УДК 517.9

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

С. М. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т,
вул. Лозановича, 14, кв. 31, Слов'янськ, 84112, Україна,
e-mail: chujko-slav@ukr.net

О. В. Нєсмєлова, К. С. Шевцова

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України,
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84100, Україна,
e-mail: star-o@ukr.net
shevtsova19931993@gmail.com

We find constructive conditions of solvability of linear differential-algebraic boundary-value problems with pulse action and develop a scheme of construction of solutions of these problems.

Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків лінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач із імпульсним впливом.

1. Постановка задачі. Досліджено задачу про побудову розв'язків [1, 2]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$

лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

що задовольняють крайову умову [3]

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{2}$$

де $A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — неперервна вектор-функція, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал:

$$\ell z(\cdot) := \sum_{i=0}^{q} \ell_i z(\cdot) \colon \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^k.$$

Крім того,

$$\ell_i z(\cdot) \colon \mathbb{C}^1[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^k, \quad i = 0, \ldots, \quad p-1, \quad \tau_0 := a,$$

а також

$$\ell_q z(\cdot) \colon \mathbb{C}^1[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^k$$

— лінійні обмежені функціонали. Диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює традиційні постановки нетерових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із імпульсним впливом [1 – 5]. Диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює також постановки різноманітних крайових задач для систем диференціально-алгебраїчних рівнянь [6, 7].

2. Умови розв'язності диференціально-алгебраїчної системи з імпульсним впливом. Припустимо, що для диференціально-алгебраїчної системи (1) з матрицею $A(t)$ сталого рангу виконуються вимоги теореми з [8, с. 15]. Зафіксуємо довільну неперервну вектор-функцію $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a, b]$. Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t,c) := \begin{cases} X_p(t)\, c_0 + K[f(s), \nu_p(s)](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_p(t)\, c_1 + K[f(s), \nu_p(s)](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_p(t)\, c_q + K[f(s), \nu_p(s)](t), & t \in [\tau_p; b], \end{cases}$$

задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) у крайову умову (2), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Q\, c = \alpha - \ell K f(\cdot), \tag{3}$$

де P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*}, крім того,

$$Q := \begin{pmatrix} \ell_0 X_p(\cdot) & \ell_1 X_p(\cdot) & \dots & \ell_q X_p(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times \rho_p(q+1)}.$$

Рівняння (3) розв'язне тоді й лише тоді, коли [2, 9]

$$P_{Q_d^*}\big\{\alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot)\big\} = 0. \tag{4}$$

За умови (4) і лише за неї загальний розв'язок рівняння (1)

$$c = Q^+\big\{\alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot)\big\} + P_{Q_r}\, c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає загальний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + X(t) Q^+\big\{\alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot)\big\} + K[f(s), \nu_p(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p(q+1)} \to \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho_p(q+1) \times r}$ складена з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора

$$P_Q := \begin{pmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ \dots \\ P_Q^{(q)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_p(q+1) \times \rho_p(q+1)}.$$

Крім того, $c_0, c_1, \dots, c_q \in \mathbb{R}^{\rho_p}$ — сталі:

$$c := \operatorname{col}(c_0, \dots, c_q) := Q^+ \left\{\alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot)\right\} \in \mathbb{R}^{\rho_p(q+1)}.$$

Таким чином, доведено таку лему.

Лема. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє вимоги теореми з [8, с. 15]. За умови (4) і лише за неї для фіксованої неперервної вектор-функції* $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a,b]$ *загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)\, c_r + G\left[f(s); \nu_p(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2)

$$G\left[f(s); \nu_p(s); \alpha\right](t) := \begin{cases} X_p(t)c_0 + K[f(s), \nu_p(s)](t), & t \in [a, \tau_1[, \\ X_p(t)c_1 + K[f(s), \nu_p(s)](t), & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_p(t)c_q + K[f(s), \nu_p(s)](t), & t \in [\tau_p, b], \end{cases}$$

де

$$X_r(t) = \begin{cases} X_p(t)P_Q^{(0)}, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_p(t)P_Q^{(1)}, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_p(t)P_Q^{(q)}, & t \in [\tau_p, b]. \end{cases}$$

Зауважимо, що матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом, досліджена в [10], зводиться до вигляду (1), (2), при цьому в статтях [4, 10, 11] досліджено випадок невиродженої системи вигляду (1).

