УДК 517.983

УМОВИ КЕРОВАНОСТІ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов, Н. В. Гонгало, І. П. Слюсаренко

Поліс. нац. ун-т
бульв. Старий, 7, Житомир, 10008, Україна
e-mail: vfz2008@ukr.net
e-mail: nataliiahonhalo@gmail.com
e-mail: islusarenko62@gmail.com

By using the theory of generalized inversion of operators and integral operators, we obtain a criterion for solvability and a general form of solutions of integro-differential equation with a degenerate kernel with control in a Banach space. The general form of control for which these solutions exist is found.

З використанням теорії узагальненого обернення операторів і узагальненого обернення інтегральних операторів отримано критерій розв'язності й загальний вигляд розв'язків інтегро-диференціального рівняння з виродженим ядром із керуванням у банаховому просторі. Одержано зображення загального вигляду керування, при якому ці розв'язки існують.

Дослідження умов розв'язності не всюди розв'язних [1] лінійних операторних рівнянь є достатньо складною проблемою. Інтегро-диференціальні рівняння належать саме до такого типу рівнянь, оскільки інтегро-диференціальний оператор не є всюди розв'язним, тобто не має оберненого [2].

Існують різні підходи до розв'язання не всюди розв'язних лінійних операторних рівнянь: слабке збурення правої частини даного рівняння з подальшим застосуванням методу Вішика – Люстерніка [3, 4], введення в систему імпульсної дії [5 – 7] або керування.

З використанням псевдообернення матриць і ортопроєкторів у [8] розглянуто задачу існування сталого керування для інтегро-диференціального рівняння в евклідовому просторі.

Побудова точних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь є достатньо важкою проблемою, тому у більшості випадків розв'язки отримуються чисельними методами. Так, у [9] запропоновано чисельно-наближений метод розв'язання задачі керування інтегро-диференціальним рівнянням і досліджено збіжність, стійкість і точність методу.

Інтегро-диференціальні рівняння Фредгольма з виродженим ядром і керуванням у банахових просторах не досліджувалися, тому актуальною є задача про встановлення умов керованості, побудови в аналітичному вигляді загальних розв'язків і відповідних загальних керувань інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром у банахових і гільбертових просторах.

Для встановлення умов керованості не всюди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь із керуванням у банахових і гільбертових просторах буде застосовуватися загальна теорія дослідження не всюди розв'язних операторних рівнянь із використанням проєкторів, узагальненого обернення операторів у банахових просторах і псевдообернення нормально розв'язних операторів у гільбертових просторах, яка розроблена в [10, 11].

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbf{B}_i,\ i = 1, 2, 3,$ — банахові простори, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок. Позначимо через $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_i),\ i = 1, 2, 3,$ банахові простори неперервних вектор-функцій зі значеннями у відповідних банахових просторах $\mathbf{B}_i,\ i = 1, 2, 3.$

Розглянемо крайову задачу з керуванням для інтегро-диференціального рівняння

$$\dot{z}(t) - \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n P_i(t) W_i(s) z(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(t) V_i(s) \dot{z}(s) \right] ds = f(t) + \int_a^b K(t, s) u(s)\, ds. \tag{1}$$

Як показано у [12], після позначень операторних матриць

$$P(t) = [P_1(t), \ldots, P_n(t)], \qquad Q(s) = [Q_1(t), \ldots, Q_n(t)],$$
$$W(t) = \mathrm{col}\,[W_1(t), \ldots, W_n(t)], \qquad V(s) = \mathrm{col}\,[V_1(s), \ldots, V_n(s)],$$

рівняння (1) набуває вигляду

$$(Lz)(t) \colon \equiv \dot{z}(t) - \int_a^b [P(t) W(s) z(s) + Q(t) V(s) \dot{z}(s)] ds = f(t) + \int_a^b K(t, s) u(s)\, ds, \tag{2}$$

де оператор-функції $P(t)$ і $Q(t)$ діють із $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервні з нормами $|||P||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|P(t)\|_{\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2} < \infty$ і $|||Q||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|Q(t)\|_{\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2} < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ і $V(t)$ діють із $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||W||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|W(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_1} < \infty$ та $|||V||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|V(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_1} < \infty$, оператор-функція $K(t, s)$ визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ та діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ за змінною t і з банахового простору $\mathbf{B}_3$ у $\mathbf{B}_3$ — за змінною s, сильно неперервна по $t,\ s$, з нормою $|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}} \|K(t, s)\|_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_3} < \infty$, вектор-функції $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $u(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ визначені на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банахових просторах $\mathbf{B}_2$ і $\mathbf{B}_3$ з нормами $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$ і $|||u||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|u(t)\|_{\mathbf{B}_3}$.

