УДК. 511.7+519.21

СУПЕРПОЗИЦІЇ ФУНКЦІЙ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

М. В. Працьовитий

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: prats4444@gmail.com

Ю. Ю. Вовк

Чернігів. обл. ін-т післядиплом. пед. освіти ім. К. Д. Ушинського
вул. Слобідська, 83, Чернігів, 14021, Україна
e-mail: freeeidea@ukr.net

І. М. Лисенко

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

С. П. Ратушняк

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: ratush404@gmail.com

We study structural, integral, differential, variational, and fractal properties of the function f whose argument $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ is represented by a polybasic s-symbol Q_s^*-representation $(1 < s \in N)$ and its corresponding value is expressed by $f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = a^{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots}$, where $u_1 + u_2 + \ldots$ is a given convergent positive series, $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$.

Вивчаються структурні, інтегральні, диференціальні, варіаційні та фрактальні властивості функції f, аргумент $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ якої подано поліосновним s-символьним Q_s^*-зображенням $(1 < < s \in N)$, а відповідне йому значення виражено $f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = a^{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots}$, де $u_1 + u_2 + \ldots$ — наперед заданий збіжний додатний ряд, $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$.

1. Вступ. Якщо графік функції $y = f(x)$ є самоподібною (самоафінною, автомодельною) множиною простору R^2, яка має дробову розмірність, або принаймні одна з суттєвих для функції множин (множина значень, множина рівня, множина несталості тощо) має дробову розмірність типу Хаусдорфа – Безиковича, то вважаємо, що функція f має *фрактальні властивості* або є *фрактальною* [1].

Перед тим як навести приклади функцій із фрактальними властивостями, нагадаємо суть поліосновного Q_s^*-зображення й Q_s-зображення чисел $(2 \le s \in N)$, що є узагальненнями класичного s-кового зображення.

Нехай задано $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — алфавіт, $L_s = A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $\|q_{ik}\|$ — нескінченну s-рядкову стохастичну матрицю з додатними елементами

$$q_{ik} > 0, \quad q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{s-1,k} = 1, \quad \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = 0,$$

$$\beta_{0k} \equiv q_{0k}, \quad \beta_{ik} \equiv \beta_{i-1,k} + q_{i-1,k} = q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{i-1,k}.$$

Теорема 1 [2]. *Для будь-якого* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* $(\alpha_n) \in L_s$ *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}. \tag{1}$$

Символічний запис $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ називається Q_s^*-*зображенням* числа x і ряду (1). При цьому α_n називається n-ю цифрою цього зображення.

Існують числа, що мають два зображення: $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n (0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] (s-1)}$. Їх злічення кількість і вони називаються Q_s^*-*бінарними*. Решта чисел мають єдине зображення і називаються Q_s^*-*унарними*. Кожна цифра зображення Q_s^*-унарного числа є його коректно означеною функцією.

Одним із ключових продуктивних понять теорії Q_s^*-зображення чисел є поняття Q_s^*-циліндра. Нагадаємо, що Q_s^*-циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називається множина

$$\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \left\{ x \in [0;1] : x = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m \alpha_1 \alpha_2 \ldots}, \ (\alpha_i) \in L \right\}.$$

Q_s^*-циліндри мають такі властивості:

1) $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m i}$, $[0;1] = \bigcup\limits_{c_1 \in A} \ldots \bigcup\limits_{c_m \in A} \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}$;

2) $\max \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m i} = \min \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m [i+1]}$, $i = \overline{0, s-2}$;

3) $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ є відрізком $[a;b]$, де

$$a = \beta_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\beta_{c_k k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{c_i i} \right), \qquad b = a + \prod\nolimits_{i=1}^{m} q_{c_i i};$$

4) $\left| \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m} \right| = \prod\nolimits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$, $\dfrac{|\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m i}|}{|\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}|} = q_{i, m+1}$;

5) для $\forall (c_n):$ $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m \ldots}$.

Рангом Q_s^*-*бінарного числа* x_0 називається найменший ранг циліндра, кінцем якого є число x_0. Існує $(s-1)$ Q_s^*-бінарне число рангу 1, $(s-1)s$ чисел рангу 2, $(s-1)s^k$ чисел рангу $k+1$.

Якщо у матриці $\|q_{ik}\|$ всі стовпці однакові, тобто $q_{ik} = q_i,\ i = \overline{0, s-1}$ для всіх $k \in N$, то Q_s^*-зображення називається Q_s-зображенням. Q_s^*-зображення є узагальненням класичного s-кового зображення і є ним при $q_{ik} = q_i = \dfrac{1}{s}$.

