

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ШАРІ

А. П. Громик

*Поділ. держ. аграрно-техн. ун-т
вул. Шевченка, 13, Кам'янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: garon74@gmail.com*

І. М. Конет, Т. М. Пилипюк

*Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка
вул. Огієнка, 61, Кам'янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: konet51@ukr.net,
t-myh@i.ua*

By using the method of classic integral and hybrid integral transformations together with the method of main solutions (influence matrices and Green's matrices), for the first time, we construct unique exact analytical solutions of parabolic initial boundary-value problems of mathematical physics for a piecewise homogeneous wedge-shaped cylindrically circular layer.

За допомогою методу класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі.

1. Вступ. Теорія крайових і мішаних (початково-крайових) задач для різних типів диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який зараз інтенсивно розвивається. Актуальність теорії обумовлена як значущістю результатів для розвитку багатьох розділів сучасної математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, механіки, медицини, економіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для параболічних рівнянь і їхніх систем одержано в [1 – 10] та в працях інших відомих вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На сьогодні досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач у сенсі Адамара.

© А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, 2021

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливальних механіки деформованого твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й у неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями або, зокрема, кусково-сталими [11 – 13].

Відомо, що крім *методу відокремлення змінних* (методу Фур'є) та його узагальнень одним із важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в однорідних середовищах є *метод інтегральних перетворень*, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач за допомогою їхніх інтегральних зображень.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їхніх розв'язків виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, породжених відповідними гібридними диференціальними операторами, якщо на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [14 – 18].

У цій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 = 0, \right. \\ \left. R_{n+1} = +\infty, \varphi \in (0; \varphi_0), \varphi_0 < 2\pi, z \in (-l_1; l_2), l_j \geq 0, l_1 + l_2 \neq 0 \right\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [19]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \\ + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1\right) u_j \Big|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi), \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2\right) u_j \Big|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi), \quad (4)$$

$$p_j \geq 0, \quad p_1 + p_2 \neq 0, \quad j = \overline{1, n+1},$$

одними з крайових умов на гранях клина [17]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z), \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (8)$$

та умовами спряження [18]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right] \Big|_{r=R_k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, \quad c_{1k} c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\},$$

$$g(r, \varphi, z) = \{g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z)\},$$

$$w^1(t, r, \varphi) = \{w_1^1(t, r, \varphi), w_2^1(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^1(t, r, \varphi)\},$$

$$w^2(t, r, \varphi) = \{w_1^2(t, r, \varphi), w_2^2(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^2(t, r, \varphi)\},$$

$$g_{kj}(t, r, z), \quad w_{kj}(t, r, z), \quad k = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = (u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z))$$

— шукана дійсна неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними (r, φ, z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$, $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$, $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де λ_1^k , λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;

3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k$, $\beta_{11}^k = 1$, $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$, $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна початково-крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі [17].

3. Основні результати. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують, а задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених далі прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [17, 18, 20].

Згідно з [20] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0; \varphi_0)$ за формулами

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi), \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0},$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi), \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0},$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi), \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12},$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi), \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11},$$

$\varepsilon_0^{ik} = 0$, $\varepsilon_m^{ik} = 1$ при $ik = 11, 12, 21$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $\varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_m^{22} = 1$ при $m = 1, 2, 3, \dots$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik} \left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}, \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0} [f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)], \quad \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0},$$

$$\Phi_{m,21} = -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0), \quad \Phi_{m,22} = -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) ставить у відповідність тривимірним крайовим задачам (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \{(t, r, z) \mid t > 0; r \in I_n^+; z \in (-l_1; l_2)\}$$

класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t, r, z), \quad (13)$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t, r, z)|_{t=0} = g_{jm,ik}(r, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad (15)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_{jm,ik} \Big|_{z=-l_1} = w_{jm,ik}^1(t, r), \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_{jm,ik} \Big|_{z=l_2} = w_{jm,ik}^2(t, r) \quad (16)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \quad (17)$$

