УДК 517.98

# НЕЛОКАЛЬНА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

**В. В. Городецький, Р. С. Колісник, Н. М. Шевчук**

*Чернівец. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича,*
*вул. Університетська, 28, Чернівці, 58012, Україна,*
*e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua*
*r.kolisnyk@chnu.edu.ua,*
*n.shevchuk@chnu.edu.ua*

We prove the correct solvability of a multipoint nonlocal in time problem for the evolutionary equation with the fractional differentiation operator and the initial function, which is an element of the space of generalized functions of the distribution type. The analytical representation of the solution is given. We investigate the behavior of the solution with unlimited growth of the time variable (stabilization of the solution).

Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання і початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів, наведено аналітичне зображення розв'язку, досліджено поведінку розв'язку при необмеженому зростанні часової змінної (стабілізація розв'язку).

Різні класичні функціональні простори (наприклад, соболєвські, аналітичних функцій, нескінченно диференційовних функцій і розподілів Шварца) можна розуміти як позитивні й негативні простори відносно $L_2$, побудовані за функціями від оператора диференціювання або множення на незалежну змінну, або як проєктивні та індуктивні границі таких просторів [1]. У згаданій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача у півпросторі $t > 0$ для диференціально-операторного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де $A = |D_x|^\alpha$, $D_x = d/dx,\ \alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$ — дробовий степінь модуля оператора диференціювання. Такий оператор можна розглядати як аналог оператора дробового диференціювання Вейля, який використовується у теорії періодичних функцій [2, 3]. Досліджувана задача є узагальненням задачі Коші у випадку, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0,\ \{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty),\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty,\ \{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа (якщо $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Вказана умова трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо $f$ — узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

для довільної функції $\varphi$ з основного простору (тут $\langle f, \varphi \rangle$ позначає дію функціонала $f$ на основну функцію). Така нелокальна за часом задача відноситься до багатоточкових задач для диференціально-операторних рівнянь (огляд праць, присвячених нелокальним задачам для диференціально-операторних рівнянь і рівнянь з частинними похідними, див., наприклад, у [4]).

У цій роботі доведено коректну розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів, наведено аналітичне зображення розв'язку, досліджено поведінку розв'язку $u(t,x)$ при $t \to +\infty$ (стабілізація розв'язку). Встановлено, що кожний псевдодиференціальний оператор (у випадку однієї незалежної змінної), побудований за однорідною функцією порядку $\alpha$, не диференційовною у точці $0$, збігається зі звуженням оператора $A$ на деякий локально-опуклий топологічний простір, який є проєктивною границею банахових просторів, неперервно вкладених один у один.

**1. Простори основних і узагальнених функцій.** ***1.1. Простір $\Phi_\alpha$.*** Нехай $\alpha$ — фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\ldots\}$, $\alpha_0 := [\alpha]+1$, ($[\alpha]$ — ціла частина числа $\alpha$), $M(x) := 1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$,

$$\Phi_\alpha := \left\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall k\in\mathbb{Z}_+ \;\; \exists c_k = c_k(\varphi)>0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}\colon M^{\alpha_0+k}(x)|\varphi^{(k)}(x)|\le c_k\right\}.$$

У $\Phi_\alpha$ вводимо структуру зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=0}^{p} M^{\alpha_0+k}(x)|\varphi^{(k)}(x)|\right\}, \quad \varphi\in\Phi_\alpha, \quad p\in\mathbb{Z}_+,$$

при цьому [5, с. 103 – 110] $\Phi_\alpha$ — повний досконалий зліченно-нормований простір із топологією проєктивної границі банахових просторів $\Phi_{p,\alpha}\colon \Phi_\alpha = \lim_{p\to\infty}\operatorname{pr}\Phi_{p,\alpha} = \bigcap_{p=0}^{\infty}\Phi_{p,\alpha}$ ($\Phi_{p,\alpha}$ — поповнення $\Phi_\alpha$ за $p$-ю нормою), вкладення $\Phi_{p+1,\alpha}\subset\Phi_{p,\alpha}$, $p\in\mathbb{Z}_+$, є неперервними.

Прикладом функції, яка є елементом простору $\Phi_\alpha$, є функція

$$\varphi(x) = \left(1+x^2\right)^{-([\alpha]+1)/2}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad \alpha\in(1,+\infty)\setminus\{2,3,\ldots\}.$$

Використовуючи метод індукції, переконуємося в тому, що похідні цієї функції мають вигляд

$$\varphi^{(k)}(x) = P_k(x)\left(1+x^2\right)^{-(k+([\alpha]+1)/2)}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

де $P_k$ — многочлен степеня $k$. Звідси отримуємо, що всі норми $\|\varphi\|_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$, є скінченними.

Множина $B\subset\Phi_\alpha$ називається *обмеженою*, якщо

$$\forall p\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists c_p>0 \quad \forall\varphi\in B\colon \|\varphi\|_p\le c_p$$

(тобто кожна норма простору $\Phi_\alpha$ обмежена на множині $B$ своєю сталою).

Послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu\ge 1\}\subset\Phi_\alpha$ збігається у $\Phi_\alpha$ до функції $\varphi\in\Phi_\alpha$ при $\nu\to+\infty$, якщо $\|\varphi_\nu-\varphi\|_p\to 0$ при $\nu\to+\infty$ для кожного $p\in\mathbb{Z}_+$.

Зауважимо (див. [5, с. 108 – 110]), що у просторі $\Phi_\alpha$ визначено й неперервну операцію зсуву аргументу $T_\xi\colon \varphi(x)\to\varphi(x+\xi)$, $\varphi\in\Phi_\alpha$, та операцію диференціювання. Оскільки

$\Phi_\alpha$ — досконалий простір, то з загальних результатів теорії досконалих просторів [6, с. 171 – 172] випливає, що операція зсуву аргументу у просторі $\Phi_\alpha$ не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна (тобто граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) - - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x),\ h \to 0,$ виконуються у сенсі збіжності за топологією простору $\Phi_\alpha$).

***1.2. Простір $\Psi_\alpha$.*** Функції з простору $\Phi_\alpha$ абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}$, тому на них визначено операцію перетворення Фур'є $F$:

$$F[\varphi](\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{i\sigma x}\,dx, \quad \varphi \in \Phi_\alpha.$$

Символом $\Psi_\alpha$ позначимо Фур'є-образ простору $\Phi_\alpha: \Psi_\alpha = F[\Phi_\alpha]$. Очевидно, кожна функція $F[\varphi],\ \varphi \in \Phi_\alpha,$ обмежена й неперервна на $\mathbb{R}$. Розглянемо основні властивості функцій з простору $\Psi_\alpha$ (див. [7, с. 197 – 210]):

1. Якщо $\varphi \in \Phi_\alpha$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$.

2. Якщо $\varphi \in \Phi_\alpha$, то $F[\varphi]$ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція.