Приклад 1. Вимоги доведеної леми задовольняє диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом

$$A(t)\, z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad t \neq \tau_1, \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \tag{5}$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \tau_1 := 0,$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}^*,$$

крім того,

$$\ell z(\cdot) := \begin{pmatrix} z(-\pi) + z(0) \\ z(-\pi) - z(\pi) \end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

Оскільки виконано умови теореми з [8, с. 15], то система (5) невироджена, і в цьому випадку має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K\left[f(s), \nu_0(s)\right](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$X_0(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix},$$

$$K\left[f(s),\nu_0(s)\right](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\cos t \\ -2\,\sin t \\ 3\,(1+\cos t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi,\pi].$$

У даному випадку матриця $A(t)$ прямокутна, при цьому

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \quad P_A(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

тому знайдений розв'язок залежить від довільної неперервної скалярної функції; покладемо $\nu_0(t) := \sin t$. Загальний розв'язок однорідної частини задачі (5) визначає матриця

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та її ортопроектори

$$P_Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При цьому виконано умову (4) розв'язності задачі (5). Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі з імпульсним впливом (5)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2,$$

де

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -2\sin t & 2\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

а

$$G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 - \sin t - \cos t \\ -2\left(\sin t - \cos t\right) \\ 3 - \sin t + 3\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, 0[,$$

$$G\left[f(s); \nu_0(s); \alpha\right](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 + \sin t - \cos t \\ -2\left(\sin t - \cos t\right) \\ 3 + \sin t + 3\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi],$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (5). Оскільки для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$:

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то матриця $X_r(t)$ прямокутна. Іншими словами, розмірність загального розв'язку однорідної частини задачі (5) менше трьох: $2 = r < n = 3$.

Наслідок 1. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє вимоги теореми з [8, с. 15]. За умови $P_{Q^*} = 0$ для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a, b]$ загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (1), (2) має вигляд*

$$z(t, c_r) = X_r(t)\, c_r + G\left[f(s); \nu_p(s); \alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Приклад 2. Вимоги наслідку 1 задовольняє диференціально-алгебраїчна задача Коші

$$A(t)\, z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau := 0, \quad z(-\pi) = \beta, \tag{6}$$

з невиродженим імпульсним впливом

$$\Delta z(0) := z(+0) - z(-0) = S\, z(-0),$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також вектор-функція $f(t)$ наведені в прикладі 1, крім того,

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Диференціально-алгебраїчну задачу Коші з невиродженим [1, 2]

$$\det(I_3 + S) = 3 \neq 0$$

імпульсним впливом (6) зводять до крайової задачі з імпульсним впливом (1), (2) функціонал

$$\ell z(\cdot) := \begin{pmatrix} z(-\pi) \\ z(+0) - (I_3 + S)\, z(-0) \end{pmatrix}$$

і вектор

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

Розв'язок задачі (6) визначає невироджена матриця

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо єдиний

$$P_Q = P_{Q^*} = 0$$

розв'язок неоднорідної задачі з невиродженим імпульсним впливом (6)

$$z(t) = G\left[f(s); \nu_p(s); \alpha\right](t),$$

де

$$G\left[f(s); \nu_p(s); \alpha\right](t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ 0 \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, 0[,$$

$$G\left[f(s); \nu_p(s); \alpha\right](t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 - \cos t \\ 0 \\ 4 + \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi],$$

— узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (6).

