

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ АТРАКТОРА ДЛЯ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ ІЗ ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

С. В. Донецький, О. Ю. Швець

*Нац. техн. ун-т України “Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: dsvshka@gmail.com,
aleksandrshvetskpi@gmail.com*

We consider the Sommerfeld–Kononenko nonideal mechanical “spherical pendulum–electric motor of limited power” system, which is described by a nonlinear system of differential equations of the fifth order. The existence of so-called maximal attractors of this system, both regular and chaotic, is revealed.

Розглянуто неідеальну за Зоммерфельдом – Кононенком механічну систему “сферичний маятник – електродвигун обмеженої потужності”, яка описується нелінійною системою диференціальних рівнянь п’ятого порядку. Виявлено існування так званих максимальних атракторів цієї системи, як регулярних, так і хаотичних.

1. Вступ. Різноманітні маятникові системи постійно привертають увагу дослідників у математиці, механіці та фізиці. Ці системи є класичним прикладом коливальних динамічних систем. У маятникових системах вперше встановлено такі фундаментальні явища як параметричний резонанс, високочастотна стабілізація нестійких положень рівноваги [1 – 3] та багато інших.

Маятникові системи є надзвичайно простими за своєю фізичною природою і дозволяють проводити фізичні експерименти, що підтверджують або спростовують теоретично встановлені коливальні властивості. Попри це, цікавість до вивчення різних аспектів динамічної поведінки маятникових систем загалом обумовлена тим фактом, що багато властивостей, вперше знайдених для маятникових систем, згодом були відкриті і в інших системах із значно складнішою фізичною природою. Зокрема, для таких систем як кільця, оболонки, пластини, резервуари, частково заповнені рідиною, тощо.

Важливе місце серед динамічних систем посідають так звані нелінійні системи з обмеженим збудженням. Уперше такі системи розглянуто в роботах Зоммерфельда на початку ХХ-го ст. [4, 5]. Але як повноцінний науковий напрямок теорія систем із обмеженим збудженням сформувалась у роботах Кононенка [6, 7], у яких він увів чітку аксіоматичну базу й побудував математичні моделі для багатьох таких систем.

Теорія систем із обмеженим збудженням досліджує взаємодію коливальних систем із джерелами збудження їхніх коливань. У рамках цієї теорії передбачається, що джерела збудження коливань мають потужність, порівняну з потужністю, яку споживає коливальне навантаження. У цьому випадку робота джерела енергії залежить від режиму коливального навантаження, а вплив джерела не може бути виражено як заздалегідь визначену явну функцію часу. Тоді як при традиційному математичному моделюванні коливальної системи розглядаються ідеалізовані джерела збудження необмеженої потужності. У багатьох випадках “ідеальний” підхід у корені неправильний, що на практиці призводить до значних помилок у описі динаміки як коливальної системи, так і джерела збудження.

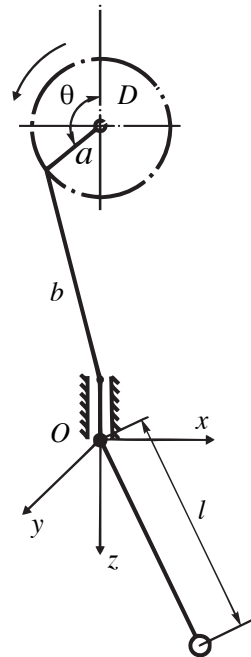


Рис. 1. Система маятник – електродвигун.

Відкриття детермінованого хаосу стимулювало появу нового напрямку в теорії систем із обмеженим збудженням, пов'язаного з пошуком хаотичних режимів взаємодії коливальних систем із джерелами збудження. Особливу цікавість викликають ті хаотичні режими, поява яких пов'язана з нелінійною взаємодією коливальної системи та джерела збудження, а не з їхніми автономними властивостями. У роботах [8–17] описано виникнення усталених регулярних і хаотичних режимів у ряді детермінованих систем із обмеженим збудженням. У цих системах хаос принципово неможливий без урахування взаємодії між коливальною системою та джерелом збудження її коливань.

Серед останніх публікацій по близькій тематиці можна виділити роботи [18–20].