Розв'язком $z(t)$ інтегро-диференціального рівняння з керуванням (2) будемо називати таку пару вектор-функцій $z(t)$ та $u(s)$, які задовольняють рівняння (2). При цьому $z(t) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, де $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервно-диференційовних вектор-функцій з нормою $|||z||| = \sum_{k=0}^1 \sup\limits_{t\in\mathcal{I}} \left\{ \left\| z^{(k)}(t) \right\| \right\}$, де $z^{(k)}(t)$ — k-та похідна від $z(t)$. Похідну $\dot{z}(t)$ будемо розуміти в сенсі [13, с. 140].

Метою цієї роботи є: отримати умови існування та зображення загальних розв'язків $z(t)$ рівняння (2), а також знайти зображення загального керування $u(t)$, при якому такі розв'язки існують.

2. Попередні відомості. Для досягнення поставленої мети необхідно отримати умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків рівняння (2) без керування $(u(s) = 0)$.

Заміною $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int_a^t y(s) ds + c_2, \quad c_2 \in \mathbf{B}_2, \tag{3}$$

рівняння (2) без керування $(u(s)=0)$ зводимо до інтегрального рівняння [12]

$$(L_1 y)(t) := y(t) - M(t)\int_s^b N(s)y(s)ds = g(t), \tag{4}$$

де

$$M(t) = \Big[P(t),\ \ Q(t)\Big], \qquad N(s) = \operatorname{col}\Big[\widetilde{W}(s),\ \ V(s)\Big], \tag{5}$$

$$g(t) = f(t) + P(t)Wc_2, \qquad \widetilde{W}(s) = \int_s^b W(\tau)d\tau, \quad W = \widetilde{W}(a). \tag{6}$$

Нехай

$$D = I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1} - \int_a^b N(s)M(s)\,ds, \quad D\colon \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1,$$

— узагальнено оборотний оператор. Позначимо обмежені проєктори [14] $\mathcal{P}_{N(D)}\colon \mathbf{B}_1 \times \times \mathbf{B}_1 \to N(D)$ — на нуль-простір $N(D)$ та $\mathcal{P}_{Y_D}\colon \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to Y_D$ — на підпростір $Y_D = = \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \ominus R(D)$ оператора D, а D^- — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора D [11].

Надалі клас обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють із банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$, будемо позначати $\mathbf{GI}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *(generalized inverse)*.

Оскільки оператор D — це (2×2)-вимірна операторна матриця, то проєктори $\mathcal{P}_{N(D)}$, $\mathcal{P}_{Y_D}$ — це теж (2×2)-вимірні операторні матриці, які мають структуру

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{P}_{Y_D} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Відомо [15], що при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)g(s)ds = \mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)[f(s)+P(s)Wc_2]ds = 0 \tag{8}$$

і лише при ній інтегральне рівняння (4) має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix} + \big(L_1^- g\big)(t), \tag{9}$$

де $\hat{c}_1$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, L_1^- — узагальнено обернений оператор до інтегрального оператора L_1, дія якого на вектор-функцію $g(t)$ відбувається за правилом

$$\big(L_1^- g\big)(t) = g(t) + M(t)D^-\int_a^b N(s)g(s)\,ds.$$

З урахуванням структури операторної матриці $M(t)$ (5) та проєктора $\mathcal{P}_{N(D)}$ (7) розв'язок (9) запишемо у вигляді

$$y(t) = \Big[P(t)p_{11} + Q(t)p_{21},\ P(t)p_{12} + Q(t)p_{22}\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_1\end{bmatrix} + \big(L_1^- g\big)(t)$$

або

$$y(t) = \overline{X}_1(t)\hat{c}_1 + \big(L_1^- g\big)(t), \tag{10}$$

де $\overline{X}_1(t) = P(t)(p_{11} + p_{12}) + Q(t)(p_{21} + p_{22})$.

Для знаходження значення $c_2 \in \mathbf{B}_2$, при якому умова (8) розв'язності інтегрального рівняння (4) буде виконуватися, отримаємо операторне рівняння

$$Sc_2 = f_0, \tag{11}$$

де

$$\begin{gathered} S = \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)P(s)W ds, \quad S\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \\ f_0 = -\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \quad f_0 \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1. \end{gathered} \tag{12}$$

Нехай оператор S узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний. Тоді існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(S)}\colon \mathbf{B}_2 \to N(S)$, $\mathcal{P}_{Y_S}\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \to Y_S$ і обмежений узагальнено обернений оператор $S^-\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ до оператора S.

Операторне рівняння (11) розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова [11]

$$\mathcal{P}_{Y_S} f_0 = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

при виконанні якої рівняння (11) має сім'ю розв'язків

$$c_2 = \mathcal{P}_{N(S)}\hat{c}_2 + S^- f_0, \tag{13}$$

де $\hat{c}_2$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$.