Зауважимо, що в точці $\sigma = 0$ функція $F[\varphi]$ може бути не диференційовною. Наприклад, функція $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1},\ x \in \mathbb{R},$ є елементом простору $\Phi_\alpha,\ \alpha \in (1,2).$ Але відомо, що $F[\varphi](\sigma) = \pi \exp\{-|\sigma|\},\ \sigma \in \mathbb{R}.$ Ця функція не диференційовна в точці $\sigma = 0.$ Інший приклад: функція $\varphi(x) = (1+x^2)^{-m},\ x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},$ є елементом простору $\Phi_\alpha,\ \alpha \in \in (2m-1, 2m).$ При цьому (див. [8, с. 364 – 367])

$$F[\varphi](\sigma) = \frac{2\pi}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k-1)!}{k!(m-k-1)!2^{m+k}} |\sigma|^{m-k-1} e^{-|\sigma|}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Ці приклади характеризують елементи з $\Phi_\alpha$ як прообрази Фур'є негладких у точці $0$ функцій.

3. У функції $D_\sigma^k F[\varphi](\sigma),\ \varphi \in \Phi_\alpha\ \sigma \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim_{\sigma \to \pm 0} D_\sigma^k F[\varphi](\sigma)$.

4. Перетворення Фур'є неперервно та бієктивно відображає $\Phi_\alpha$ на $\Psi_\alpha$.

5. Функції з простору $\Psi_\alpha$ задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_k = c_k(\psi) > 0 : \sup_{\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| \sigma^k \psi^k(\sigma) \right| \leq c_k, \quad \psi \in \Psi_\alpha.$$

У $\Psi_\alpha$ вводимо структуру зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\psi\|_p := \sup_{\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} \left| \sigma^k \psi^{(k)}(\sigma) \right| \right\}, \quad \psi \in \Psi_\alpha, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

При цьому $\Psi_\alpha$ — повний зліченно-нормований простір, $\Psi_\alpha = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Psi_{p,\alpha}$, де $\Psi_{p,\alpha}$ — поповнення простору $\Psi_\alpha$ за нормою $\|\cdot\|_p$, вкладення $\Psi_{p+1,\alpha} \subset \Psi_{p,\alpha},\ p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним.

Функція $g \in C(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (або $g \in C^\infty(\mathbb{R})$) називається *мультиплікатором* у просторі $\Psi_\alpha$, якщо $g\psi \in \Psi_\alpha$ для довільної функції $\psi \in \Psi_\alpha$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з $\Psi_\alpha$ у $\Psi_\alpha$.

***1.3. Простір $\Phi'_\alpha$.*** Символом $\Phi'_\alpha$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на $\Phi_\alpha$ зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі

$\Phi_\alpha$ введено топологію проєктивної границі банахових просторів $\Phi_\alpha$, причому вкладення $\Phi_{p+1,\alpha} \subset \Phi_{p,\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, то [1, с. 53 – 54]

$$\Phi'_\alpha = \left( \lim_{p\to\infty} \operatorname{pr} \Phi_{p,\alpha} \right)' = \lim_{p\to\infty} \operatorname{ind} \Phi'_{p,\alpha}.$$

Отже, якщо $f \in \Phi'_\alpha$, то $f \in \Phi'_{p,\alpha}$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких $p$ називається порядком $f$, при цьому

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \Phi_\alpha,$$

де $c = \|f\|_p$ — норма функціонала $f$ у просторі $\Phi'_{p,\alpha}$. Простір $\Phi'_\alpha$ повний.

***1.4. Згортка в $\Phi'_\alpha$.*** Якщо $f \in \Phi'_\alpha$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, то згортка $f * \varphi$ існує й визначається формулою (див. [5, с. 112 – 118])

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x} \check{\varphi}(\xi) \rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi),$$

при цьому $f * \varphi$ — звичайна нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція (тут $\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle$ позначає дію функціонала $f$ на основну функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію аргументу $\xi$).

Нехай $f \in \Phi'_\alpha$. Якщо $f * \varphi \in \Phi_\alpha$ для довільної функції $\varphi \in \Phi_\alpha$ й із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі $\Phi_\alpha$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі $\Phi_\alpha$, то функціонал $f$ називається *згортувачем* у просторі $\Phi_\alpha$.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'_\alpha$ визначимо за допомогою співвідношення $\langle F[f], F[\varphi] \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle$, $\varphi \in \Phi_\alpha$. Звідси отримуємо, що $F[f] \in \Psi'_\alpha$ при $f \in \Phi'_\alpha$. Якщо $f$ — згортувач у просторі $\Phi_\alpha$, то

$$F[f * \varphi] = F[f] * F[\varphi] \quad \forall \varphi \in \Phi_\alpha,$$

при цьому $F[f]$ — мультиплікатор у просторі $\Psi_\alpha$ (див. [7, с. 219]).

Наприклад, $\delta$-функція Дірака ($\delta: \langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0)$) — згортувач у просторі $\Phi_\alpha$:

$$\delta * \varphi = \langle \delta_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle = T_{-x}\check{\varphi}(0) = \check{\varphi}(-x) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \Phi_\alpha,$$

функція $F[\delta] = 1$ — мультиплікатор у просторі $\Psi_\alpha$.

**2. Дробове диференціювання у просторі $\Phi_\alpha$.** Розглянемо оператор $A = |D_x|^\alpha = |iD_x|^\alpha$, $D_x = d/dx$, який є дробовим степенем модуля оператора диференціювання. $A$ — невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, оскільки $iD_x$ — самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор з областю визначення $\mathcal{D}(iD_x) = \{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) \mid \exists \varphi' \in L_2(\mathbb{R})\}$. Якщо $E_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — спектральна функція оператора $iD_x$, то внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів

$$A\varphi = |D_x|^\alpha \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^\alpha \, dE_\lambda \varphi,$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in L_2(\mathbb{R}) \colon \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^{2\alpha} \, d(E_\lambda \varphi, \varphi) < \infty \right\}.$$

Врахувавши вигляд спектральної функції $E_\lambda$ оператора $iD_x$ (див. [9, с. 421]), знайдемо, що для довільної функції $\varphi \in \Phi_\alpha \subset L_2(\mathbb{R})$ виконується співвідношення

$$E_\lambda \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-it\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} F[\varphi](\sigma) e^{-it\sigma}\, d\sigma.$$

Звідси отримуємо

$$dE_\lambda \varphi = \frac{1}{2\pi} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda.$$

Отже,

$$A\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^\alpha F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda}\, d\lambda = F^{-1}\big[|\lambda|^\alpha F[\varphi]\big], \quad \varphi \in \Phi_\alpha. \tag{1}$$

Для обґрунтування співвідношення (1) доведемо таке твердження.

**Лема 1.** *Функція* $\chi(\sigma) = |\sigma|^\alpha,\ \sigma \in \mathbb{R},$ *— мультиплікатор у просторі* $\Psi_\alpha$.