2. Математична модель сферичного маятника з обмеженим збудженням. Розглянемо систему, зображену на рис. 1. Кривошипно-повзунний механізм з'єднує ротор електродвигуна з точкою підвісу фізичного маятника, який може здійснювати просторові коливання. Як відомо, такий маятник називається сферичним.

Введемо декартову координатну систему $Oxyz$, як показано на рис. 1. Позначимо через a , b довжини кривошипа та повзуна відповідно. Припустимо, що $b \gg a$. Також уведемо нові змінні α та β за формулами

$$x = l \sin \alpha, \quad y = l \sin \beta.$$

Рівняння руху системи “сферичний маятник – електродвигун обмеженої потужності” отримано в [8, 12]. Зауважимо, що при виведенні цих рівнянь використано деякі результати робіт [21–23], в яких сферичний маятник розглядався без урахування взаємодії з джерелом збудження коливань. Отже, рівняння руху системи “маятник – електродвигун обмеженої потужності” можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) - mla \left[\ddot{\Theta} \frac{a}{l} \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \frac{a}{l} \sin \Theta \cos \Theta + \frac{g}{l} \sin \Theta - \right. \\
\left. - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \Theta - (\alpha\ddot{\alpha} + \beta\ddot{\beta}) \sin \Theta \right], \\
\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha\beta^2}{2} \right) + \delta_1 \dot{\alpha} + \alpha(\dot{\beta}^2 + \beta\ddot{\beta}) - \\
- \frac{a}{l} \alpha (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) = 0, \\
\ddot{\beta} + \omega_0^2 \left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2\beta}{2} \right) + \delta_1 \dot{\beta} + \beta(\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha}) - \\
- \frac{a}{l} \beta (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

де $L(\dot{\Theta})$ — рушійний момент електродвигуна, $H(\dot{\Theta})$ — внутрішній момент сил опору обертанню ротора електродвигуна, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — власна частота маятника, δ_1 — коефіцієнт гасіння сили опору середовища, в якому рухається маятник.

Отримана система диференціальних рівнянь описує складний процес взаємодії обертання вала двигуна (утворення збудливої сили) і просторових коливань маятника. Ця система рівнянь (1) є суттєво нелінійною. Неможливо записати точний розв'язок цієї системи у вигляді аналітичної формули.

Для спрощення системи рівнянь (1) введемо малий параметр $\varepsilon = \frac{a}{l}$. Крім того, будемо вважати, що виконано умови основного параметричного резонансу, коли швидкість обертання вала двигуна $\dot{\Theta}$ близька до подвоєної власної частоти маятника $2\omega_0$, а саме:

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0 y_3(t).$$

У рівняннях (1) зробимо заміну змінних [8]

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_1(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right], \\
\beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_4(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right].
\end{aligned} \tag{2}$$

За допомогою цієї заміни ми переходимо у рівняннях (1) до нових змінних $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$, $y_4(\tau)$, $y_5(\tau)$ та повільного часу τ :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4} \dot{\Theta}(t).$$

Підставимо вирази (2) у рівняння (1) і проведемо процедуру усереднення за швидким часом $\Theta(t)$ [3, 24, 25]. Після цього отримаємо таку систему рівнянь [8]:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = Cy_1 - \left[y_3 + \frac{1}{8} (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 - \frac{3}{4} (y_1 y_5 - y_2 y_4) y_4 + 2y_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + \left[y_3 + \frac{1}{8} (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 - \frac{3}{4} (y_1 y_5 - y_2 y_4) y_5 + 2y_1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1 y_2 + y_4 y_5) + Ey_3 + F, \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - \left[y_3 + \frac{1}{8} (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 + \frac{3}{4} (y_1 y_5 - y_2 y_4) y_1 + 2y_5, \\ \frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + \left[y_3 + \frac{1}{8} (y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 + \frac{3}{4} (y_1 y_5 - y_2 y_4) y_2 + 2y_4, \end{aligned} \quad (3)$$