Враховуючи (13), підставимо $g(s)$ із (6) у розв'язок (10) інтегрального рівняння (4):

$$\begin{aligned} y(t) &= \overline{X}_1(t)\hat{c}_1 + \big(L_1^-\big[f + PW\big\{\mathcal{P}_{N(S)}\hat{c}_2 + S^- f_0\big\}\big]\big)(t) = \\ &= \overline{X}_1(t)\hat{c}_1 + \big(L_1^- P\big)(t)W\mathcal{P}_{N(S)}\hat{c}_2 + \big(L_1^- f\big)(t) + \big(L_1^- P\big)(t)WS^- f_0. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи заміну (3) та значення c_2 з (13), отримаємо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (2) без керування $(u(s) = 0)$

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c_2 = \Big[X_1(t),\ \ X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\end{bmatrix} +$$

$$+\Big(\widetilde{L}_1^- f\Big)(t) + \Big(\widetilde{L}_1^- P\Big)(t)WS^- f_0 + S^- f_0,$$

де

$$\Big(\widetilde{L}_1^- f\Big)(t) = \int\limits_a^t \big(L_1^- f\big)(s)ds,$$

$$\Big(\widetilde{L}_1^- P\Big)(t) = \int\limits_a^t \big(L_1^- P\big)(s)ds, \tag{14}$$

$$X_1(t) = \int\limits_a^t \overline{X}_1(s)ds,$$

$$X_2(t) = \Big(\widetilde{L}_1^- P\Big)(t)WP_{N(S)} + P_{N(S)}.$$

За аналогією [16] можна показати, що оператор

$$\big(L^- f\big)(t) = \Big(\widetilde{L}_1^- f\Big)(t) - \Big[\Big(\widetilde{L}_1^- P\Big)(t)W + I_{\mathbf{B}_2}\Big]S^- \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \tag{15}$$

є узагальнено оберненим оператором до інтегро-диференціального оператора L (2). Тоді загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (2) без керування $(u(s) = 0)$ буде мати вигляд

$$z(t) = \Big[X_1(t),\ X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t), \tag{16}$$

де $\hat{c}_1$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, $\hat{c}_2$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$.

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння без керування (2) справедлива така теорема.

Теорема 1 [12]**.** *Нехай оператори* $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ *і* $S\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ *узагальнено оборотні. Тоді інтегро-диференціальне рівняння без керування (2) розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0, \tag{17}$$

і при цьому має сім'ю розв'язків (16).

3. Основний результат. ***3.1. Інтегро-диференціальні рівняння з керуванням у банахових просторах.*** Нехай інтегро-диференціальне рівняння (2) без керування $(u(s) = 0)$ не має розв'язків при довільній функції $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, тобто умова (17) не виконується:

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \neq 0.$$

Знайдемо умову розв'язності, зображення загального розв'язку інтегро-диференціального рівняння з керуванням (2) та загальний вигляд керування, при якому цей розв'язок існує.

Нехай оператори $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ та $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$. Тоді нормально розв'язне рівняння (2) за теоремою 1 має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову [11, 15]

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\left[f(s) + \int_a^b K(s,\tau)u(\tau)d\tau\right]ds = 0. \tag{18}$$

З рівняння (18) маємо

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)u(\tau)\,d\tau\,ds = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)\,ds.$$

Змінивши у лівій частині порядок інтегрування та позначивши

$$T(s) = \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(\tau)K(\tau,s)d\tau,$$

отримаємо операторне рівняння

$$\int_a^b T(s)u(s)ds = \mathcal{P}_{Y_S}f_0, \tag{19}$$

де елемент f_0 визначений рівністю (12).

Для розв'язання рівняння (19) відносно $u(s)$ позначимо через $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ систему базисних векторів банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$, з яких утворимо оператор-функцію

$$\varPhi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots, \varphi_i(t), \ldots).$$

Розв'язок рівняння (19) будемо шукати у вигляді

$$u(s) = \varPhi(s)c_3, \tag{20}$$

де $c_3 \in \mathbf{B}_3$ — сталий вектор.

Підставивши (20) у (19), отримаємо операторне рівняння відносно сталого вектора c_3:

$$Uc_3 = \mathcal{P}_{Y_S}f_0, \tag{21}$$

де

$$U = \int_a^b T(s)\varPhi(s)ds, \quad U : \mathbf{B}_3 \to \mathbf{B}_2.$$

Нехай оператор U — узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний. Тоді існують [14] обмежені проєктори: $\mathcal{P}_{N(U)} : \mathbf{B}_3 \to N(U)$, який проєктує банаховий простір $\mathbf{B}_3$

на нуль-простір $N(U)$ оператора U, $\mathcal{P}_{Y_U}: \mathbf{B}_2 \to Y_U$, який проєктує банаховий простір $\mathbf{B}_2$ на підпростір $Y_U = \mathbf{B}_2 \ominus R(U)$ і обмежений узагальнено-обернений оператор $U^-: \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_3$ [11].