У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції

$$\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a,b]$$

розв'язність диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) суттєво залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_p(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^w,$$

де

$$\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p \times w}[a,b]$$

— довільна неперервна матриця повного рангу. Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє вимоги теореми з [8, c. 15]. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) зобразимо у вигляді

$$K\big[f(s), \nu_p(s)\big](t) = Kf(t) + K\Psi(t)\gamma,$$

де

$$Kf(t) := K\big[A^+(s)f(s)\big](t), \qquad K\Psi(t)\gamma := K\big[P_{A_{\rho_p}}(s)\Psi(s)\big]\gamma.$$

Позначимо матрицю $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{k \times (\rho_p + w)(q+1)}$:

$$\mathcal{D} := \big(\ell_0 X_p(\cdot) \quad \ldots \quad \ell_q X_p(\cdot) \quad \ell_0 K\Psi(\cdot) \quad \ldots \quad \ell_q K\Psi(\cdot)\big).$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t,c) := \begin{cases} X_p(t)\, c_0 + K\Psi(t)\gamma_0 + Kf(t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_p(t)\, c_1 + K\Psi(t)\gamma_1 + Kf(t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ X_p(t)\, c_q + K\Psi(t)\gamma_q + Kf(t), & t \in [\tau_p; b], \end{cases}$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (2), приходимо до рівняння

$$\mathcal{D}\,\check{c} = \alpha - \ell K f(\cdot), \quad \check{c} := \operatorname{col}(c, \gamma) \in \mathbb{R}^{(\rho_p + w)(q+1)}. \tag{7}$$

Рівняння (7) розв'язне тоді й лише тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_d^*}\{\alpha - \ell K f(\cdot)\} = 0. \tag{8}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$; матриця $P_{\mathcal{D}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$, крім того,

$$c := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_q \end{pmatrix}, \qquad \gamma := \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \ldots \\ \gamma_w \end{pmatrix}.$$

За умови (8) і тільки за неї для фіксованої неперервної матриці $\Psi(t)$ частинний розв'язок лінійного алгебраїчного рівняння (7)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+ \{\alpha - \ell K f(\cdot)\}$$

визначає частинний розв'язок крайової задачі (1), (2)

$$z(t,\check{c}) := \begin{cases} X_p(t)\,\check{c}_0 + K\Psi(t)\check{\gamma}_0 + Kf(t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_p(t)\,\check{c}_1 + K\Psi(t)\check{\gamma}_1 + Kf(t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_p(t)\,\check{c}_q + K\Psi(t)\check{\gamma}_q + Kf(t), & t \in [\tau_p;b]. \end{cases}$$

За умови (8) і тільки за неї для фіксованої неперервної матриці $\Psi(t)$ загальний розв'язок однорідної частини лінійного алгебраїчного рівняння (7)

$$\check{c}_0 = P_{\mathcal{D}_r}\, c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає загальний розв'язок

$$z(t,c_r) = X_r(t)\, c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

однорідної частини диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2). Тут

$$X_r(t) := \begin{cases} X_p(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(0)} + K\Psi(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(q+1)}, & t \in [a,\tau_1[, \\ X_p(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(1)} + K\Psi(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(q+2)}, & t \in [\tau_1,\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ X_p(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(q)} + K\Psi(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(2q)}, & t \in [\tau_p,b]. \end{cases}$$

Крім того,

$$P_{\mathcal{D}_r}^{(0)}, P_{\mathcal{D}_r}^{(1)}, \dots, P_{\mathcal{D}_r}^{(q)} \in \mathbb{R}^{\rho_p \times r},$$

$$P_{\mathcal{D}_r}^{(q+1)}, P_{\mathcal{D}_r}^{(q+2)}, \dots, P_{\mathcal{D}_r}^{(2q)} \in \mathbb{R}^{w \times r},$$

— блоки матриці

$$P_{\mathcal{D}_r} := \begin{pmatrix} P_{\mathcal{D}_r}^{(0)} \\ P_{\mathcal{D}_r}^{(1)} \\ \dots \\ P_{\mathcal{D}_r}^{(2q)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\rho_p+w)(q+1)\times r},$$

утвореної з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{D}}$:

$$\mathbb{R}^{(\rho_p+w)(q+1)} \to \mathbb{N}(\mathcal{D}), \quad P_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{(\rho_p+w)(q+1)\times(\rho_p+w)(q+1)}.$$

Таким чином, довели таку теорему.