Відзначимо, що при виведенні системи рівнянь (3) використано лінійну апроксимацію [7] статичної характеристики двигуна у випадку, коли

$$\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I + 0,5ma^2} = \varepsilon \frac{\omega_0}{2} (N_0 - E\dot{\Theta}) + \varepsilon^2, \dots,$$

тому [8]

$$f = \left(\frac{N_0}{\omega_0} - 2E \right) \frac{l}{a}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I + 0,5ma^2}, \quad C = \frac{\delta_1}{\omega_0}.$$

У системі (3) параметр E — кут нахилу статичної характеристики двигуна. Відповідно параметри C , D , F залежать від ряду раніше вказаних фізичних і геометричних характеристик системи “маятник – електродвигун”. Далі розглянуто біфуркації системи при зміні параметра E .

3. Знаходження атракторів системи. Подальшою метою дослідження є вивчення можливих типів граничних множин системи (3).

Спочатку визначимо положення рівноваги системи (3). Прирівнюючи до нуля її праві частини, отримуємо нелінійну алгебраїчну систему рівнянь. Розв’язками такої системи будуть положення рівноваги системи (3). Очевидно, що одне з положень рівноваги має вигляд

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\frac{F}{E}, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 0. \quad (4)$$

Це положення рівноваги є ізольованим. Решту положень рівноваги системи (3), якщо вони існують, найбільш раціонально шукати за допомогою чисельних методів. Наприклад, за методом Ньютонна.

Для дослідження стійкості положень рівноваги побудуємо якобіан (J) системи (3). Елементами a_{ij} такого якобіана є величини

$$\begin{aligned} a_{11} &= C - \frac{1}{4} (y_1 y_2 + 3y_4 y_5), & a_{12} &= \frac{1}{8} (5y_4^2 - 3y_2^2 - y_1^2 - y_5^2) - y_3 + 2, \\ a_{13} &= -y_2, & a_{14} &= \frac{1}{4} (5y_2 y_4 - 3y_1 y_5), & a_{15} &= \frac{1}{4} (-3y_1 y_4 - y_2 y_5), \\ a_{21} &= \frac{1}{8} (3y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 - 5y_5^2) + y_3 + 2, & a_{22} &= C + \frac{1}{4} (y_1 y_2 + 3y_4 y_5), \\ a_{23} &= y_1, & a_{24} &= \frac{1}{4} (y_1 y_4 + 3y_2 y_5), & a_{25} &= \frac{1}{4} (3y_2 y_4 - 5y_1 y_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= Dy_2, & a_{32} &= Dy_1, & a_{33} &= E, & a_{34} &= Dy_5, & a_{35} &= Dy_4, & (5) \\
a_{41} &= \frac{1}{4}(5y_1y_5 - 3y_2y_4), & a_{42} &= \frac{1}{4}(-3y_1y_4 - y_2y_5), & a_{43} &= -y_5, \\
a_{44} &= C + \frac{1}{4}(-3y_1y_2 - y_4y_5), & a_{45} &= \frac{1}{8}(5y_1^2 - y_2^2 - y_4^2 - 3y_5^2) - y_3 + 2, \\
a_{51} &= \frac{1}{4}(y_1y_4 + 3y_2y_5), & a_{52} &= \frac{1}{4}(3y_1y_5 - 5y_2y_4), & a_{53} &= y_4, \\
a_{54} &= \frac{1}{8}(y_1^2 - 5y_2^2 + 3y_4^2 + y_5^2) + y_3 + 2, & a_{55} &= C + \frac{1}{4}(3y_1y_2 + y_4y_5).
\end{aligned}$$

Як відомо, слід матриці Якобі дорівнює дивергенції системи (3). Легко визначити, що $\text{tr } J = 4C + E$. Отже, дивергенція системи є постійною. Звідси випливає, що система рівнянь (3) буде дисипативною при

$$4C + E < 0. \quad (6)$$

Величини, що входять до формули (6), а саме: C (зведений коефіцієнт опору середовища) і E (кут нахилу статичної характеристики електродвигуна) завжди від'ємні. Тому система (3) завжди буде дисипативною.