***Доведення.*** Візьмемо довільну функцію $\psi \in \Psi_\alpha$ і доведемо, що $\chi \cdot \psi \in \Psi_\alpha$. Для цього досить довести, що для $\sigma \neq 0$

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_p > 0 \colon \sum_{k=0}^{p} |\sigma|^k \left| (\chi(\sigma)\psi(\sigma))^{(k)} \right| \leq c_p.$$

Нехай $\sigma \colon |\sigma| \geq 1$. Тоді

$$|\sigma|^k \left| (\chi(\sigma)\psi(\sigma))^{(k)} \right| = |\sigma|^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left| (|\sigma|^\alpha)^{(l)} \right| \left| \psi^{(k-l)}(\sigma) \right| \leq$$

$$\leq |\sigma|^k \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(l-1))| |\sigma|^{\alpha-l} \left| \psi^{(k-l)}(\sigma) \right| =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l a_l |\sigma|^\alpha |\sigma|^{k-l} \left| \psi^{(k-l)}(\sigma) \right|, \quad a_l = |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(l-1))|.$$

Далі скористаємося нерівністю з [7, с. 206]:

$$\left| \sigma^k \psi^{(k)}(\sigma) \right| \leq \frac{b_k}{|\sigma|^{1+[\alpha]}}, \quad |\sigma| \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

яка виконується для довільної функції $\psi \in \Psi_\alpha$. Тоді для $\sigma \colon |\sigma| \geq 1$

$$|\sigma|^k \left| (\chi(\sigma)\psi(\sigma))^{(k)} \right| \leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l a_l b_{k-l} \frac{|\sigma|^\alpha}{|\sigma|^{1+[\alpha]}} \leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l a_l b_{k-l} \equiv \tilde{c}_k.$$

Отже, для $\sigma \colon |\sigma| \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{p} |\sigma|^k \left| (\chi(\sigma)\psi(\sigma))^{(k)} \right| \leq \sum_{k=0}^{p} \tilde{c}_k \equiv \tilde{c}_p.$$

Якщо $\sigma \neq 0\colon |\sigma| < 1$, то

$$|\sigma|^k \left|(\chi(\sigma)\psi(\sigma))^{(k)}\right| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l a_l |\sigma|^{k-l} \left|\psi^{(k-l)}(\sigma)\right|.$$

З оцінки $|\sigma|^k |\psi^{(k)}(\sigma)| \le c_k,\ \sigma \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}_+$ (див. властивість 5 з п. 1), випливає нерівність

$$|\sigma|^k \left|(\chi(\sigma)\psi(\sigma))^{(k)}\right| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l a_l c_{k-l} \equiv \tilde{\tilde{c}}_p, \quad \sigma \neq 0, \quad |\sigma| < 1.$$

Отже,

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_p > 0\colon \|\chi\psi\|_p \le c_p,$$

тобто $\chi\psi \in \Psi_\alpha$. Оператор $\Psi_\alpha \ni \psi \to \chi\psi \in \Psi_\alpha$ є обмеженим, оскільки кожну обмежену множину простору $\Psi_\alpha$ він відображає в обмежену множину цього ж простору (доведення цієї властивості здійснюється за схемою, наведеною вище). Оскільки у просторі $\Psi_\alpha$ як у просторі з першою аксіомою зліченності клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів, то звідси випливає, що функція $\chi(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}$, — мультиплікатор у просторі $\Psi_\alpha$.

Нехай $\hat{A} := A|_{\Phi_\alpha}$ — звуження оператора $A$ на $\Phi_\alpha$. З леми 1 отримуємо, що оператор $\hat{A}$ відображає $\Phi_\alpha$ в $\Phi_\alpha$, є лінійним та неперервним і при цьому збігається на $\Phi_\alpha$ з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}[\chi(\sigma)F]$, побудованим за функцією-символом $\chi(\sigma) = |\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

***Зауваження 1.*** Якщо $a(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}$, — однорідна порядку $\alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$ функція, неперервна на $\mathbb{R}$ і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то, як відомо, $a(\sigma)$ має вигляд $a(\sigma) = c|\sigma|^\alpha,\ c = \mathrm{const}$. Отже, з наведених вище міркувань випливає, що у випадку однієї незалежної змінної кожний псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією $a(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}$, збігається з оператором $\hat{A} = A|_{\Phi_\alpha}$.

**3. Нелокальна за часом задача.** Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \hat{A}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{2}$$

де $\hat{A}$ — оператор дробового диференціювання у просторі $\Phi_\alpha$, розглянутий у п. 2.

Під розв'язком рівняння (2) розуміємо функцію $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, яка: 1) неперервно диференційовна за змінною $t$; 2) $u(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$; 3) $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (2).

Для рівняння (2) сформулюємо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \ldots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \Phi_\alpha, \tag{3}$$

де $u(0,x) = \lim_{t\to+0} u(t,x),\ x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ \{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty),\ \{t_1, \ldots, t_m\} \subset$ $\subset (0,+\infty)$ — фіксовані числа, $0 < t_1 < \ldots < t_m < +\infty,\ \mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$.

Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) =$ $= F^{-1}[v(t,\sigma)]$. Для функції $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром $\sigma$:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + |\sigma|^\alpha v(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{4}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Розв'язок задачі (4), (5) визначає формула

$$v(t,\sigma) = \tilde{f}(\sigma) \exp\{-t|\sigma|^{\alpha}\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^{\alpha}\}\right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, розв'язком задачі (2), (3) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, де

$$Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma), \qquad Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t|\sigma|^{\alpha}\},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^{\alpha}\}\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, отримуємо

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi\right) e^{-i\sigma x}\, d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)}\, d\sigma\right) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi)\, d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Коректність проведених вище перетворень випливає з властивостей функції $Q(t,\sigma)$ як функції змінної $\sigma$, які ми наведемо далі.

**Лема 2.** *При фіксованому $t > 0$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна за змінною $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для її похідних справедливі оцінки*

$$|D_{\sigma}^{s} Q(t,\sigma)| \le b_s t^{\gamma s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-t|\sigma|^{\alpha}\}, \quad \sigma \ne 0, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

*де стала $b_s = b_s(\alpha) > 0$ не залежить від $t$,*

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad 0 < t \le 1, \\ 1, & \textit{якщо} \quad t > 1, \end{cases}$$

$$\omega_s = \begin{cases} \alpha, & \textit{якщо} \quad \sigma \neq 0, \quad |\sigma| < 1, \\ \alpha s, & \textit{якщо} \quad |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

***Доведення.*** Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції:

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \frac{d^{\tilde{m}} F(g)}{dg^{\tilde{m}}} \sum \frac{s!}{\tilde{m}_1! \ldots \tilde{m}_l!} \times$$

$$\times \left(\frac{d}{d\sigma}\, g(\sigma)\right)^{\tilde{m}_1} \left(\frac{1}{2!}\, \frac{d^2}{d\sigma^2}\, g(\sigma)\right)^{\tilde{m}_2} \ldots \left(\frac{1}{l!}\, \frac{d^l}{d\sigma^l}\, g(\sigma)\right)^{\tilde{m}_l}, \tag{7}$$

де знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння

$$\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_2 + \ldots + l\tilde{m}_l = s, \quad \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \ldots + \tilde{m}_l = \tilde{m}.$$