де

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z), \quad \nu_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної крайової задачі спряження (13)–(17) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1; l_2)$ щодо змінної z [17]:

$$\Lambda_s[f(z)] = \int_{-l_1}^{l_2} f(z) v_s(z + l_1) dz \equiv f_s, \quad (18)$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{v_s(z + l_1)}{\|v_s(z + l_1)\|^2} \equiv f(z), \quad (19)$$

$$\Lambda_s \left[\frac{d^2 f}{dz^2} \right] = -\gamma_s^2 f_s + v_s(0) \left(-\frac{df}{dz} + p_1 f \right) \Big|_{z=-l_1} + v_s(l) \left(\frac{df}{dz} + p_2 f \right) \Big|_{z=l_2}, \quad l = l_1 + l_2. \quad (20)$$

У формулах (18)–(20) використовується спектральна функція (ядро перетворення)

$$v_s(z + l_1) = \frac{\gamma_s \cos \gamma_s(z + l_1) + p_1 \sin \gamma_s(z + l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}},$$

квадрат норми якої

$$\|v_s(z + l_1)\|^2 \equiv \int_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z + l_1) dz = \frac{l}{2} + \frac{(p_1 + p_2)(\gamma_s^2 + p_1 p_2)}{2(\gamma_s^2 + p_1^2)(\gamma_s^2 + p_2^2)}.$$

При цьому

$$v_s(0) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}}, \quad v_s(l) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_2^2}},$$

$\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння $\operatorname{ctg}(\gamma l) = \frac{\gamma^2 - p_1 p_2}{\gamma(p_1 + p_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі (13)–(17) задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r) \mid t > 0; r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B -параболічного типу 2-го порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{jm,ik,s}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[u_{jm,ik,s}] + (a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2) u_{jm,ik,s} = \\ = P_{jm,ik,s}(t, r), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik,s}(t, r)|_{t=0} = g_{jm,ik,s}(r), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial^p u_{1m,ik,s}}{\partial r^p} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^p u_{n+1,m,ik,s}}{\partial r^p} \right|_{r=+\infty} = 0, \quad p = 0, 1, \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned} \left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik,s} - \right. \\ \left. - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik,s} \right] \Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (24)$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя [7],

$$P_{jm,ik,s}(t, r) = G_{jm,ik,s}(t, r) + a_{zj}^2 v_s(0) w_{jm,ik}^1(t, r) + a_{zj}^2 v_s(l) w_{jm,ik}^2(t, r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є – Бесселя на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [18]:

$$H_{(n)}[f(r)] = \int_0^{+\infty} f(r) V(r, \lambda) \sigma(r) dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \quad (25)$$

$$H_{(n)}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) V(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \equiv f(r), \quad (26)$$

$$H_{(n)}[B_{(m,ik)}[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda) \sigma_k r dr. \tag{27}$$

У формулах (25)–(27) використано спектральну функцію $V(r, \lambda)$, вагову функцію $\sigma(r)$, спектральну щільність $\Omega(\lambda)$ і гібридний диференціальний оператор Бесселя, одержані у [18]:

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \Theta(r - R_{j-1}) \Theta(R_j - r) B_{\nu_{jm,ik}} + a_{n+1}^2 \Theta(r - R_n) B_{\nu_{n+1,m,ik}},$$

де $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда, $a_k^2 = a_{zk}^2$, α_k^2 — деякі сталі.

Запишемо диференціальні рівняння (21) і початкові умови (22) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_{1s}^2\right) u_{1m,ik,s}(t, r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_{2s}^2\right) u_{2m,ik,s}(t, r) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1,s}^2\right) u_{n+1,m,ik,s}(t, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1m,ik,s}(t, r) \\ P_{2m,ik,s}(t, r) \\ \dots \\ P_{n+1,m,ik,s}(t, r) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1m,ik,s}(t, r) \\ u_{2m,ik,s}(t, r) \\ \dots \\ u_{n+1,m,ik,s}(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1m,ik,s}(r) \\ g_{2m,ik,s}(r) \\ \dots \\ g_{n+1,m,ik,s}(r) \end{bmatrix}, \tag{29}$$