При вивченні стійкості окремих положень рівноваги фазові координати цих положень рівноваги слід підставити в елементи якобіана. Характеристичне рівняння системи першого наближення для положення рівноваги (4) матиме вигляд

$$\left(\lambda - C - \frac{\sqrt{4E^2 - F^2}}{E}\right)^2 (\lambda - E) \left(\lambda - C + \frac{\sqrt{4E^2 - F^2}}{E}\right)^2 = 0.$$

Отже, положення рівноваги (4) буде асимптотично стійким при виконанні умов

$$C < 0, \quad E < 0, \quad C^2 > 4 - \frac{F^2}{E^2}.$$

Чисельні розрахунки показали, що крім ізольованого положення рівноваги (4) існує нескінченна кількість неізольованих положень рівноваги. Ці положення рівноваги утворюють власну сім'ю, яка існує у вигляді замкненої лінії у фазовому просторі. Умови асимптотичної стійкості такої сім'ї можна отримати за допомогою якобіана (5) і теореми Льенара – Шіпара [26]. Слід зауважити, що ці умови надзвичайно громіздкі. Їх аналіз практично можна здійснювати лише за допомогою комп'ютерних обчислень. Така сім'я положень рівноваги, побудована для конкретних значень параметрів системи (3), а саме для

$$C = -0,5, \quad D = -1, \quad E = -1,4, \quad F = 0,5,$$

має вигляд

$$y_e = \left(\pm 0,063\sqrt{174,078 - 4z^2}, \pm 0,5\sqrt{174,078 - 4z^2}, -3,59, 0, 127z, z\right), \quad z \in \mathbb{R},$$

при $y_e \in \mathbb{R}^5$. Варто зазначити, що ці положення рівноваги є нестійкими.

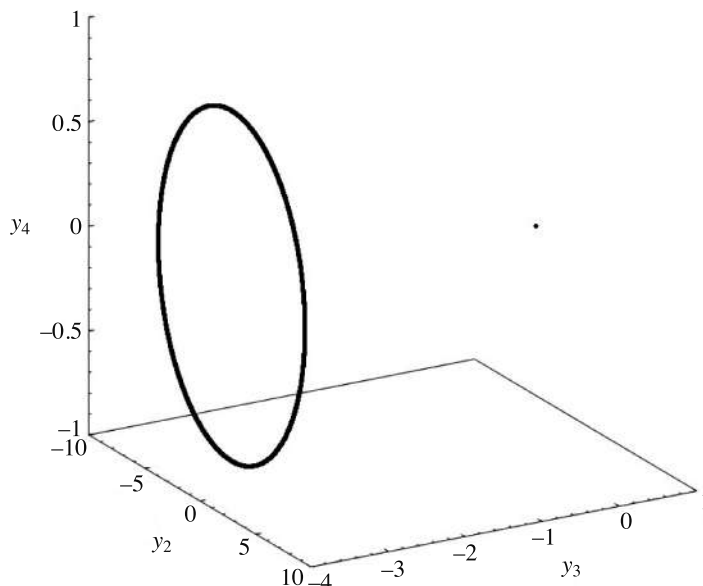


Рис. 2. Положення рівноваги системи (3) при $C = -0,5$, $D = -1$, $E = -1,4$, $F = 0,5$.

На рис. 2 показано два типи положень рівноваги системи (3), а саме: ізольоване положення рівноваги (одна точка) та сім'я неізольованих положень рівноваги (замкнена лінія). Кожна точка цієї лінії є положенням рівноваги. Усі зображені на рис. 2 положення рівноваги нестійкі. Причому для кожного положення рівноваги сім'ї серед п'яти ляпуновських характеристичних показників один обов'язково додатний, один — нульовий і один — від'ємний.

У просторі параметрів системи є достатньо великі області (3), в яких усі положення рівноваги стають нестійкими. У цих областях виникають надзвичайно цікаві граничні множини цієї системи, які можуть бути як регулярними, так і хаотичними.