У цій формулі покладемо $F = e^g,\ g = -t|\sigma|^\alpha$. Тоді

$$|D_\sigma^s \exp\{-t|\sigma|^\alpha\}| \leq e^{-t|\sigma|^\alpha} \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \sum \frac{s!}{\tilde{m}_1! \ldots \tilde{m}_l!}\, \Lambda, \quad \sigma \neq 0, \quad s \in \mathbb{N},$$

де

$$\Lambda := \left| \left(\frac{d}{d\sigma}\, (-t|\sigma|^\alpha)\right)^{\tilde{m}_1} \left(\frac{1}{2!}\, \frac{d^2}{d\sigma^2}\, g(\sigma)\right)^{\tilde{m}_2} \ldots \left(\frac{1}{l!}\, \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma)\right)^{\tilde{m}_l} \right|, \quad \sigma \neq 0.$$

Оскільки $\alpha > 1$, то виконуються нерівності

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(l-1)) \leq \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+l) \leq \alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \ldots l\alpha = \alpha^l l!.$$

Врахувавши останню нерівність, знайдемо оцінку для $\Lambda$:

$$\Lambda \leq t^{\tilde{m}_1} \alpha^{\tilde{m}_1} |\sigma|^{(\alpha-1)\tilde{m}_1} t^{\tilde{m}_2} \alpha^{2\tilde{m}_2} |\sigma|^{(\alpha-2)\tilde{m}_2} \ldots t^{\tilde{m}_l} \alpha^{l\tilde{m}_l} |\sigma|^{(\alpha-l)\tilde{m}_l} =$$

$$= t^{\tilde{m}_1 + \ldots + \tilde{m}_l} \alpha^{\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_2 + \ldots + l\tilde{m}_l} |\sigma|^{\alpha(\tilde{m}_1 + \ldots + \tilde{m}_l) - (\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_2 + \ldots + l\tilde{m}_l)} =$$

$$= t^{\tilde{m}} \alpha^s |\sigma|^{\alpha\tilde{m} - s}, \quad \sigma \neq 0.$$

Отже,

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| = |D_\sigma^s \exp\{-t|\sigma|^\alpha\}| \leq$$

$$\leq \alpha^s s! \sum_{\tilde{m}=1}^{s} t^{\tilde{m}} |\sigma|^{\alpha\tilde{m} - s} \exp\{-t|\sigma|^\alpha\} \leq$$

$$\leq c_s t^{\gamma s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-t|\sigma|^\alpha\}, \quad \sigma \neq 0, \tag{8}$$

де $c_s = c_s(\alpha) > 0$,

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 < t \leq 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad t > 1, \end{cases} \qquad \omega_s = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо} \quad \sigma \neq 0, \quad |\sigma| < 1, \\ \alpha s, & \text{якщо} \quad |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

З урахуванням формули Лейбніца диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$D_\sigma^s Q(t,\sigma) = D_\sigma^s(Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)) = \sum_{p=0}^{s} C_s^p Q_1^{(p)}(t,\sigma) D_\sigma^{s-p} Q_2(\sigma).$$

Для проведення подальших оцінок знову скористаємося формулою (7), у якій покладемо $F = \varphi^{-1},\ \varphi = R$, де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\} = Q_2^{-1}(\sigma).$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(\varphi) = R^{-1}$ і

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| = \left|\sum_{\tilde m=1}^{s} \frac{d^{\tilde m}}{dR^{\tilde m}}\, R^{-1} \sum \frac{s!}{\tilde m_1! \ldots \tilde m_l!} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d}{d\sigma}\, R(\sigma)\right)^{\tilde m_1} \ldots \left(\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{d\sigma^l}\, R(\sigma)\right)^{\tilde m_l}\right|, \quad \sigma \neq 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Нехай $|\sigma| \geq 1$. Врахувавши вигляд функції $R$ та оцінки (8), знайдемо

$$\left|\frac{1}{j!}\,\frac{d^j}{d\sigma^j}\, R(\sigma)\right| \leq \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \left|\frac{d^j}{d\sigma^j}\, e^{-t_k|\sigma|^\alpha}\right| \leq$$

$$\leq \frac{c_j}{j!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k t_k^{\gamma j} |\sigma|^{\alpha j - j} e^{-t_k|\sigma|^\alpha} \leq$$

$$\leq c_j \sum_{k=1}^{m} \mu_k\, \frac{t_k^{\gamma j}}{t_k^j}\, |\sigma|^{-j} \equiv \beta_j |\sigma|^{-j}, \quad j \in \{1, \ldots l\}$$

$\Bigg($тут враховано нерівність $|\sigma|^{\alpha j} \exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\} \leq \dfrac{j!}{t_k^j},\ j \in \{1, \ldots, l\}\Bigg)$.

Отже, якщо $|\sigma| \geq 1$, то правильною є оцінка

$$\Delta_0 := \left|\left(\frac{d}{d\sigma}\, R(\sigma)\right)^{\tilde m_1} \ldots \left(\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{d\sigma^l}\, R(\sigma)\right)^{\tilde m_l}\right| \leq$$

$$\leq \beta_1^{\tilde m_1} |\sigma|^{-\tilde m_1} \beta_2^{\tilde m_2} |\sigma|^{-2\tilde m_2} \ldots \beta_l^{\tilde m_l} |\sigma|^{-l\tilde m_l} \leq$$

$$\leq \beta^{\tilde m_1 + \ldots + \tilde m_l} |\sigma|^{-(\tilde m_1 + 2\tilde m_2 + \ldots + l\tilde m_l)} = \beta^{\tilde m} |\sigma|^{-s},$$

де $\beta = \max\{\beta_1, \ldots, \beta_{\tilde m}\}$. Якщо $\sigma \neq 0,\ |\sigma| < 1$, то

$$\left|\frac{1}{j!}\,\frac{d^j}{d\sigma^j}\, R(\sigma)\right| \leq c_j t_m^{\gamma j} |\sigma|^{-j} \exp\{-t_1|\sigma|^\alpha\} \leq \tilde c_j |\sigma|^{-j}, \quad j \in \{1, \ldots, l\}$$

(тут враховано нерівності $0 < t_1 < \ldots < t_m$). Отже, $\Delta \le \beta^{\tilde{m}}|\sigma|^{-s}$. Крім того,

$$\frac{d^{\tilde{m}}}{dR^{\tilde{m}}}\, R^{-1} = (-1)^{\tilde{m}}\tilde{m}! R^{-(\tilde{m}+1)}.$$

Оскільки $\exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\} \le 1 \ \forall \sigma \in \mathbb{R},\ k \in \{1, \ldots, m\}$, то

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\left\{-t_k|\sigma|^\alpha\right\} \ge \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k.$$

За умовою, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, тому

$$R^{-1}(\sigma) \le \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} \equiv \beta_0 > 0, \quad \left|\frac{d^{\tilde{m}}}{dR^{\tilde{m}}}\, R^{-1}\right| \le \beta_0^{\tilde{m}+1}\tilde{m}!.$$

Урахувавши останні нерівності, отримаємо

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le s! \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \beta_0^{\tilde{m}+1}\beta^{\tilde{m}}\tilde{m}!|\sigma|^{-s} \equiv \tilde{c}_s|\sigma|^{-s}, \quad \sigma \ne 0. \tag{9}$$

Тоді (див. (8), (9))

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \sum_{p=0}^{s} C_s^p t^{\gamma p}|\sigma|^{\omega_p - p}\tilde{C}_{s-p}c_p|\sigma|^{-(s-p)}\exp\{-t|\sigma|^\alpha\} \le$$

$$\le b_s t^{\gamma s}|\sigma|^{\omega_s - s}\exp\left\{-t|\sigma|^\alpha\right\}, \quad \sigma \ne 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Лему 2 доведено.

