).

6. Т. В. Носенко, *Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 512 – 519 (2008).
7. O. D. Kichmarenko, *Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters*, Int. J. Pure Appl. Math., **115**, Issue 1, 93 – 114 (2017).
8. O. D. Kichmarenko, *Application of the averaging method to the problems of optimal control for ordinary differential equations on the semiaxis*, Ukr. Math. J., **70**, № 5, 739 – 753 (2018).
9. О. Д. Кічмаренко, Н. В. Касімова, Т. Ю. Жук, *Наближений розв'язок задачі оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними коефіцієнтами*, Дослідження в математиці і механіці, **26**, № 1 (2021) (у друці).
10. V. O. Kapustyan, O. A. Kapustyan, O. K. Mazur, *An optimal control problem for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions*, J. Math. Sci. (N.Y.), **201**, № 3, 325 – 334 (2014).
11. O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna, *Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem*, Ukr. Math. J., **63**, № 5, 759 – 767 (2011).
12. O. G. Nakonechniĭ, O. A. Kapustyan, A. O. Chikriĭ, *Approximate guaranteed mean-square estimates for functionals from solutions of parabolic problems with rapidly oscillating coefficients under nonlinear observations*, Cybernet. Systems Anal., **55**, № 5, 785 – 795 (2019).
13. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 2, 196 – 211 (2018).
14. O. M. Stanzhyts'kyi, *Investigation of exponential dichotomy of Itô stochastic systems by using quadratic forms*, Ukr. Math. J., **53**, № 11, 1882 – 1894 (2001).
15. T. V. Nosenko, O. M. Stanzhits'kiĭ, *The averaging method in some optimal control problems*, Nonlinear Oscil. (N. Y.), **11**, № 4, 539 – 547 (2008).
16. O. Lavrova, V. Mogylova, O. Stanzhytskyi, O. Misiats, *Approximation of the optimal control problem on an interval with a family of optimization problems on time scales*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **17**, № 3, 303 – 314 (2017).
17. N. V. Zadoyanchuk, P. O. Kas'yanov, *Faedo – Galerkin method for second-order evolution inclusions with W_λ-pseudomonotone mappings*, Ukr. Math. J., **61**, № 2, 236 – 258 (2009).
18. R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **12**, Issue 5, 1 – 12 (1965).
19. А. Ф. Филлипов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, Москва (1985).

Одержано 15.10.21