Рівняння (21) має розв'язок для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{B}_1$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_U}\mathcal{P}_{Y_S} f_0 = -\mathcal{P}_{Y_U}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = 0, \tag{22}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$c_3 = \mathcal{P}_{N(U)}\hat{c}_3 + U^-\mathcal{P}_{Y_S} f_0, \tag{23}$$

де $\hat{c}_3$ —- довільний вектор банахового простору $\mathbf{B}_3$.

Підставивши (23) у (20), отримаємо сім'ю керувань

$$u(s) = \varPhi(s)\mathcal{P}_{N(U)}\hat{c}_3 + \varPhi(s)U^-\mathcal{P}_{Y_S} f_0, \tag{24}$$

при яких за теоремою 1 рівняння (2) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t),\;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\end{bmatrix} + \left(L^-\left[f + \int\limits_a^b K(\cdot,s)u(s)ds\right]\right)(t) =$$

$$= \Big[X_1(t),\;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t) + \left(L^-\int\limits_a^b K(\cdot,s)u(s)\,ds\right)(t), \tag{25}$$

де оператор L^- діє на функцію

$$h(t) = \int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds$$

за правилом (15):

$$\left(L^-\int\limits_a^b K(\cdot,s)u(s)ds\right)(t) = \left(\widetilde{L}_1^-\int\limits_a^b K(\cdot,s)u(s)\,ds\right)(t) -$$

$$-\Big[\Big(\widetilde{L}_1^- P\Big)(t)W + I_{\mathbf{B}_2}\Big]S^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)u(\tau)\,d\tau\,ds.$$

Підставивши (24) у (25), будемо мати

$$z(t) = \Big[X_1(t),\;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t) +$$

$$+\left(L^-\int\limits_a^b K(\cdot,s)\big[\varPhi(s)\mathcal{P}_{N(U)}\hat{c}_3 + \varPhi(s)U^-\mathcal{P}_{Y_S} f_0\big]ds\right)(t).$$

Позначимо

$$[K\varPhi](t) = \int\limits_a^b K(t,s)\varPhi(s)\,ds.$$

Тоді після перетворень отримаємо

$$z(t) = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t), \;\; \big(L^-[K\varPhi]\big)(t)\mathcal{P}_{N(U)}\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\\ \hat{c}_3\end{bmatrix} +$$

$$+ \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\varPhi]\big)(t)U^-\mathcal{P}_{Y_S}f_0,$$

де $\hat{c}_i \in \mathbf{B}_i,\ i = \overline{1,3},$ — довільні сталі елементи відповідних банахових просторів,

$$\big(L^-[K\varPhi]\big)(t) = \Big(\widetilde{L}_1^-[K\varPhi]\Big)(t) - \Big[\Big(\widetilde{L}_1^- P\Big)(t)W + I_{\mathbf{B}_2}\Big]S^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\,[K\varPhi]\,(s)\,ds.$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння (2) з керуванням справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1),\ S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1)$ *та* $U \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2)$. *Тоді при виконанні умови (22) і лише при ній інтегро-диференціальне рівняння (2) з керуванням має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t), \;\; X_3(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\\ \hat{c}_3\end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\varPhi]\big)(t)U^-\mathcal{P}_{Y_S}f_0,$$

де $X_1(t),\ X_2(t)$ *визначені рівностями (14),* $X_3(t) = (L^-[K\varPhi])(t)\mathcal{P}_{N(U)},\ \hat{c}_i \in \mathbf{B}_i,\ i = \overline{1,3},$ — *довільні сталі.*

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u(s) = \varPhi(s)\mathcal{P}_{N(U)}\hat{c}_3 + \varPhi(s)U^-\mathcal{P}_{Y_S}f_0.$$

Зауваження 1. У випадку, коли $\mathcal{P}_{Y_U}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} = 0$, інтегральне рівняння (2) з керуванням буде розв'язним при довільній функції $f(t)$.

Зауваження 2. Якщо $\mathcal{P}_{N(U)} = 0$, то операторне рівняння (21) буде n-нормальним [1] $(\dim\ker U = 0)$.

У цьому випадку інтегро-диференціальне рівняння (2) з керуванням при виконанні умови (22) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_1\\ \hat{c}_2\end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\varPhi]\big)(t)U_l^{(-1)}\mathcal{P}_{Y_S}f_0$$

при єдиному керуванні

$$u(s) = \varPhi(s)U_l^{(-1)}\mathcal{P}_{Y_S}f_0,$$

де $U_l^{(-1)}$ — лівий обернений оператор до оператора U [17].

Зауваження 3. Якщо $\mathcal{P}_{N(S)} = 0$, то операторне рівняння (11) буде n-нормальним [1] $(\dim\ker S = 0)$.

Тоді операторне рівняння (11) при виконанні умови (17) буде мати єдиний розв'язок

$$c_2 = S_l^{(-1)} f_0,$$

де $S_l^{(-1)}$ — лівий обернений оператор до оператора U [17].