Граничні множини першого типу можуть бути періодичними. У цьому випадку вони утворюють сім'ю з нескінченної кількості замкнених траєкторій (циклів), які існують одночасно. Усі цикли розташовані як завгодно близько один від одного, тобто не є ізольованими. Кожна така замкнена траєкторія сама є граничною множиною. Це пов'язано з тим, що майже будь-яка траєкторія, яка починається в достатньо великій області фазового простору, прямує до одного з циклів сім'ї. Зазначимо, що жоден із цих циклів не є атрактором у традиційному розумінні цього терміна [27, 28]. Отже, кожен із цих циклів не є граничним. Але кожен окремий цикл має один і той же період, однакові ляпуновські показники й подібні перетини Пуанкаре.

Сигнатура спектра ляпуновських характеристичних показників [28] для всіх циклів має вигляд: $\langle 0, 0, -, -, - \rangle$, тобто два ляпуновські показники нульові й три — від'ємні.

Варто зазначити, що потужність цієї сім'ї дорівнює континууму.

На рис. 3 наведено тривимірні проєкції регулярних періодичних граничних множин системи (3), які побудовані при $C = -0,5$, $D = -1$, $E = -1,4$, $F = 0,5$. Кожен цикл зображено іншим кольором. Усього зображено п'ять циклів, кожен із яких є представником нескінченної сім'ї циклів. Ще раз підкреслимо, що кожен із циклів, які утворюють сім'ю, не є атрактором у традиційному розумінні цього поняття. На нашу думку, найбільш

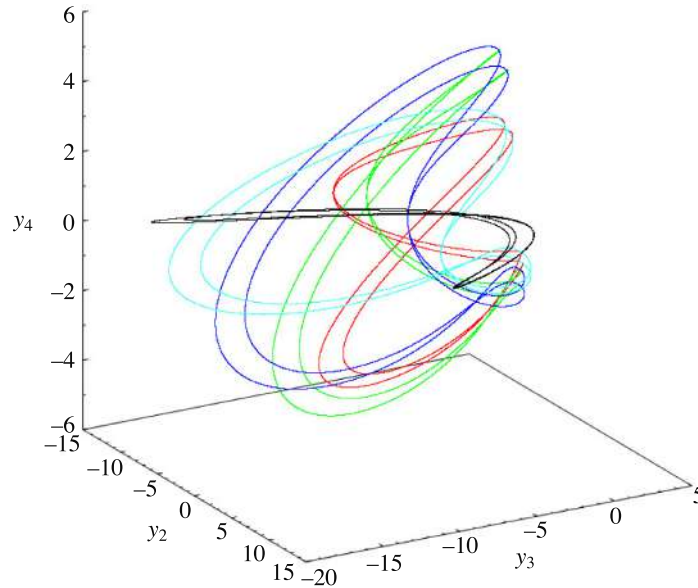


Рис. 3. Тривимірні проєкції п'яти представників сім'ї циклів.

придатним терміном для опису такої сім'ї є поняття максимального атрактора. Детальне означення максимального атрактора наведено у [29, 30].

Зі збільшенням значення параметра E в системі виникає сім'я хаотичних траєкторій. Ця сім'я є нерегулярним типом граничних множин. Однією із ознак хаосу є поява додатного ляпуновського показника. Сім'я, що виникає, включає нескінченну кількість хаотичних траєкторій. Відомо, що "традиційний" хаотичний аттрактор складається з нескінченної кількості нестійких траєкторій. Отримана сім'я, на перший погляд, є об'єднанням нескінченної кількості хаотичних атракторів. Однак кожен представник цієї сім'ї не є аттрактором у "традиційному" розумінні цього терміна. Тут, як і раніше, для визначення такого об'єднання можна запропонувати поняття максимального атрактора, означене у [29, 30]. Усі траєкторії хаотичного максимального атрактора мають однаковий спектр ляпуновських показників, один із яких додатний. Перетини Пуанкаре кожної з траєкторій сім'ї є структурно подібними хаотичними множинами, які складаються з нескінченної кількості точок.

На рис. 4 для значень $C = -0,5$, $D = -1$, $E = -1,17$, $F = 0,5$ побудовано тривимірні проєкції нерегулярних граничних множин системи (3), які утворюють хаотичний максимальний аттрактор. Спектр ляпуновських характеристичних показників кожної траєкторії, яка належить максимальному хаотичному аттрактору, складається з одного додатного показника, двох нульових і двох від'ємних. Кожного представника хаотичного максимального атрактора нанесено власним кольором. Усього зображено п'ять представників цієї хаотичної сім'ї.