Приклад 1. Фрактальною функцією є неперервна строго спадна функція $\mathfrak{I}$, означена рівністю

$$\mathfrak{I}\Big(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\Big) = \Delta^{Q_s^*}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots},$$

яка називається *інверсором* Q_s^*-зображення чисел [3].

Справді, у випадку, коли Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, графік $\Gamma_{\mathfrak{I}}$ функції $\mathfrak{I}$ є самоафінною множиною зі структурою

$$\Gamma_{\mathfrak{I}} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{s-1},$$

де

$$\Gamma_i = \gamma_i(\Gamma_{\mathfrak{I}}), \quad \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = q_{[s-1-i]} y + \beta_{[s-1-i]}, \end{cases} \quad i = \overline{0, s-1}.$$

Самоафінна розмірність d_0 графіка функції є розв'язком рівняння $\sum_{i=0}^{s-1} (q_0 q_i)^{\frac{x}{2}} = 1$, причому $0 < d_0 < 1$, якщо існує $q_i \neq \dfrac{1}{s}$. У цьому випадку функція $\mathfrak{I}$ є сингулярною, тобто неперевною функцією, відмінною від сталої, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега [3].

Приклад 2. Фрактальною функцією є неперервний розв'язок системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} f(q_0 x) = p_0 f_2(x), \\ f(q_0 + (1 - q_0)x) = p_0 + (1 - p_0) f(x), \end{cases} \quad \text{де} \quad q_0, p_0 \in (0;1), \quad p_0 \neq q_0.$$

Справді, єдиним розв'язком цієї системи функціональних рівнянь є функція

$$f_2\left(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \alpha_1 p_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k p_{1-\alpha_k} \prod_{i=q}^{k-1} q_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta^{P_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

яка множину нульової міри Лебега

$$E[Q_2; p_0, 1-p_0] = \left\{ x : x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\ 1 - p_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} \equiv \nu_1(x) \right\}$$

розмірності Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0(E) = \dfrac{\ln p_0^{p_0}(1-p_0)^{1-p_0}}{\ln q_0^{p_0}(1-q_0)^{1-p_0}}$ переводить у множину $E[Q_2; q_0, 1-q_0]$ повної міри Лебега [2], тобто є сингулярною функцією розподілу ймовірностей.

Приклад 3. Функція f_3 означається на $[0;1)$ рівністю

$$f_3\left(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{Q_2}_{g(\alpha_1,\alpha_2)g(\alpha_2,\alpha_3)\ldots g(\alpha_{n-1},\alpha_n)g(\alpha_n,\alpha_{n+1})\ldots},$$

де $g(i,j) = i \cdot j$.

Множиною значень цієї функції є фрактальна N-самоподібна множина канторівського типу $C[Q_2, \overline{101}, \overline{(1)}]$, N-самоподібна розмірність якої є розв'язком рівняння $q_0^x + q_1^x - q_0^x q_1^x + q_0^{2x} q_1^x = 1$ [4].

Приклад 4. Функція f_4 означається на $[0;1)$ рівністю

$$f_4\big(x = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = \Delta^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},$$

де

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \qquad a_{n+1} = \begin{cases} a_n, & \text{якщо} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - a_n, & \text{якщо} \quad \alpha_{n+1} \neq \alpha_n. \end{cases}$$

Множина $E(y_0) \equiv \{x : f(x) = y_0\}$ рівня $y_0 = \Delta^4_{(10)}$ функції f_4 має фрактальну розмірність Хаусдорфа – Безиковича, рівну $\log_4 3$ (див. [5]).

У роботі [6] Бл. Сендов вивчав властивості класу фрактальних функцій ви гляду

$$f\big(x = \Delta^2_{a_1\ldots a_k\ldots}\big) = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{a_k(x)}, \quad \text{де} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ — абсолютно збіжний нескінченний добуток із додатними множника.