У цьому випадку $X_2(t) = \left(\widetilde{L}_1^- P\right)(t) W \mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)} = 0$ та інтегро-диференціальне рівняння (2) з керуванням при виконанні умови (22) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), \;\; X_3(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_3 \end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\varPhi]\big)(t) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0.$$

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u(s) = \varPhi(s) \mathcal{P}_{N(U)} \hat{c}_3 + \varPhi(s) U^- \mathcal{P}_{Y_S} f_0.$$

3.2. Інтегро-диференціальні рівняння з керуванням у скінченновимірних гільбертових просторах. Далі розглянемо критерій існування керувань для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах. У цьому випадку запропонований метод дослідження можна уточнити та конкретизувати.

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння Фредгольма з виродженим ядром і керуванням

$$(Lz)(t) :\equiv \dot{z}(t) - \int\limits_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)]ds =$$

$$= f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds, \tag{26}$$

де $P(t)$ і $Q(t)$ — $(n \times m)$-вимірні матриці, а $W(t)$ та $V(t)$ — $(m \times n)$-вимірні матриці, $K(t,s)$ — $(n \times q)$-вимірна матриця, визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$, $f(t)$ — $(n \times 1)$-вимірний вектор-стовпчик, $u(t)$ — $(q \times 1)$-вимірний вектор-стовпчик, елементи яких належать простору $\mathbf{L}_2[a,b]$.

У цьому підпункті отримаємо умови існування й побудови загального розв'язку інтегро-диференціального рівняння з керуванням та встановимо вигляд загального керування, при якому ці розв'язки існують.

Розв'язком $z(t)$ інтегро-диференціального рівняння з керуванням (26) будемо називати пару вектор-функцій $z(t)$ і $u(s)$, які задовольняють рівняння (26). При цьому

$$z(t) \in \mathbf{D}_2\big([a,b], \mathbf{R}^n\big), \qquad \dot{z}(t) \in \mathbf{L}_2\big([a,b], \mathbf{R}^n\big), \qquad u(s) \in \mathbf{L}_2\big([a,b], \mathbf{R}^q\big).$$

Для вирішення поставленої мети необхідно отримати умови розв'язності й загальний вигляд розв'язків рівняння (26) без керування $(u(s) = 0)$ в евклідових просторах. Для її розв'язку застосуємо теорію псевдообернених операторів [10, 11].

Після традиційної заміни $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c, \quad c \in \mathbf{R}^n, \tag{27}$$

та позначень (5), (6) інтегро-диференціальне рівняння (26) без керуванням $(u(s) = 0)$ зводимо до інтегрального рівняння

$$(L_1 y)(t) := y(t) - M(t) \int\limits_s^b N(s) y(s)\, ds = g(t), \tag{28}$$

де $M(t)$ та $N(s)$ відповідно — $(n \times 2m)$- та $(2m \times n)$-вимірні матриці, що мають вигляд (5),

$$g(t) = f(t) + P(t)Wc, \quad W = \int\limits_a^b W(s)\, ds. \tag{29}$$

Тоді $D = I_{2m} - A,\ A = \int_a^b N(s)M(s)\, ds$ та ортопроєктори $P_{N(D)},\ P_{N(D^*)}$ [11, c. 61] будуть $(2m \times 2m)$-вимірними матрицями.

Нехай $\operatorname{rank} D = n_1$. Позначимо через $P_{N_r(D)}$ $(2m \times r)$-вимірну матрицю, яка складена з $r = 2m - n_1$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(D)}$, через $P_{N_r(D^*)}$ — $(r \times 2m)$-вимірну матрицю, яка складена з r лінійно незалежних рядків матриці-ортопроєктора $P_{N(D^*)}$, а через D^+ — псевдообернену матрицю до матриці D.

Відомо [11], що при виконанні r лінійно незалежних умов

$$P_{N_r(D^*)} \int\limits_a^b N(s) g(s) ds = P_{N_r(D^*)} \int\limits_a^b N(s) \big[f(s) + P(s)Wc\big] ds = 0 \tag{30}$$

і лише при них інтегральне рівняння (28) має сім'ю r лінійно незалежних розв'язків

$$y(t) = M(t)\, P_{N_r(D)} \hat{c}_r + \big(L_1^+ g\big)(t), \tag{31}$$

де $\hat{c}_r$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^r$, L_1^+ — псевдообернений за Муром – Пенроузом оператор до інтегрального оператора L, який має вигляд [11, c. 261]

$$\big(L_1^+ g\big)(t) = g(t) + M(t) \int\limits_a^b \Big[D^+ N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)} M^*(s)\Big] g(s)\, ds +$$

$$+ \Big[M(t) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t) \tilde{\beta}^{(-1)}\Big] \int\limits_a^b N(s) g(s)\, ds,$$

де

$$\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_r(D)} \alpha^{-1} P^*_{N_r(D)}, \qquad \tilde{\beta}^{(-1)} = P^*_{N_r(D^*)} \beta^{-1} P_{N_r(D^*)}$$

— $(2m \times 2m)$-вимірні матриці,

$$\alpha = \int_a^b X_r^*(t)X_r(t)dt, \qquad \beta = \int_a^b Y_r^*(t)Y_r(t)dt$$

— самоспряжені невироджені $(r \times r)$-вимірні матриці Грама,

$$X_r(t) = M(t)P_{N_r(D)}, \qquad Y_r(t) = N^*(t)P^*_{N_r(D^*)}$$

— повні системи лінійно незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L_1)$ та $N\big(L_1^*\big)$ інтегральних операторів L_1 та L_1^* відповідно.