***Зауваження 2.*** З оцінок (6), (8) випливає, що $\{Q_1(t,\cdot), Q(t,\cdot)\} \subset \Psi_\alpha$ при кожному $t > 0$. Звідси та з обмеженості функції $Q_2$ на $\mathbb{R}$ дістаємо також, що $Q_2$ — мультиплікатор у просторі $Q_2$.

***Зауваження 3.*** Міркуючи аналогічно з попереднім, одержимо, що при $t > 1$ похідні функції

$$Q\left(t, t^{-1/\alpha}\sigma\right) = \exp\left\{-|\sigma|^\alpha\right\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\left\{-t^{-1}t_k|\sigma|^\alpha\right\}\right)^{-1}$$

задовольняють нерівності

$$\left|D_\sigma^s Q\left(t, t^{-1/\alpha}\sigma\right)\right| \le L_s|\sigma|^{\omega_s - s}\exp\left\{-|\sigma|^\alpha\right\}, \quad \sigma \ne 0, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

де сталі $L_s > 0$ не залежать від $t$. Якщо $0 < t \le 1$, то

$$\left|D_\sigma^s Q\left(t, t^{-1/\alpha}\sigma\right)\right| \le L_s' t^{-s}|\sigma|^{\omega_s - s}\exp\left\{-|\sigma|^\alpha\right\}, \quad \sigma \ne 0, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Розглянемо тепер функцію

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-ix\sigma}\, d\sigma = F^{-1}[Q(t,\sigma)].$$

Із зауваження 2 випливає, що $G(t,\cdot) \in \Phi_\alpha = F^{-1}[\Psi_\alpha]$ при кожному $t > 0$, тобто

$$|G(t,x)| \le c_k(t)(1+|x|)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad (t,x) \in \Omega, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Виділимо в оцінках функції $G(t,x)$ та її похідних (за змінною $x$) залежність від параметра $t$.

**Лема 3.** *Для функції $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, та її похідних (за змінною $x$) виконуються оцінки*

$$\left|D_x^k G(t,x)\right| \le c_k t^{\lambda(k)} \left(t^{1/\alpha} + |x|\right)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

*де сталі $c_k > 0$ не залежать від $t$,*

$$\lambda(k) = \begin{cases} -((\alpha + (\alpha-1)([\alpha]+k))/\alpha), & \text{якщо} \quad 0 < t \le 1, \\ [\alpha]/\alpha, & \text{якщо} \quad t > 1. \end{cases}$$

***Доведення.*** Нехай $k = 0$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $\sigma = t^{-1/\alpha} y$, одержимо таке зображення функції $G$:

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} t^{-1/\alpha} \int_{\mathbb{R}} Q\left(t, t^{-1/\alpha} y\right) \exp\left\{-it^{-1/\alpha} xy\right\} dy = t^{-1/\alpha} G_0(t,z),$$

де

$$G_0(t,z) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q\left(t, t^{-1/\alpha} y\right) \exp\{-izy\} dy, \quad z = t^{-1/\alpha} x.$$

Далі вважатимемо, що $t > 1$. Якщо $z \ne 0$, то, інтегруючи частинами $s = 1 + [\alpha]$ разів, подамо $G_0$ у вигляді

$$G_0(t,z) = (2\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|y| \ge \varepsilon} Q\left(t, t^{-1/\alpha} y\right) e^{-izy} dy =$$

$$= (2\pi) \frac{c^s}{z^s} \lim_{\varepsilon \to +0} \left[ \int_{|y| \ge \varepsilon} D_y^s Q\left(t, t^{-1/\alpha} y\right) e^{-izy}\, dy + r(\varepsilon, z) \right],$$

де символом $r(\varepsilon, z)$ позначено позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $D_y^l Q(t, t^{-1/\alpha} y) e^{-izy}$, $0 \le l \le s-1$, зі значеннями у точках $y = \varepsilon$, $y = -\varepsilon$. Із оцінок (10) випливає, що для $y \ne 0$, $|y| < 1$, справджуються нерівності

$$\left|D_y^l Q\left(t, t^{-1/\alpha} y\right)\right| \le L_s |y|^{\alpha - l}, \quad l \in \{1, \ldots, s-1\}, \quad s = 1 + [\alpha],$$

$$\left|Q\left(t, t^{-1/\alpha} y\right)\right| \le \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1},$$

причому $\alpha - l \ge \alpha - [\alpha] = \{\alpha\}$. Звідси дістаємо, що $\lim_{\varepsilon \to +0} r(\varepsilon, z) = 0$ у кожній точці $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль, оскільки

$$\lim_{y \to \pm\infty} |D_y^l Q(t, t^{-1/\alpha} y)| = 0, \quad l \in \{0, 1, \ldots, s-1\}.$$

Врахувавши оцінки похідних функції $Q(t, t^{-1/\alpha} y)$ (див. (10)) знайдемо, що

$$|G_0(t,z)| \le \frac{\tilde{\tilde{c}}_s}{|z|^s} \int\limits_0^{+\infty} y^{\omega_s - s} \exp\{-y^\alpha\}\, dy =$$

$$= \frac{\tilde{\tilde{c}}_s}{|z|^s} \left[ \int\limits_0^1 y^{\alpha - s} \exp\{-y^\alpha\}\, dy + \int\limits_1^{+\infty} y^{\alpha s - s} \exp\{-y^\alpha\}\, dy \right].$$

Підінтегральна функція $y^{\alpha-s}\exp\{-y^\alpha\}$ має інтегровну особливість у точці $y = 0$, оскільки $\alpha - s = \alpha - (1 + [\alpha]) = \{\alpha\} - 1$. Отже,

$$|G_0(t,z)| \le c|z|^{-(1+[\alpha])}, \quad z \ne 0, \quad t > 1, \tag{13}$$

стала $c > 0$ не залежить від $t$. Оскільки

$$\left| Q_2(t^{-1/\alpha} y) \right| \le \left( \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1} \quad \forall t > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

то

$$|G_0(t,z)| \le (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| Q(t, t^{-1/\alpha} y) \right| dy \le$$

$$\le (2\pi)^{-1} \left( \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-|y|^\alpha\}\, dy = c_0$$