Теорема. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє вимоги теореми з [8, с. 15]. За умови (8) і лише за неї для фіксованої неперервної матриці* $\Psi(t)$ *загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (1), (2)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)\, c_r + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2)

$$G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t) := \begin{cases} X_p(t)\, \check{c}_0 + K\Psi(t)\check{\gamma}_0 + Kf(t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_p(t)\, \check{c}_1 + K\Psi(t)\check{\gamma}_1 + Kf(t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_p(t)\, \check{c}_q + K\Psi(t)\check{\gamma}_q + Kf(t), & t \in [\tau_p; b], \end{cases}$$

і загальний розв'язок

$$z(t, c_r) = X_r(t)\, c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

однорідної частини диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (1), (2). При цьому

$$X_r(t) := \begin{cases} X_p(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(0)} + K\Psi(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(q+1)}, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_p(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(1)} + K\Psi(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(q+2)}, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_p(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(q)} + K\Psi(t)P_{\mathcal{D}_r}^{(2q)}, & t \in [\tau_p, b]. \end{cases}$$

За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом (1), (2) являє собою критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом (1), (2) являє собою некритичний випадок.

Останнє визначення є узагальненням критичного випадку $(P_{Q^*} = 0)$ для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, отриманої із системи (1) при $A(t) \equiv I_n$ у випадку залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної задачі з імпульсним впливом (1), (2) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$.

Приклад 3. Вимоги теореми задовольняє диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом

$$A(t)\, z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_1, \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \tag{9}$$

де матриці $A(t),\ B(t)$, функція $f(t)$ і функціонал $\ell z(\cdot)$ наведено в прикладі 1; крім того,

$$\alpha := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*.$$

На відміну від прикладу 1 не будемо фіксувати функцію $\nu_p(t)$. Покладемо

$$\nu_p(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^3.$$

При цьому виконано умову (8) розв’язності задачі (5). Загальний розв’язок однорідної частини задачі (5) визначають також блоки матриці $P_{\mathcal{D}_r} \in \mathbb{R}^{12\times 8}$:

$$P_{\mathcal{D}_r}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1-12\pi^2 & 9+18\pi^2 & 1+24\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10+42\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9+54\pi^2 & 1+24\pi^2 & 9+18\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{D}_r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1+24\pi^2 & 9+62\pi^2 & 1-20\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10+42\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9+18\pi^2 & 1-20\pi^2 & 9+62\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{D}_r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 20+84\pi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20+84\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20+84\pi^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{D}_r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -18\pi & -22\pi & 22\pi & \dots & 0 \\ 0 & -4\left(1+6\pi^2\right) & 4+8\pi^2 & -4-8\pi^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 20+84\pi^2 \end{pmatrix},$$

де

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\pi & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо загальний розв’язок неоднорідної задачі з імпульсним впливом (9):

$$z(t, c_\rho) = X_\rho(t)c_\rho + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^3;$$

тут

$$X_\rho(t) = \Big(X_\rho^{(1)}(t) \quad X_\rho^{(2)}(t) \quad X_\rho^{(3)}(t)\Big), \quad t \in [-\pi, 0[,$$

де

$$X_\rho^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \left(5+21\pi^2\right)\sin t \\ 2\left(5+21\pi^2\right)\cos t \\ \left(5+21\pi^2\right)\sin t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 4-3\pi^2+\left(5+21\pi^2\right)\cos t \\ -2\left(5+21\pi^2\right)\sin t \\ 3\pi^2-4+\left(5+21\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 3\pi^2 - 4 + \left(5 + 21\pi^2\right)\cos t \\ -2\left(5 + 21\pi^2\right)\sin t \\ 4 - 3\pi^2 + \left(5 + 21\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix}.$$

Крім того, маємо

$$X_\rho(t) = \left(X_\rho^{(4)}(t) \quad X_\rho^{(5)}(t) \quad X_\rho^{(6)}(t) \right), \quad t \in [0, \pi],$$