Для знаходження значення $c \in \mathbf{R}^n$, при якому умова (30) розв'язності інтегрального рівняння (28) буде виконуватись, отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Sc = f_0, \tag{32}$$

де

$$S = P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)P(s)W\,ds, \quad S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r,$$

$$f_0 = -P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)f(s)\,ds = 0, \quad f_0 \in \mathbf{R}^r.$$

Нехай $\operatorname{rank} S = n_2$. Позначимо через $P_{N_\mu(S)}$ $(n \times \mu)$-вимірну матрицю, яка складена з $\mu = n - n_2$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(S)}$, через $P_{N_\nu(S^*)}$ — $(\nu \times r)$-вимірну матрицю, яка складена з $\nu = r - n_2$ лінійно незалежних рядків матриці-ортопроєктора $P_{N(S^*)}$, та через $S^+\colon \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$ — псевдообернену матрицю до матриці S.

Алгебраїчнене рівняння (32) розв'язне тоді й лише тоді, коли виконуються умови [11]

$$P_{N_\nu(S^*)}f_0 = -P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)f(s)\,ds = 0, \tag{33}$$

при виконанні яких воно має μ-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$c = P_{N_\mu(S)}\hat{c}_\mu + S^+ f_0, \tag{34}$$

де $\hat{c}_\mu$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^\mu$.

Оскільки матриці $P_{N_\nu(S^*)}$ та $P_{N_r(D^*)}$ мають повні ранги: $\operatorname{rank} P_{N_\nu(S^*)} = \nu$, $\operatorname{rank} P_{N_r(D^*)} = r$ і $\nu \le r$, то за нерівністю Сильвестра [18, с. 31] $\operatorname{rank}\big(P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\big) = \nu$. Таким чином, умова (33) складається з ν лінійно незалежних умов.

Враховуючи (34), підставимо $g(s) = f(s) + P(s)W\big[P_{N_\mu(S)}\hat{c}_\mu + S^+ f_0\big]$ з (29) у розв'язок (31) інтегрального рівняння (28):

$$y(t) = M(t)\,P_{N_r(D)}\hat{c}_r + \Big(L_1^+\big[f + PW\big\{P_{N_\mu(S)}\hat{c}_\mu + S^+ f_0\big\}\big]\Big)(t) =$$

$$= M(t)\, P_{N_r(D)}\hat{c}_r + \big(L_1^{+}P\big)(t)WP_{N_\mu(S)}\hat{c}_\mu + \big(L_1^{+}f\big)(t) + \big(L_1^{+}P\big)(t)WS^{+}f_0.$$

Тоді, використовуючи заміну (27), отримуємо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (26) без керування $(u(s) = 0)$:

$$z(t) = \int_a^t y(s)ds + c = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{c}_\mu\end{bmatrix} +$$
$$+ \left(\widetilde{L}_1^{+}f\right)(t) + \left(\widetilde{L}_1^{+}P\right)(t)WS^{+}f_0 + S^{+}f_0,$$

де

$$X_1(t) = \int_a^t M(s)\, P_{N_r(D)}ds, \qquad X_2(t) = \left(\widetilde{L}_1^{+}P\right)(t)WP_{N_\mu(S)} + P_{N_\mu(S)},$$
$$\left(\widetilde{L}_1^{+}f\right)(t) = \int_a^t \big(L_1^{+}f\big)(s)ds, \qquad \left(\widetilde{L}_1^{+}P\right)(t) = \int_a^t \big(L_1^{+}P\big)(s)ds. \tag{35}$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння без керування справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1$ *і* $\operatorname{rank} S = n_2$. *Тоді інтегро-диференціальне рівняння без керування (26) розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{L}_2\big([a,b], \mathbf{R}^n\big)$, *які задовольняють* ν *лінійно незалежні умови*

$$P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\int_a^b N(s)f(s)\,ds = 0,$$

при виконанні яких воно має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \Big[X_1(t), \;\; X_2(t)\Big]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{c}_\mu\end{bmatrix} + \left(\widetilde{L}_1^{+}f\right)(t) + \left(\widetilde{L}_1^{+}P\right)(t)WS^{+}f_0 + S^{+}f_0.$$

Припустимо, що

$$P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\int_a^b N(s)f(s)ds \neq 0,$$

тобто рівняння (26) без керування не має розв'язків. Знайдемо умови існування керування, при якому рівняння (26) буде мати розв'язки.