Функції цього класу мають зображення

$$f\Big(x + 2^{-k}\Big) = \lambda_k f(x), \qquad x \in \nabla^2_{a_1\ldots a_{k-1}0} = \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-i}a_i; 2^{-k} + \sum_{i=1}^{k} 2^{-i}a_i\right), \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

У [7] показано, що вони подаються у більш зручному для вивчення вигляді:

$$f\big(\Delta^2_{a_1\ldots a_n\ldots}\big) = a^{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i}, \quad \text{де} \quad \lambda_i = a^{u_i},$$

оскільки до теорії легко долучаються відомості з геометрії числових рядів (властивості неповних сум рядів, що сьогодні інтенсивно вивчаються [8 – 11]), при цьому суттєво розширюються можливості дослідження. У згаданій роботі узагальнено попередній клас функцій за допомогою розгляду Q_2-зображення аргументу, що є узагальненням класичного двійкового зображення.

У роботі [12] розширено клас досліджуваних функцій за допомогою розгляду Q_2^*-зображення аргументу і кола задач, що розглядалися.

У цій роботі ми розглядаємо поліосновну систему кодування чисел засобами багаточисельного алфавіту, що приводить, взагалі кажучи, до систем зображення чисел із ненульовою надлишковістю і наявності у функції континуальних множин рівнів зі складною тополого-метричною локальною структурою.

2. Об'єкт дослідження. У цій роботі основним об'єктом вивчення є функція, означена рівністю

$$f\Big(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\Big) = a^{g(x)}, \qquad g(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i; \tag{2}$$

$$r_0 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) = u_1 + \ldots + u_n + r_n \tag{3}$$

— заданий абсолютно збіжний ряд із сумою r_0, $1 \neq a$ — додатний параметр, $1 < s$ — фіксоване натуральне число.

Очевидно, що функція f є коректно означеною на множині Q_s^**-унарних* чисел (тобто тих, що мають єдине Q_s^*-зображення). Означення функції f у Q_s^**-бінарній* точці є коректним, якщо таким є означення функції g, а це буде тоді, коли для будь-якого $n \in N$ і набору цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ справджуватиметься рівність

$$g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m(0)}\Big) = g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}[\alpha_m-1](s-1)}\Big),$$

що рівносильно $u_n = (s-1)(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots)$ для будь-якого $n \in N$. У загальному випадку коректність означення функції f забезпечується домовленістю використовувати лише одне із зображень Q_s^*-бінарних чисел. Домовимося, що далі таким буде зображення, яке має період (0).

Очевидними є рівності

$$g\Big(0 = \Delta^{Q_s^*}_{(0)}\Big) = 0, \quad g\Big(1 = \Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}\Big) = (s-1)r_0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = a^{(s-1)r_0},$$

$$g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\Big) = iu_1 + g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{0\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\Big), \quad f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\Big) = a^{iu_1} f(\Delta^{Q_s^*}_{0\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}),$$

$$f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k i\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}\Big) = a^{(i-j)u_k} f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k j\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}\Big).$$

Нас цікавлять структурні, інтегральні, варіаційні та фрактальні властивості функції $f(x)$, зокрема властивості множини її значень і множин рівнів.

Зауваження 1. Якщо зафіксовані Q_s^*-зображення чисел і параметр a, а послідовності (u_n) і (v_n) визначають функції f і g класу S, означені рівністю (2), то послідовність (t_n), де $t_n = u_n + v_n$, визначає функцію $\phi = f \cdot g$ цього ж класу.

3. Неперервність функції *f*.

Теорема 2. *Функція f неперервна в кожній Q_s^*-унарній точці, а в Q_s^*-бінарній точці вона неперервна справа.*

Доведення. Очевидно, що функція f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли неперервною в цій точці є функція $g(x)$.

Нехай $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ — Q_s^*-унарне число. Розглянемо $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ таке, що $x \neq x_0$. Тоді існує m таке, що $c_m \neq \alpha_m$, але $c_i = \alpha_i$ при $i < m$, причому умови $x \to x_0$ і $m \to \infty$ рівносильні. Оскільки

$$\big|g(x) - g(x_0)\big| = \big|(\alpha_m - c_m)u_n + (\alpha_{m+1} - c_{m+1})u_{m+1} + \ldots\big| \leq$$

$$\leq (s-1)|u_m + u_{m+1} + \ldots| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

то g і f — неперервні в точці x_0.

Розглянемо Q_s^*-бінарну точку $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c_m(0)}$. Нехай $x > x_0$ і достатньо близьке до x_0. Тоді $x = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{m+k+1}\ldots}$, причому серед членів послідовності (α_{m+k+1}) є відмінні від нуля, разом із цим умова $x \to x_0$ рівносильна $k \to \infty$. Оскільки

$$g(x) - g(x_0) = \sum_{i=m+k+1}^{\infty} \alpha_i u_i \to 0, \quad k \to \infty,$$

то g — неперервна в точці x_0 справа.