де $q_{js}^2 = a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2$, $j = \overline{1, n+1}$, $s = 1, 2, 3, \dots$

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\dots] = \left[\int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda) \sigma_1 r dr \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda) \sigma_2 r dr \right. \\ \left. \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda) \sigma_n r dr \int_{R_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \sigma_{n+1} r dr \right] \tag{30}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda^2 + \alpha_j^2 + q_{js}^2\right) \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik,s}(t, \lambda), \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda), \tag{32}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} u_{jm,ik,s}(t, r) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{P}_{jm,ik,s}(t, \lambda) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} P_{jm,ik,s}(t, r) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} g_{jm,ik,s}(r) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв’язку задачі, що

$$\max \{q_{1s}^2, q_{2s}^2, \dots, q_{n+1,s}^2\} = q_{1s}^2,$$

і покладемо всюди $\alpha_j^2 = q_{1s}^2 - q_{js}^2, j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik,s}}{dt} + \Delta(\lambda, \gamma_s) \tilde{u}_{m,ik,s} = \tilde{P}_{m,ik,s}(t, \lambda), \tag{33}$$

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda), \tag{34}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda), & \Delta(\lambda, \gamma_s) &= \lambda^2 + a_{z1}^2 \gamma_s^2 + \chi_1^2, \\ \tilde{P}_{m,ik,s}(t, \lambda) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik,s}(t, \lambda), & \tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda). \end{aligned}$$

Безпосередньо перевіряємо, що єдиним розв’язком задачі (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda) = M(t, \lambda, \gamma_s) \tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda) + \int_0^t M(t - \tau, \lambda, \gamma_s) \tilde{P}_{m,ik,s}(\tau, \lambda) d\tau, \tag{35}$$

де розв’язувальна функція (функція Коші) $M(t, \lambda, \gamma_s) = \exp(-\Delta(\lambda, \gamma_s)t)$.

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор

$H_{(n)}^{-1}$ як обернений до оператора (30) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots V_1(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \int_0^{+\infty} \dots V_2(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda)]$, де функцію $\tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda)$ визначено формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної параболічної початково-крайової задачі спряження (21)–(24):

$$\begin{aligned} u_{jm,ik,s}(t, r) &= \int_0^{+\infty} \tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda)V_j(r, \lambda)\Omega(\lambda) d\lambda \equiv \\ &\equiv \int_0^{+\infty} M(t, \lambda, \gamma_s)\tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda)V_j(r, \lambda)\Omega(\lambda) d\lambda + \\ &+ \int_0^t \int_0^{+\infty} M(t - \tau, \lambda, \gamma_s)\tilde{P}_{m,ik,s}(\tau, \lambda)V_j(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\tau, \quad j = \overline{1, n + 1}. \end{aligned} \tag{37}$$

Застосовуючи послідовно до функцій $u_{jm,ik,s}(t, r)$, визначених формулами (37), обернені оператори Λ_s^{-1} і $F_{m,ik}^{-1}$ та виконуючи нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) &= \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{ik}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ &+ \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ &+ \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-l_1}^{l_2} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ &+ \sum_{p=1}^{n+1} a_{z p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} [W_{jp,1}^{ik}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^1(\tau, \rho, \alpha) + \\ &+ W_{jp,2}^{ik}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^2(\tau, \rho, \alpha)] \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau, \quad j = \overline{1, n + 1}, \end{aligned} \tag{38}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11), (12), (21), (22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m^{ik} M(t, \lambda, \gamma_s) \times \\ \times V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m^{ik} M(t-\tau, \lambda, \gamma_s) \times \\ \times V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi),$$

компоненти $W_{jp,1}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, -l_1)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (нижні аплікатні функції Гріна) та компоненти $W_{jp,2}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, l_2)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (верхні аплікатні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження.