На рис. 5 показано ще два представники хаотичного максимального атрактора. Особливо цікаво, що один із цих представників, а саме зображений синім кольором, локалізовано у п'ятивимірному просторі, а інший, нанесений чорним, — у тривимірному. Тобто, у цього представника фазові змінні y_4 і y_5 дорівнюють нулю. З фізичної точки зору друга ситуація відповідає випадку, коли маятник здійснює плоскі коливання. Проте обидві траєкторії є різними представниками одного й того ж хаотичного максимального атрактора.

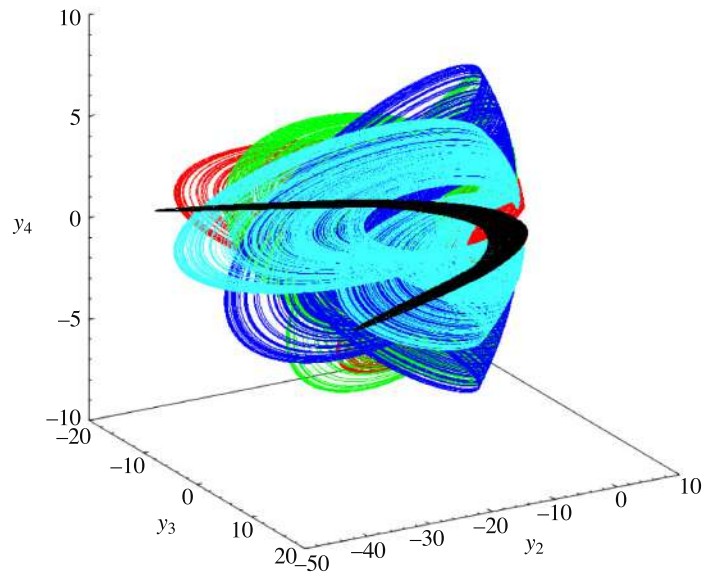


Рис. 4. П'ять представників максимального хаотичного атрактора.

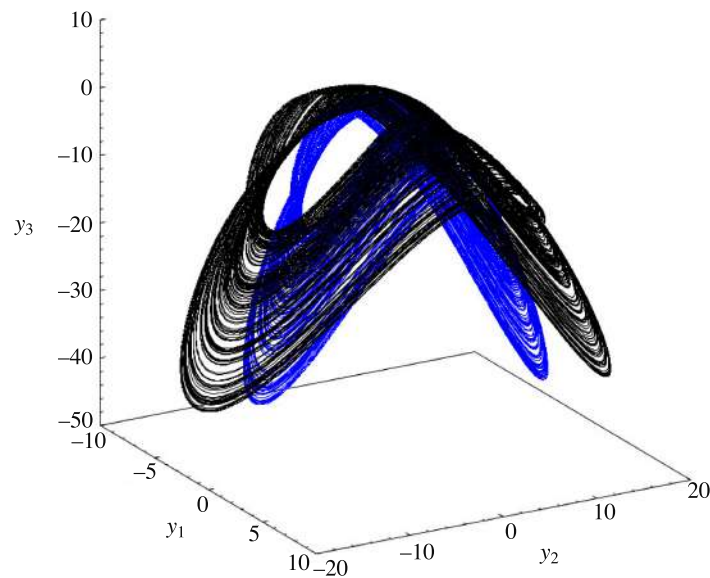


Рис. 5. Різні просторові локалізації представників максимального хаотичного атрактора.

У подальших дослідженнях заплановано вивчити сценарії переходу до хаосу для максимальних атракторів.

Література

1. Н. Н. Боголюбов, *Теория возмущений в нелинейной механике*, Сб. Ин-та строит. механики АН УССР, № 14, 9–34 (1950).
2. П. Л. Капица, *Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса*, Журн. эксперим. и теорет. физики, **21**, 588–607 (1951).
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).