Лема 1. *Для того щоб функція $g(x)$ була неперервна у точці $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (0)}$, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $u_m = (s-1) r_m$.*

Доведення. Враховуючи попередню теорему, функція f (рівносильно g) неперервна у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли вона неперервна у цій точці зліва, тобто коли для будь-якої послідовності (x_k) такої, що $x_0 > x_k \to x_0$, $k \to \infty$, виконується рівність $\lim_{x_k \to x_0} g(x_k) = g(x_0)$.

Якщо число $x_k < x_0$ і достатньо близьке до x_0, то воно має Q_s^*-зображення

$$x_k = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] \underbrace{c \ldots c}_{k} \alpha_{m+k+1} \alpha_{m+k+2} \ldots}, \quad c = s - 1.$$

Тоді

$$g(x_0) - g(x_k) = u_m - \big((s-1) u_{m+1} + \ldots + (s-1) u_{m+k} + \\ + \alpha_{m+k+1} u_{m+k+1} + \alpha_{m+k+2} u_{m+k+2} + \cdots \big).$$

Звідси випливає, що $\lim_{k \to \infty} [g(x_0) - g(x_k)] = 0$ лише тоді, коли $u_m = (s-1) r_m$.

Лема 2. *Якщо збіжний додатний ряд*

$$u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots = u_1 + \ldots + u_n + r_n \equiv r_0$$

має властивість $u_n = (s-1) r_n$ для будь-якого $n \in N$, то $u_n = \dfrac{1}{s} u_{n-1} = \dfrac{s-1}{s^n} r_0$ для будь-якого $n \in N$.

Доведення. Оскільки $u_n = (s-1) r_n = (s-1)(r_{n-1} - u_n)$, то виконується рівність

$$u_n = \frac{s-1}{s} r_{n-1} = \frac{s-1}{s} \frac{1}{s-1} u_{n-1} = \frac{1}{s} u_{n-1}.$$

Тоді

$$u_1 = \frac{s-1}{s} r_0, \qquad u_2 = \frac{s-1}{s} r_0,$$

$$u_n = \frac{s-1}{s} r_{n-1} = \frac{1}{s} u_{n-1} = \frac{s-1}{s^n} r_0.$$

Теорема 3. *Для того щоб функції g і f були неперервними на відрізку $[0;1]$, необхідно й достатньо, щоб $u_n = (s-1) s^{-n} r_0$ для будь-якого $n \in N$ і деякого $r_0 \in R$.*

Доведення. З урахуванням попередніх теореми й лем бачимо, що функція f буде неперервною на $[0;1]$ тоді й тільки тоді, коли вона буде неперервною зліва у кожній Q_s^*-бінарній точці, тобто, коли $u_n = (s-1) r_n$ для всіх $n \in N$. А це згідно з попередньою лемою буде тоді, коли $u_n = (s-1) s^{-n} r_0$ для будь-якого $n \in N$, тобто коли ряд є геометричним.

Зауваження 2. Неперервність функцій g і f однозначно визначається властивостями ряду (3) і числом s. До того ж у кожній точці області визначення ці функції одночасно неперервні або розривні.

4. Стрибки функції.

Лема 3. *Якщо послідовність (u_n) має властивості:*

1) $u_n > u_{n+1} > 0,\ n = \overline{1, m-1}$*;*

2) $u_m > (s-1)r_m \equiv (s-1)(u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots)$, *то* U_s*-множина ряду* $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ *не містить жодної точки з інтервалу* $((s-1)r_m; u_m)$.

Доведення. Розглянемо довільне число x з U_s-множини цього ряду, тобто $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, де $(\alpha_n) \in L_s$.

Якщо $\alpha_k \neq 0$ для деякого $k \leq m$, то $x \geq u_k \geq u_m$. Тому $x \notin ((s-1)r_m; u_m)$.

Якщо $\alpha_k = 0$ для всіх $k \leq m$, але $\alpha_k = 1$ для всіх $k > m$, то $x = (s-1)r_m$. Якщо ж $\alpha_k = 0$ для всіх $k \leq m$ та існує $\alpha_{m+i} = 0$ для деякого $i \in N$, то $x < (s-1)r_m$, а тому $x \notin ((s-1)r_m; u_m)$.

Отже, в кожному з випадків число x не належить інтервалу $((s-1)r_m; u_m)$.