Проаналізуємо формули (38) залежно від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового шару. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (8). У цьому випадку функції Гріна мають вигляд

$$Q_{jp}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m^{22} M(t-\tau, \lambda, \gamma_s) \times \\ \times V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \times \\ \times [-g_{4p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} w_{4p}(\tau, \rho, \xi)] \cos \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$R_{jp,1}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = -\frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m^{22} M(t-\tau, \lambda, \gamma_s) \times \\ \times V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \cos \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

$$R_{jp,2}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^{m+1} \varepsilon_m^{22} M(t - \tau, \lambda, \gamma_s) \times \\ \times V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z + l_1) v_s(\xi + l_1)}{\|v_s(z + l_1)\|^2} \cos \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок задачі (1)–(4), (8), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,22}(t, r, \varphi, z) = \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{22}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{22}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-l_1}^{l_2} [R_{jp,1}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{4p}(\tau, \rho, \xi) + \\ + R_{jp,2}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) w_{4p}(\tau, \rho, \xi)] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ + \sum_{p=1}^{n+1} a_{z p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} [W_{jp,1}^{22}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^1(\tau, \rho, \alpha) + \\ + W_{jp,2}^{22}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^2(\tau, \rho, \alpha)] \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (39)$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{22}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi)$ і функцій Гріна $R_{jp,s}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$, $W_{jp,s}^{22}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$, $s = 1, 2$, безпосередньо перевіряємо, що функції $u_{j,22}(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (8) та умови спряження (9) у сенсі теорії узагальнених функцій [21].

Єдиність розв'язку (39) впливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (8), (9).

Методами з [21, 22] можна довести, що при відповідних умовах і вихідних даних формули (9) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j^s(t, r, \varphi)$, $g_{4j}(t, r, z)$, $w_{4j}(t, r, z)$, $s = 1, 2$, $j = \overline{1, n+1}$:

1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовні за геометричними змінними;

2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;

3) абсолютно сумовні з ваговою функцією $r\sigma(r)$ на осі I_n^+ ;

4) задовольняють умови спряження,

то параболічна початково-крайова задача (1)–(4), (8), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

Випадки крайових умов (5)–(7) на гранях клина можна проаналізувати аналогічно.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі.

Зауваження 2. Випадок зміни φ у межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ ($\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$).

Зауваження 3. Параметри p_1, p_2 дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1, z = l_2$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їхніх можливих комбінацій.

Зауваження 4. Аналіз розв'язків (38) залежно від аналітичного виразу функцій

$$f_j(t, r, \varphi, z), \quad g_j(r, \varphi, z), \quad w_j^s(t, r, \varphi), \quad s = 1, 2, \\ g_{pj}(t, r, z), \quad w_{pj}(t, r, z), \quad s = 1, 2, \quad p = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

проводиться безпосередньо із загальних структур.

4. Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі. Одержані інтегральні зображення розв'язків мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

Література

1. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
2. Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман, *Параболические граничные задачи*, Штиинца, Кишинев (1992).
3. Т. Я. Загорский, *Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа*, Изд-во Львов. гос. ун-та, Львов (1961).
4. С. Д. Ивасишен, *Матрица Грина параболических задач*, Вища шк., Киев (1990).
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва (1967).
6. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*, Наука, Москва (1971).
7. М. І. Матійчук, *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями*, Прут, Чернівці (2003).
8. І. Д. Пукальський, *Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями*, Рута, Чернівці (2008).
9. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, Москва (1968).
10. С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, Москва (1964).
11. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, *Модели и методы решения задач в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (2001).
12. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, *Модели и методы решения задач с условиями сопряжения*, Наук. думка, Киев (1998).
13. И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека, *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (1991).

14. А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2011).
15. І. М. Конет, *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2013).
16. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2016).
17. І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях*, Прут, Чернівці (2001).
18. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2017).
19. М. О. Перестюк, В. В. Маринець, *Теорія рівнянь математичної фізики*, Либідь, Київ (2006).
20. К. Дж. Трантер, *Интегральные преобразования в математической физике*, Гостехтеориздат, Москва (1956).
21. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, Москва (1965).
22. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).

Одержано 29.06.21