для $t > 0$ і $z \in \mathbb{R}$. Звідси та з (13) отримуємо, що для $t \ge 1$ і $z \in \mathbb{R}$

$$|G_0(t,z)| \le c_1 (1 + |z|)^{-(1+[\alpha])}, \quad z = t^{-1/\alpha} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Справді, якщо $|z| \le 1,\ |x| \le t^{1/\alpha}$, то

$$(1 + |z|)^{1+[\alpha]} |G_0(t,z)| \le 2^{1+[\alpha]} c_0 \equiv c_1.$$

Якщо $|z| > 1$ ($|x| > t^{1/\alpha}$), то, скориставшись оцінкою (13), знайдемо

$$(1 + |z|)^{1+[\alpha]} |G_0(t,z)| = \sum_{l=0}^{1+[\alpha]} C_{1+[\alpha]}^l |z|^l |G_0(t,z)| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{1+[\alpha]} C_{1+[\alpha]}^l |z|^l \frac{c}{|z|^{1+[\alpha]}} \le 2^{1+[\alpha]} c \equiv c_2.$$

Отже,

$$|G_0(t,z)| \le \tilde{c}(1 + |z|)^{-(1+[\alpha])} = \tilde{c}(1 + t^{-1/\alpha}|x|)^{-(1+[\alpha])} =$$

$$= \tilde{c} t^{(1+[\alpha])/\alpha} \left( t^{1/\alpha} + |x| \right)^{-(1+[\alpha])}, \quad t > 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$|G(t,x)| = t^{-1/\alpha}|G_0(t,z)| \le \tilde{c}t^{[\alpha]/\alpha}\left(t^{1/\alpha}+|x|\right)^{-(1+[\alpha])}, \quad t>1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Нехай $k\in\mathbb{N},\ t>1$. Маємо

$$D_x^k G(t,x) = (2\pi)^{-1}t^{-(1+k)/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}} Q\left(t,t^{-1/\alpha}y\right)y^k\exp\{-izy\}\,dy, \quad z=t^{-1/\alpha}x.$$

Міркуючи аналогічно тому, як це було у випадку $k=0$, та інтегруючи частинами $s=$ $=1+[\alpha]+k$ разів, знаходимо

$$D_x^k G(t,x) = \frac{c_s}{z^s}\,t^{-(1+k)/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}} D_y^s\left(Q(t,t^{-1/\alpha}y)y^k\right)e^{-izy}dy, \quad z\ne 0.$$

Враховуючи формулу диференціювання добутку двох функцій, одержуємо, що оцінка похідних функції $G$ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду

$$\frac{|\tilde{c}_s|}{|z|^s}\left[\int\limits_0^\infty y^k\left|D_y^sQ\left(t,t^{-1/\alpha}y\right)\right|dy + ks\int\limits_0^\infty y^{k-1}\left|D_y^{s-1}Q\left(t,t^{-1/\alpha}y\right)\right|dy+\right.$$
$$\left.+k(k-1)\,\frac{s(s-1)}{2!}\int\limits_0^\infty y^{k-2}\left|D_y^{s-2}Q\left(t,t^{-1/\alpha}y\right)\right|dy+\ldots\right]. \tag{14}$$

Кожен із інтегралів у (14) має інтегровну особливість у точці $y=0$. Справді, розглянемо один із інтегралів вигляду

$$\int\limits_0^\infty y^{k-p}\left|D_y^{s-p}Q\left(t,t^{-1/\alpha}y\right)\right|dy, \quad 0\le p\le k, \quad s=1+[\alpha]+k, \quad t>1.$$

З оцінок (10) маємо, що в околі точки $y=0$ підінтегральна функція допускає оцінку

$$y^{k-p}\left|D_y^{s-p}Q\left(t,t^{-1/\alpha}y\right)\right| \le L_{s-p}y^{k-p}y^{\alpha-(s-p)} =$$
$$= L_s y^{k-p+\alpha-(1+[\alpha]+k-p)} = L_s y^{\alpha-[\alpha]-1} = L_s y^{\{\alpha\}-1},$$

звідки й випливає збіжність відповідного інтеграла.

Оцінюючи аналогічно до попереднього (випадок $k=0$) кожен інтеграл у сумі (14), приходимо до оцінки

$$\left|D_x^k G(t,x)\right| \le c_k t^{([\alpha]+k)/\alpha}\left(t^{1/\alpha}+|x|\right)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad t>1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Випадок $0<t\le 1$ розглядається аналогічно з використанням оцінок (11). У результаті маємо оцінки (12).

Лему 3 доведено.

***Зауваження 4.*** З властивостей функції $Q(t,\sigma)$ випливає неперервна диференційовність функції $G(t,x)$ як функції аргументу $t \in (0,+\infty)$. Крім того, оскільки

$$Q(t,\sigma) = F[G(t,x)] = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x) e^{ix\sigma}\, dx,$$

то

$$Q(t,0) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x)\, dx.$$

***Зауваження 5.*** Оскільки $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\} \le \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1.$$

Використовуючи поліноміальну формулу, знаходимо

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k|\sigma|^\alpha}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\left(\mu_1 e^{-t_1|\sigma|^\alpha}\right)^{r_1} \ldots \left(\mu_m e^{-t_m|\sigma|^\alpha}\right)^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\, Q_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda,\sigma) = e^{-\lambda|\sigma|^\alpha}$. Звідси отримуємо таке зображення для функції $G(t,x)$:

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m} e^{-(\lambda+t)|\sigma|^\alpha} e^{-ix\sigma}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\, \tilde{G}(t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t, x),$$

де

$$\tilde{G}(\lambda+t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda+t)|\sigma|^\alpha} e^{-ix\sigma} = F^{-1}[Q_1(\lambda+t,\sigma)].$$

**Лема 4.** *Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра $t$ зі значеннями у просторі $\Phi_\alpha$ диференційовна по $t$.*

***Доведення.*** Із властивості неперервності перетворення Фур'є випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра $t$ зі значеннями у просторі $\Psi_\alpha$ диференційовна по $t$. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Gamma_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\, [Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)] \to \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується у сенсі збіжності за топологією простору $\Psi_\alpha$. Зауважимо, що

$$\Gamma_{\Delta t}(\sigma) = -|\sigma|^\alpha Q(t+\theta\Delta t, \sigma), \quad 0<\theta<1,$$

$$\Gamma_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) = |\sigma|^{2\alpha} Q(t+\theta_1\Delta t)\theta\Delta t, \quad 0<\theta_1<1.$$

Врахувавши властивості функції $Q(t,\sigma)$, доводимо, що

$$\left\| \Gamma_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} Q \right\|_p \to 0, \quad \Delta t \to 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+.$$

***Наслідок 1.*** *Справедлива рівність*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t} \quad \forall f \in \Phi'_\alpha, \quad t>0.$$

***Доведення.*** За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f * G(t,x) = \left\langle f_\xi, \check{G}(t,\xi) \right\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ (f * G(t+\Delta t,\cdot)) - (f * G(t,\cdot)) \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t} \left[ T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi) \right] \right\rangle.$$

На підставі леми 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot) \right] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\cdot), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $\Phi_\alpha$, тому з урахуванням неперервності функціонала $f$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot) \right] \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\xi) \right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t,\xi) \right\rangle = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

що й потрібно було довести.