Зауваження 3. Далі ми розглядаємо додатні ряди з монотонно спадними членами.

Лема 4. *Якщо для фіксованого номера* $m \in N$ *виконується умова* $u_m > (s-1)r_m$, *то у точці* $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}$ *функція* g *має розрив, причому величина стрибка* $\delta_g(x_0)$ *функції* g *у цій точці не залежить від набору цифр* $c_1, \ldots, c_m$ *та обчислюється за формулою* $\delta_g(x_0) = u_m - (s-1)r_m$.

Доведення. Оскільки функція g у точці x_0 неперервна справа, то для $s-1 = c$ маємо

$$\delta_g(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}[g(x_0+\varepsilon) - g(x_0-\varepsilon)] = g(x_0) - \lim_{x\to x_0-0} g(x) =$$

$$= g(x_0) - \lim_{k\to\infty} g\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1]\underbrace{c\ldots c}_{k}a_1a_2\ldots}\right) =$$

$$= u_m - \lim_{k\to\infty}\left(cu_{m+1} + \ldots + cu_{m+k} + a_1u_{m+k+1} + a_2u_{m+k+2} + \ldots\right) =$$

$$= u_m - (s-1)r_m.$$

Зауважимо, що справджується таке більш загальне твердження.

Теорема 4. *Якщо у точці* $x_0 = \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}$ *функція* g *має розрив, тобто виконується умова* $u_m \neq (s-1)r_m$, *то величини стрибків* $\delta_g(x_0)$ *і* $\delta_f(x_0)$ *функцій* g *і* f *відповідно у цій точці не залежать від набору цифр* $c_1, \ldots, c_m$ *й обчислюються за формулами* $\delta_g(x_0) = |u_m - (s-1)r_m|$, $\delta_f(x_0) = \left|a^{u_m} - a^{(s-1)r_m}\right|$.

Теорема доводиться аналогічно до леми 4.

Теорема 5. *Сума всіх стрибків функції* g *дорівнює сумі ряду*

$$(s-1)\sum_{m=1}^{\infty} s^{m-1}|u_m - (s-1)r_m|. \tag{4}$$

Доведення. Враховуючи попередні лему та зауваження, достатньо зауважити, що існує $(s-1)s^{m-1}$ Q_s^*-бінарних точок рангу m (рівносильно кількості впорядкованих наборів $(c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m)$, де $c_m \neq 0$, цифр алфавіту), у яких функція g має “стрибок” величини $|u_m - (s-1)r_m|$. Тоді сума всіх стрибків функції g дорівнює сумі ряду (4).

5. Структурні властивості функції.

Лема 5. *Справедливі рівності:*

1) $\dfrac{g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c\alpha_2\alpha_3\ldots}\Big)}{g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{[s-1-c]\alpha_2\alpha_3\ldots}\Big)} = 1 + \frac{u_1(s-1)}{g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{[s-1-c]\alpha_2\alpha_3\ldots}\Big)}$*;*

2) $g(x) + g(\Im(x)) = g(1) = (s-1)r_0$*;*

3) $f(x) \cdot f(I(x)) = a^{g(1)}$*;*

4) $\dfrac{f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}b_{k+2}\ldots}\Big)}{f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_kc_{k+1}c_{k+2}\ldots}\Big)} = \prod_{i=1}^{\infty} a^{(b_i-c_i)u_i}.$

Доведення. Справді, переконуємося, що

$$1)\quad \frac{g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c\alpha_2\alpha_3\ldots}\Big)}{g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{[s-1-c]\alpha_2\alpha_3\ldots}\Big)} = \frac{cu_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots}{u_1(s-1-c) + \alpha_2 u_2 + \ldots} =$$

$$= \frac{cu_1 - u_1(s-1-c) + u_1(s-1-c) + \alpha_2 u_2 + \ldots}{u_1(s-1-c) + \alpha_2 u_2 + \ldots} =$$

$$= \frac{(2c - u_1 + 1)u_1}{g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{[s-1-c]\alpha_2\alpha_3\ldots}\Big)} + 1;$$

$$2)\quad g(I(x)) = g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots}\Big) =$$

$$= u_1(s-1-\alpha_1) + u_2(s-1-\alpha_2) + \ldots + u_n(s-1-\alpha_n) + \ldots =$$

$$= (s-1)(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots) - (u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n + \ldots) =$$

$$= g(1) - g(x);$$

$$3)\quad f(x)\, f(I(x)) = a^{g(x)}\, a^{g(I(x))} = a^{g(x)}\, a^{g(1)-g(x)} = a^{g(1)} = a^{(s-1)r_0}.$$

Рівність 4) є очевидною.