4. A. Sommerfeld, *Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*, Physikal. Zeitschrift, **3**, 266–271 (1902).
5. A. Sommerfeld, *Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*, Z. Vereins Deutscher Ingenieure, **46**, 391–394 (1902).
6. В. О. Кононенко, *Вынужденные колебания системы с источником энергии в случаях малой нелинейности*, Изв. АН СССР, отд. техн. наук, механика и машиностроение, № 5, 69–76 (1961).
7. В. О. Кононенко, *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*, Наука, Москва (1964).
8. Т. С. Краснопол'скаја, А. Ю. Шветс, *Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with energy source*, Internat. Appl. Mech., **28**, 669–674 (1992).
9. Т. С. Краснополскаја, А. Ю. Шветс, *Chaos in vibrating systems with limited power-supply*, Chaos, **3**, № 3, 387–395 (1993).
10. Т. С. Краснополскаја, А. Ю. Шветс, *Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations*, J. Fluids Struct., **8**, № 1, 1–18 (1994).
11. M. F. Dimentberg, L. McGovern, R. L. Norton, J. Chapdelaine, R. Harrison, *Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply*, Nonlinear Dyn., **13**, 171–187 (1997).
12. А. Ю. Шветс, *Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation*, Ukr. Math. J., **59**, 602–614 (2007).
13. J. M. Balthazar, J. L. Palacios Felix, R. M. L. R. F. Brasil, T. S. Краснополскаја, А. Ю. Шветс, *Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by vacuum tube generated by a nonideal source*, J. Comput. Nonlinear Dynam., **4**, 011013, 1–7 (2009).
14. Т. С. Краснополскаја, А. Ю. Шветс, *Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks*, J. Sound Vib., **322**, № 3, 532–553 (2009).
15. А. Ю. Шветс, V. A. Sirenko, *Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems*, J. Math. Sci., **243**, № 2, 338–346 (2019).
16. А. Ю. Шветс, S. V. Donetskyi, *Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems*, C. Skiadas, I. Lubashevsky (eds), 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, CHAOS: Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity, Springer, Cham, 257–264 (2019).
17. E. D. Pechuk, T. S. Краснополскаја, M. O. Rudnitska, *Cardiorespiratory system as nonideal system with limited excitation*, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM), **1**, 19–27 (2021).
18. G. Litak, J. Margielewicz, D. Gaska, D. Yurchenko, *Dynamic response of the spherical pendulum to horizontal Lissajous excitation*, Nonlinear Dyn., **102**, 2125–2142 (2020).
19. A. D. Anurag, C. Sagar, *Order and chaos around resonant motion in librating spring–mass–spherical pendulum*, Nonlinear Dyn., **104**, 3407–3424 (2021).
20. R. H. Avanco, J. M. Balthazar, Â. M. Tuset, M. A. Ribeiro, *Short comments on chaotic behavior of a double pendulum with two subharmonic frequencies and in the main resonance zone*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., **101**, № 12, e202000197 (2021).
21. J. W. Miles, *Stability of forced oscillations of a spherical pendulum*, Quart. Appl. Math., **20**, № 1, 21–32 (1962).
22. J. W. Miles, *Resonant motion of a spherical pendulum*, Phys. D., **11**, № 3, 309–323 (1984).
23. J. W. Miles, *Nonlinear Faraday resonance*, J. Fluid Mech., **146**, № 2, 285–302 (1984).
24. Ю. А. Митропольский, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Наук. думка, Киев (1971).
25. A. K. Bajaj, J. M. Johnson, *Asymptotic techniques and complex dynamics in weakly non-linear forced mechanical systems*, Int. J. Non-Linear Mech., **25**, № 2, 3, 211–226 (1990).
26. A. Li'enard, M. H. Chipart, *Sur le signe de la partie r'eele des racines d'une quation alg'ebrique*, J. Math. Pures Appl. (9), **10**, № 4, 291–346 (1914).
27. В. С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах*, Наука, Москва (1990).
28. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2006).
29. J. Milnor, *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys., **99**, 177–195 (1985).
30. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, *Лекции по нелинейной динамике*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва (2011).

Одержано 12.12.21,
після доопрацювання — 28.12.21