**Лема 5.** *У просторі $\Phi'_\alpha$ виконуються співвідношення*

*1)* $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2], \ t \to +0;$

*2)* $$\mu G(t,\cdot) - \sum\nolimits_{k=1}^m \mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, \quad t \to +0 \tag{15}$$

*($\delta$ — дельта-функція Дірака).*

***Доведення.*** 1. Оскільки оператор Фур'є $F: \Phi'_\alpha \to \Psi'_\alpha$ є неперервним, то для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot), \quad t \to +0,$$

у просторі $\Psi'_\alpha$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in \Psi_\alpha$ і, скориставшись тим, що $Q_2$ — мультиплікатор у просторі $\Psi_\alpha$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\begin{aligned}\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\psi\rangle &= \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma = \\ &= \langle 1, Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle = \langle Q_2,\psi\rangle.\end{aligned}$$

Звідси випливає твердження 1 леми 5.

2. Врахувавши твердження 1 леми 5, знайдемо

$$\begin{aligned}&\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^m \mu_k F^{-1}[Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot)] = \\ &= F^{-1}\left[\mu Q_2 - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\right] = \\ &= F^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right) Q_2(\cdot)\right] = \\ &= F^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)^{-1}\right] = F^{-1}[1] = \delta.\end{aligned}$$

Отже, співвідношення (15) виконується у просторі $\Phi'_\alpha$.

Лему 5 доведено.

***Зауваження 6.*** Якщо $\mu = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, то задача (2), (3) перетворюється в задачу Коші для рівняння (2). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1\ \forall \sigma \in \mathbb{R},\ G(t,x) = F^{-1}[e^{-t|\sigma|^\alpha}]$ і $G(t,\cdot) \to F^{-1}[1] = \delta$ при $t \to +0$ у просторі $\Phi'_\alpha$.

***Наслідок 2.*** *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in \Phi'_{\alpha,*}, \quad (t,x) \in \Omega$$

*(тут $\Phi'_{\alpha,*}$ — клас згортувачів у просторі $\Phi_\alpha$). Тоді у просторі $\Phi'_\alpha$ виконується граничне співвідношення*

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k,\cdot) \to f, \quad t \to +0. \tag{16}$$

***Доведення.*** Доведемо, що граничне співвідношення

$$F\left[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\omega(t_k,\cdot)\right] \to F[f], \quad t \to +0, \tag{17}$$

виконується у просторі $\Psi'_\alpha$. Оскільки $f \in \Phi'_{\alpha,*},\ G(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0,$ то

$$F[\omega(t,\cdot)] = F[f * G(t,\cdot)] = F[f] \cdot F[G(t,\cdot)] = F[f] \cdot Q(t,\cdot).$$

Тому потрібно довести, що

$$F[f]\left(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q(t_k,\cdot)\right) \to F[f]$$

при $t \to +0$ у просторі $\Psi'_\alpha$. Тому що $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $\Psi'_\alpha$ (див. доведення твердження 1 леми 5), маємо

$$\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)Q_2(\cdot) = 1$$

у просторі $\Psi'_\alpha$.

Таким чином, співвідношення (17), а отже, й (16) виконується у відповідних просторах.

Наслідок 2 доведено.

***Зауваження 7.*** Функція $G(t,x),\ (t,x) \in \Omega,$ є розв'язком рівняння (2). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x) = -F^{-1}\left[|\sigma|^\alpha Q(t,\sigma)\right],$$

$$\hat{A}G(t,x) = F^{-1}\left[|\sigma|^\alpha F[F^{-1}Q(t,\cdot)]\right] = F^{-1}[|\sigma|^\alpha Q(t,\sigma)].$$

Звідси отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x) + \hat{A}G(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega,$$

що й потрібно було встановити.

Надалі функцію $G(t,x),\ (t,x) \in \Omega,$ називатимемо *фундаментальним розв'язком* багатоточкової за часом задачі для рівняння (2).

З наслідку 2 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (2) можна сформулювати так: знайти функцію $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega,$ яка задовольняє рівняння (2) та умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in \Phi'_{\alpha,*} \tag{18}$$

(граничне співвідношення (18) розглядається у просторі $\Phi'_\alpha$, обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m,\ t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (2), (3)).

**Теорема 1.** *Нелокальна багатоточкова за часом задача (2), (18) коректно розв'язна, розв'язок визначається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

$u(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ *при кожному* $t > 0$.

***Доведення.*** Переконаємось у тому, що функція $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (2). Справді (див., наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,x)\right) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}$$

і

$$\hat{A}u(t,x) = F^{-1}\big[|\sigma|^\alpha F[f * G(t,\cdot)]\big].$$

Оскільки $f$ — згортувач у просторі $\Phi_\alpha$, то

$$F[f * G(t,\cdot)] = F[f]F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Отже,

$$\hat{A}u(t,x) = F^{-1}[|\sigma|^\alpha Q(t,\sigma)F[f]] = -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,Q(t,\cdot)F[f]\right] =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}\,G(t,\cdot)\right]F[f]\right] = -F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\right]\right] = -f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (2).

З наслідку 2 випливає, що $u$ задовольняє умову (18) у вказаному сенсі. Зазначимо також, що $u$ неперервно залежить від функції $f \in \Phi'_{\alpha,*}$, оскільки операція згортки має властивість неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (2), (18) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \hat{A}^* v(t,x), \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \quad 0 \le t < t_0 < +\infty, \tag{19}$$

$$v(t,\cdot)\Big|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \Phi'_{\alpha,*}, \tag{20}$$

де $\hat{A}^*$ — звуження спряженого оператора з оператором $\hat{A}$ на простір $\Phi_\alpha$. Умову (20) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (19), (20) коректно розв'язна, розв'язок визначається формулою $v(t,x) = \psi * G^*(t,x),\ G^*(t,x) = F^{-1}[\exp\{(t-t_0)|\sigma|^\alpha\}],\ v(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0} : \Phi'_{\alpha,*} \to \Phi_\alpha$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \Phi'_{\alpha,*}$ розв'язок задачі (19), (20). Оператор $Q^t_{t_0}$ лінійний і неперервний, визначений для довільних $t$ і $t_0$ таких, що $0 \le t < t_0 < +\infty$, і має властивості

$$\forall \psi \in \Phi'_{\alpha,*} : \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} = \hat{A}^* Q^t_{t_0}\psi, \quad \lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi,$$

(границя розглядається в просторі $\Phi'_\alpha$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачі (2), (18), який розумітимемо як регулярний функціонал із простору $\Phi'_{\alpha,*} \supset \Phi_\alpha$. Доведемо, що задача (2), (18) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $\Phi'_{\alpha,*}$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (2) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) = 0$ (при кожному $t \in (0,\infty)$). Застосуємо функціонал $u$ до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \Phi_\alpha$, де $\psi$ — довільно фіксований елемент із простору $\Phi_\alpha \subset \Phi'_{\alpha,*}$. Диференціюючи по $t$ та використовуючи рівняння (2), (19), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\right\rangle =$$

$$= \left\langle -\hat{A}u,\, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle + \left\langle u, \hat{A}^*\, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle =$$

$$= -\left\langle \hat{A}u,\, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle + \left\langle Au,\, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Отже, $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle = \mathrm{const} \equiv c, \quad c = c(t_0),$$

у довільній точці $t_0 \in (0,+\infty)$. А тому, якщо у (18) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \langle u(t_k,\cdot),\psi\rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$. Справді, припустимо, що це не так. Наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення $\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\alpha_k = 0$, де $\alpha_k = c_k/c_0$, тобто $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k\alpha_k$. Оскільки $\alpha_k$ — довільні сталі, а за умовою $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m$ — фіксовані параметри, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то отримана суперечність доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно доводимо, що $c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle = 0$ для довільного $\psi \in \Phi_\alpha$, тобто $u(t_0,x)$ — нульовий функціонал із простору $\Phi'_{\alpha,*}$. Оскільки $t_0 \in (0,+\infty)$ і $t_0$ вибране довільним чином, то $u(t,x) = 0$ для всіх $t \in (0,+\infty)$.