де

$$X_\rho^{(4)}(t) = \begin{pmatrix} \left(5 + 21\pi^2\right)\sin t \\ 2\left(5 + 21\pi^2\right)\cos t \\ \left(5 + 21\pi^2\right)\sin t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(5)}(t) = \begin{pmatrix} 11\pi^2 - 22\pi\, t + \left(13\pi^2 + 1\right)\cos t \\ -2\left(5 + 21\pi^2\right)\sin t \\ 22\pi\, t - 11\pi^2 + \left(29\pi^2 + 9\right)\cos t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(6)}(t) = \begin{pmatrix} 22\pi\, t - 11\pi^2 + \left(29\pi^2 + 9\right)\cos t \\ -2\left(5 + 21\pi^2\right)\sin t \\ 11\pi^2 - 22\pi\, t + \left(13\pi^2 + 1\right)\cos t \end{pmatrix}.$$

Матриця $X_\rho(t)$ складена з $\rho = 3$ лінійно незалежних стовпців матриці $X_r(t)$. Узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (9) має вигляд

$$G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t) = \frac{1}{2\left(5 + 21\pi^2\right)} \begin{pmatrix} 7 + 33\pi^2 \\ 0 \\ 3 + 9\pi^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, 0[,$$

а також

$$G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t) =$$

$$= \frac{1}{2\left(5 + 21\pi^2\right)} \begin{pmatrix} 15 + 61\pi^2 + 4\pi t + 2\left(9 + 37\pi^2\right)\cos t \\ -4\left(5 + 21\pi^2\right)\sin t \\ -5 - 19\pi^2 - 4\pi t + 2\left(1 + 5\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

На відміну від прикладу 1 для фіксованої функції $\Psi(t)$ матриця $X_\rho(t)$ невироджена на всьому відрізку $[-\pi, \pi]$.

Наслідок 2. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє вимоги теореми з [8, с. 15]. У некритичному випадку за умови $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ для фіксованої неперервної матриці $\Psi(t)$ загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)\, c_r + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає узагальнений оператор Гріна $G[f(s); \psi(s); \alpha](t)$ диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (1), (2).

Приклад 4. Вимоги наслідку 2 задовольняє диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом

$$A(t)\, z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau := 0, \quad \ell z(\cdot) := z(-\pi) - z(\pi) = 0, \tag{10}$$

де матриці $A(t),\ B(t)$ і функція $f(t)$ наведені в прикладі 1.

Покладемо $\nu_p(t) := \Psi(t)\gamma,\ \Psi(t) := \big(1\ \ \sin t\ \ \cos t\big)$. При цьому виконано умову $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ розв'язності крайової задачі з імпульсним впливом (10). Загальний розв'язок однорідної частини задачі (10) визначають також блоки матриці $P_{\mathcal{D}_r} \in \mathbb{R}^{12\times 9}$:

$$P^{(0)}_{\mathcal{D}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 1+2\pi^2 & 2\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 \\ 1+4\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi^2 & 1+2\pi^2 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{(1)}_{\mathcal{D}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 1+6\pi^2 & -2\pi^2 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 0 \\ 1+4\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi^2 & 1+6\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}_{\mathcal{D}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2+8\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+8\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+8\pi^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{(3)}_{\mathcal{D}_r} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+8\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+8\pi^2 \end{pmatrix},$$

де

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі з імпульсним впливом (10):

$$z(t, c_\rho) = X_\rho(t)c_\rho + G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^3;$$

тут

$$X_\rho(t) = \Big(X^{(1)}_\rho(t) \quad X^{(2)}_\rho(t) \quad X^{(3)}_\rho(t)\Big), \quad t \in [-\pi, 0[,$$

де

$$X^{(1)}_\rho(t) = \begin{pmatrix} \big(1+4\pi^2\big)\sin t \\ 2\,\big(1+4\pi^2\big)\cos t \\ \big(1+4\pi^2\big)\sin t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \\ -2\left(1 + 4\pi^2\right)\sin t \\ -1 + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} -1 + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \\ -2\left(1 + 4\pi^2\right)\sin t \\ 1 + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix}.$$