За теоремою 3 маємо, що інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (26) має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють ν лінійно незалежні умови [11]

$$P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\int_a^b N(s)\left[f(s) + \int_a^b K(s,\tau)u(\tau)\,d\tau\right]ds = 0. \tag{36}$$

З рівняння (36) отримаємо рівняння відносно керування $u(s)$:

$$\int_a^b \Psi(s)u(s)ds = P_{N_\nu(S^*)}f_0, \tag{37}$$

де

$$\Psi(s) = P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\int_a^b N(\tau)K(\tau,s)d\tau$$

— $(\nu \times q)$-вимірна матриця.

Розв'язок рівняння (37) будемо шукати у вигляді

$$u(s) = \Psi^*(s)c_1, \tag{38}$$

де $\Psi^*(s)$ — $(q\times\nu)$-вимірна матриця, транспонована до матриці $\Psi(s)$, $c_1 \in \mathbf{R}^\nu$ — невідомий вектор, який треба знайти.

Підставивши (38) у (37), отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Hc_1 = P_{N_\nu(S^*)}f_0, \tag{39}$$

де

$$H = \int_a^b \Psi(s)\Psi^*(s)ds$$

— $(\nu \times \nu)$-вимірна матриця.

Нехай $\operatorname{rank} H = n_3$. Позначимо через $P_{N_p(H)}$ $(\nu \times p)$-вимірну матрицю, яка складена з $p = \nu - n_3$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(H)}$, а через $P_{N_p(H^*)}$ — $(p\times\nu)$-вимірну матрицю, яка складена з p лінійно незалежних рядків матриці-ортопроєктора $P_{N(H^*)}$.

Алгебраїчна система (39) має розв'язок відносно вектора $c_1 \in \mathbf{R}^\nu$ тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$P_{N_p(H^*)}P_{N_\nu(S^*)}f_0 = -P_{N_p(H^*)}P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\int_a^b N(s)f(s)\,ds = 0, \tag{40}$$

при виконанні якої вона має p-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$c_1 = P_{N_p(H)}\hat{c}_p + H^+P_{N_\nu(S^*)}f_0, \tag{41}$$

де $\hat{c}_p$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^p$, H^+ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця до матриці H [10, 11].

Оскільки матриці $P_{N_p(H^*)}$ і $\left(P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\right)$ мають повні ранги: $\operatorname{rank} P_{N_p(H^*)} = p$, $\operatorname{rank}(P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}) = \nu$ і $p \le \nu$, то за нерівністю Сильвестра [18, с. 31]

$$\operatorname{rank}\left(P_{N_p(H^*)}P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)}\right) = p.$$

Таким чином, умова (40) складається з p лінійно незалежних умов.

Після підстановки (41) у (38) отримаємо p-параметричну сім'ю лінійно незалежних керувань

$$u(s) = \Psi^*(s) P_{N_p(H)} \hat{c}_p + \Psi^*(s) H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0, \tag{42}$$

при яких інтегро-диференціальне рівняння (26) буде мати сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} z(t) = \Big[X_1(t),\ X_2(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{c}_\mu \end{bmatrix} + \\ + \left(\widetilde{L}_1^+ \left\{ f(\cdot) + \int_a^b K(\cdot, s) u(s) ds \right\}\right)(t) + \\ + \left(\widetilde{L}_1^+ P\right)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0. \end{aligned} \tag{43}$$

Підставивши (42) у (43), одержимо

$$\begin{aligned} z(t) = \Big[X_1(t),\ X_2(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{c}_\mu \end{bmatrix} + \\ + \left(\widetilde{L}_1^+ \left\{ f(\cdot) + \int_a^b K(\cdot, s) \left[\Psi^*(s) P_{N_p(H)} \hat{c}_p + \Psi^*(s) H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0\right] ds \right\}\right)(t) + \\ + \left(\widetilde{L}_1^+ P\right)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0. \end{aligned}$$

Позначивши

$$\left[K\Psi^*\right](t) = \int_a^b K(t, s) \Psi^*(s)\, ds,$$

після перетворень будемо мати

$$\begin{aligned} z(t) = \Big[X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t)\Big] \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{c}_\mu \\ \hat{c}_p \end{bmatrix} + \left(\widetilde{L}_1^+ f\right)(t) + \\ + \left(\widetilde{L}_1^+ \left[K\Psi^*\right]\right)(t) H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0 + \left(\widetilde{L}_1^+ P\right)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0, \end{aligned}$$