Теорему 1 доведено.

**Теорема 2.** *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *— розв'язок задачі (2), (18) з початковою функцією* $f \in \Phi'_{\alpha,*}$, *яка має обмежений носій (тобто* $\operatorname{supp} f$ *— обмежена множина в* $\mathbb{R}$*). Тоді* $u(t,x) \to \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *рівномірно на* $\mathbb{R}$.

***Доведення.*** Нехай $\operatorname{supp} f \subset [a_1,b_1] \subset [a_2,b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\varphi \in \Phi_\alpha$ таку, що $\varphi(x) = 1$, $x \in [a_1,b_1]$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [a_2,b_2]$. Така функція існує, оскільки простір $\Phi_\alpha$ містить фінітні функції. Подамо функцію $u(t,x)$ у вигляді

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \varphi(\xi)G(t,x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t,x-\xi)\rangle\,,$$

де $\gamma = 1-\varphi$. Оскільки $\operatorname{supp}(\gamma(\xi)G(t,x-\xi)) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$, то

$$u(t,x) = t^{-1/\alpha}\left\langle f_\xi, t^{1/\alpha}\varphi(\xi)G(t,x-\xi)\right\rangle.$$

Узагальнена функція $f \in \Phi'_{\alpha,*} \subset \Phi'_\alpha = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \Phi'_{p,\alpha}$ має скінченний порядок, тому

$$|u(t,x)| \leq t^{-1/\alpha} \|f\|_p \|\Gamma_{t,x}\|_p,$$

де $\Gamma_{t,x}(\xi) = t^{1/\alpha}\varphi(\xi)G(t, x-\xi)$. Зазначимо, що $\Gamma_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$. Для доведення сформульованого твердження достатньо встановити, що $\Gamma_{t,x}(\xi)$ обмежена за нормою простору $\Phi_{p,\alpha}$, тобто що $\|\Gamma_{t,x}\|_p \leq c_p$, де стала $c_p > 0$ не залежить від $t$ та $x$ ($t > 1,\ x \in \mathbb{R}$). Для цього скористаємось оцінкою

$$\left|D^l_\xi G(t, x-\xi)\right| \leq c_l t^{[\alpha]/\alpha} \left(t^{1/\alpha} + |x-\xi|\right)^{-(1+[\alpha]+l)} \leq$$
$$\leq c_l t^{[\alpha]/\alpha} t^{-(1+[\alpha]+l)/\alpha} \leq c_l t^{-1/\alpha}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \tag{21}$$

яка виконується для $t > 1,\ x \in \mathbb{R},\ \xi \in [a_2, b_2]$ і випливає з (12). Оскільки $\Gamma_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$, то, урахувавши (21), отримаємо

$$\|\Gamma_{t,x}\|_p = t^{1/\alpha} \sup_{\xi \in [a_2,b_2]} \left\{ \sum_{k=0}^{p} (1+|\xi|)^{1+[\alpha]+k} \left|(\varphi(\xi)G(t,x-\xi))^{(k)}\right| \right\} \leq$$
$$\leq t^{1/\alpha} \sup_{\xi \in [a_2,b_2]} \left\{ \sum_{k=0}^{p} (1+c)^{1+[\alpha]+k} \sum_{l=0}^{k} C^l_k \left|D^l_\xi \varphi(\xi)\right| \left|D^l_\xi G(t,x-\xi)\right| \right\} \leq c_p,$$

де $c = \max\{|a_2|, |b_2|\}$ (тут враховано, що $|\varphi^{(l)}(\xi)| \leq c'_l,\ l \in \{0, 1, \ldots, k\},\ \xi \in [a_2, b_2]$). Отже,

$$|u(t,x)| \leq \tilde{c}_p t^{-1/\alpha}, \quad t > 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\tilde{c}_p = c_p\|f\|_p$, звідки й випливає, що $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Теорему 2 доведено.

Наприклад, якщо в умові (18) $f = \delta \in \Phi'_{\alpha,*},\ \operatorname{supp}\delta = \{0\}$, то $u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$. Цей же результат у цьому випадку безпосередньо випливає з оцінки (12) (при $c = 0$) або з оцінки

$$|G(t,x)| = (2\pi)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \right| \leq (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |Q(t,\sigma)| d\sigma \leq$$
$$\leq (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-t|\sigma|^\alpha} |Q_2(\sigma)|\, d\sigma \leq$$
$$\leq (2\pi)^{-1} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-t|\sigma|^\alpha}\, d\sigma =$$
$$= c_0 t^{-1/\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|^\alpha}\, dy = c'_0 t^{-1/\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**4. Висновки.** Встановлено, що звуження оператора $A = |D_x|^\alpha,\ \alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, \ldots\}$ на простір $\Phi_\alpha$ збігається з псевдодиференціальним оператором, побудованим за функцією-символом $\chi(\sigma) = |\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$, не диференційовною у точці $\sigma = 0$. Це дозволило застосувати перетворення Фур'є при дослідженні нелокальної багатоточкової задачі для еволюційного рівняння з таким оператором. Доведено коректну розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів. Така постановка задачі дозволяє розширити клас початкових функцій, оскільки кожну функцію, яка має степеневу особливість у точці 0, можна регуляризувати у просторі розподілів типу Шварца (тобто таку функцію можна розуміти як регулярний функціонал). Одержано зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, при цьому досліджено властивості такого фундаментального розв'язку, встановлено, що при виконанні певного обмеження на початкову функцію розв'язок задачі стабілізується до нуля рівномірно на $\mathbb{R}$ при $t \to +\infty$.

**Література**


1. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
2. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
3. В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
4. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною*, Видавничий дім "Родовід", Чернівці (2015).
5. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
7. В. В. Городецький, *Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку*, Рута, Чернівці (2005).
8. В. В. Городецький, Я. М. Дрінь, М. І. Нагнибіда, *Узагальнені функції. Методи розв'язування задач*, Книги — XXI, Чернівці (2011).
9. В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев, *Методы решения задач по функциональному анализу*, Высш. шк., Киев (1990).


*Одержано 13.08.21*