Крім того,

$$X_\rho(t) = \Big(X_\rho^{(4)}(t) \quad X_\rho^{(5)}(t) \quad X_\rho^{(6)}(t)\Big), \quad t \in [0, \pi],$$

де

$$X_\rho^{(4)}(t) = \begin{pmatrix} \left(1 + 4\pi^2\right)\sin t \\ 2\left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \\ \left(1 + 4\pi^2\right)\sin t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(5)}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi^2 - 4\pi t + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \\ -2\left(1 + 4\pi^2\right)\sin t \\ -1 - 4\pi^2 + 4\pi t + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix},$$

$$X_\rho^{(6)}(t) = \begin{pmatrix} -1 - 4\pi^2 + 4\pi t + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \\ -2\left(1 + 4\pi^2\right)\sin t \\ 1 + 4\pi^2 - 4\pi t + \left(1 + 4\pi^2\right)\cos t \end{pmatrix}.$$

Узагальнений оператор Гріна має вигляд

$$G\big[f(s); \psi(s); \alpha\big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ -2\sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

У випадку незалежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a, b]$ твердження теореми приводить до твердження доведеної вище леми.

Доведена теорема узагальнює традиційні результати, отримані для нетерових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із імпульсним впливом [1 – 5, 12 – 14], а також для різноманітних крайових задач для систем диференціальних і диференціально-алгебраїчних рівнянь [6 – 8, 15, 16]. Запропоновану у статті схему дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач із імпульсним впливом (1), (2) з матрицею $A(t)$ сталого рангу аналогічно до [17] можна перенести на лінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі з імпульсним впливом із матрицею $A(t)$ змінного рангу.

Література

1. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).

2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, De Gruyter, Berlin (2016).
3. S. M. Chuiko, *A generalized Green operator for a boundary-value problem with impulse action*, Differ. Equ., **37**, № 8, 1189 – 1193 (2001).
4. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, *Linear Noetherian boundary value problems for differential systems with an impulse action*, Ukr. Math. J., **44**, № 4, 504 – 508 (1992).
5. С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием*, Динам. системы, **4(32)**, № 1-2, 89 – 100 (2014).
6. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman (Adv. Publ. Program), Boston, Mass.-London (1980).
7. Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Наука Новосибирск (1998).
8. S. M. Chuiko, *On reducing the order in a differential-algebraic system*, J. Math. Sci. (N.Y.), **235**, № 1, 2 – 14 (2018).
9. А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, Москва (1977).
10. S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba, *A matrix differential-algebraic boundary value problem with impulse action*, J. Math. Sci. (N.Y.), **238**, № 3, 333 – 343 (2019).
11. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, *Линейные нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с импульсным воздействием*, Докл. НАН Украины, № 4, 21 – 30 (2016).
12. S. M. Chuiko, *A Green operator for boundary value problems with an impulsive effect*, Dokl. Math., **64**, № 1, 41 – 43 (2001).
13. S. Sčhwabik, *Differential equations with interface conditions*, Časopis Pěst. Mat., **105**, 391 – 410 (1980).
14. S. M. Chuiko, *Least-squares method in the theory of ill-posed linear boundary-value problems with pulse action*, Ukr. Math. J., **62**, № 5, 794 – 803 (2010).
15. S. M. Chuiko, *Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem*, Nonlinear Oscil. (N. Y.), **9**, № 3, 405 – 422 (2006).
16. S. M. Chuiko, A. S. Chuiko, *On approximate solution of periodic boundary-value problems with delay by the least-squares method in the critical case*, Nonlinear Oscil. (N.Y.), **14**, № 3, 445 – 460 (2012).
17. S. M. Chuiko, *Differential-algebraic boundary value problems with variable rank of leading coefficient matrix*, J. Math. Sci. (N.Y.), **259**, № 1, 10 – 22 (2021).

Одержано 21.12.21