де $X_3(t) = \left(\widetilde{L}_1^+ \left[K\Psi^*\right]\right)(t) P_{N_p(H)},\ \hat{c}_r \in R^r,\ \hat{c}_\mu \in R^\mu,\ \hat{c}_p \in R^p,$ — довільні сталі,

$$\big(\widetilde{L}_1^+[K\Psi^*]\big)(t) = \int_a^t \big(L_1^+[K\Psi^*]\big)(s)\, ds, \tag{44}$$

$$\left(L_1^+\left[K\Psi^*\right]\right)(t) = \left[K\Psi^*\right](t) + M(t)\int_a^b \left[D^+N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)}M^*(s)\right]\left[K\Psi^*\right](s)\,ds +$$

$$+\left[M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\right]\int_a^b N(s)[K\Psi^*](s)\,ds.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1,\ \operatorname{rank} S = n_2,\ \operatorname{rank} H = n_3.$

Тоді при виконанні p *лінійно незалежних умов (40) і лише при них інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (26) має сім'ю* $r+\mu+p,\ r = 2m-n_1,\ \mu = n-n_2,\ p = \nu - n_3$ *розв'язків*

$$z(t) = \left[X_1(t),\ \ X_2(t),\ \ X_3(t)\right]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{c}_\mu\\ \hat{c}_p\end{bmatrix} + \left(\widetilde{L}_1^+ f\right)(t) +$$

$$+\left(\widetilde{L}_1^+\left[K\Psi^*\right]\right)(t)H^+P_{N_\nu(S^*)}f_0 + \left(\widetilde{L}_1^+ P\right)(t)WS^+f_0 + S^+f_0,$$

де $\hat{c}_r \in \mathbf{R}^r,\ \hat{c}_\mu \in \mathbf{R}^\mu$ *та* $\hat{c}_p \in \mathbf{R}^p$ *— довільні сталі,* $\left(\widetilde{L}_1^+ f\right)(t),\ \left(\widetilde{L}_1^+ P\right)(t)$ *визначені формулами (35), а* $\left(\widetilde{L}_1^+\left[K\Psi^*\right]\right)(t)$ *— формулою (44).*

При цьому рівняння (26) має p*-параметричну сім'ю лінійно незалежних допустимих керувань*

$$u(s) = \Psi^*(s)P_{N_p(H)}\hat{c}_p + \Psi^*(s)H^+P_{N_r(D^*)}f_0.$$

Зауваження 4. Якщо $\operatorname{rank} H = \nu$ $(P_{N(H)} \equiv 0, P_{N(H^*)} \equiv 0)$, то матриця H буде мати обернену H^{-1}, а рівняння (39) — єдиний розв'язок $c_1 = H^{-1}P_{N_\nu(S^*)}f_0$. У цьому випадку інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (26) буде мати сім'ю $r+\mu,\ r = 2m - n_1,$ $\mu = n - n_2$ розв'язків

$$z(t) = \left[X_1(t),\ \ X_2(t)\right]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{c}_\mu\end{bmatrix} + \left(\widetilde{L}_1^+ f\right)(t) +$$

$$+\left(\widetilde{L}_1^+\left[K\Psi^*\right]\right)(t)H^{-1}P_{N_\nu(S^*)}f_0 + \left(\widetilde{L}_1^+ P\right)(t)WS^+f_0 + S^+f_0$$

при єдиному керуванні

$$u(s) = \Psi^*(s)H^{-1}P_{N_\nu(S^*)}f_0.$$

Література

1. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
2. Ю. К. Ландо, *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1112 – 1126 (1968).
3. В. Ф. Журавлев, *Условия бифуркации решений слабовозмущенных краевых задач для операторных уравнений в банаховых пространствах*, Укр. мат. журн., **70**, № 3, 366 – 378 (2018).
4. В. П. Журавльов, М. П. Фомін, *Слабко збурені інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 184 – 199 (2020).

5. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием*, Дифференц. уравнения, **30**, № 10, 1677 – 1682 (1994).
6. Gupta Vidushi, Dabas Jaydev, *Existence results for a fractional integro-differential equation with nonlocal boundary conditions and fractional impulsive conditions*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **15**, № 4, 370 – 382 (2015).
7. І. А. Бондар, *Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь*, Буковин. мат. журн., **2**, № 4, 7 – 11 (2014).
8. І. А. Бондар, *Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром і крайових задач для них*, Буковин. мат. журн., **4**, № 1-2, 13 – 17 (2016).
9. A. T. Assanova, E. A. Bakirova, Zh. M. Kadirbaeva, *Numerical solution to a control problem for integro-differential equations*, Comput. Math. Math. Phys., **60**, № 2, 203 – 221 (2020).
10. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2nd ed.*, De Gruyter, Berlin (2016).
11. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
12. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, *Критерій розв'язності лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1469 – 1486 (2020).
13. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
14. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, вип. 13, 78 – 116 (2007).
15. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci. (N.Y.), **212**, № 3, 275 – 289 (2016).
16. V. F. Zhuravlev, *Generalized inverse operator for an integro-differential operator in the Banach space*, J. Math. Sci. (N.Y.), **249**, № 4, 609 – 628 (2020).
17. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n- (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010).
18. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).

Одержано 30.12.21