Лема 6. *Якщо Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, то графік Γ_f функції f, означеної рівністю (2), є автомодельною множиною, яка має структуру*

$$\Gamma_f \equiv \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{s-1}, \qquad \Gamma_i \equiv \Big\{M(x;y) \colon x \in \Delta_i^{Q_s^*},\ y = f(x)\Big\},$$

де

$$\Gamma_i = \gamma_i(\Gamma_f), \quad \gamma_i \colon \begin{cases} x' = \Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \\ y' = a^{u_1(i-\alpha_1(x))} f(x). \end{cases}$$

Доведення. Доведемо, що $\Gamma_i = \gamma_i(\Gamma_f)$.

1. Спочатку доведемо включення $\Gamma_i \subset \gamma_i(\Gamma_f)$. Нехай $M_0(x_0;y_0) \in \Gamma_i$, тобто $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, $y_0 = a^{iu_1+\alpha_2u_2+\ldots}$. Покажемо, що $M_0 \in \gamma_i(\Gamma_f)$. З цією метою розглянемо точку $M_*(x_*;y_*)$ на графіку Γ_f функції $f \colon x_* = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $y_* = f(x_*)$ і її образ при перетворенні

$$\gamma_i \colon x'_* = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x_0, \qquad y'_* = a^{u_1(i-\alpha_1)} f(x_*) = a^{iu_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n+\ldots} = f(x_0).$$

Отже, $(x'_*;y'_*) = (x_0;y_0) \in \gamma_i(\Gamma_f)$.

2. Тепер доведемо включення $\gamma_i(\Gamma_f) \subset \Gamma_i$. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_f$, $y = f(x)$, $\gamma_i(M) = M'(x';y')$, тобто

$$x' = \Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \qquad y = a^{u_1(i-i)} f(x') = f(x').$$

Звідси бачимо, що $M(x;y) \in \Gamma_i$. З доведених включень отримуємо $\Gamma_i = \gamma_i(\Gamma_f)$.

6. Інтегральні властивості. Функції g і f інтегровні за Лебегом, оскільки можуть мати лише скінченну або зліченну множину точок розриву.

Зауважимо, що інтегральні властивості функції, означеної рівністю (2), значною мірою залежать від інтегральних властивостей функції $g(x)$, для неперервних функцій f вони визначаються автомодельними властивостями графіка функції g.

Лема 7. *Якщо* $u_n = \dfrac{(s-1)r_0}{s^n}$, $Q_s^* = Q_s$, *тобто* $q_{ik} = q_i$, *то*

$$\int_0^1 g(x)dx = r_0 \sum_{i=1}^{s-1} iq_i.$$

Доведення. За адитивною властивістю інтеграла

$$I = \int_0^1 g(x)dx = \int\limits_{x\in\Delta_0^{Q_s}} g(x)\,dx + \sum_{i=1}^{s-1} \int\limits_{x\in\Delta_i^{Q_s}} g(x)\,dx.$$

Враховуючи специфіку

1) Q_s-зображення: $\Delta^{Q_s}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots} = q_0\Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}$, $\Delta^{Q_s}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots} = \beta_i + q_i\Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}$;

2) послідовності (u_n) і функції

$$g(x) : g\big(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}\big) = \frac{(s-1)r_0}{s}\,\alpha_1 + \frac{1}{s}\,g\big(\Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots}\big),$$

маємо

$$I = \int_0^1 \frac{1}{s}\,g(t)\,d(q_0 t) + \sum_{i=1}^{s-1}\int_0^1 \left[\frac{(s-1)r_0}{s}\,i + \frac{1}{s}\,g(t)\right] d(\beta_i + q_i t) =$$

$$= \frac{q_0}{s}\int_0^1 g(t)d(t) + \frac{(s-1)r_0}{s}\sum_{i=1}^{s-1} iq_i + \sum_{i=1}^{s-1}\frac{q_i}{s}\int_0^1 g(t)\,d(t) =$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^1 g(t)\,dt + \frac{(s-1)r_0}{s}\sum_{i=1}^{s-1} iq_i.$$

Звідси

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right)\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{(s-1)r_0}{s}\sum_{i=1}^{s-1} iq_i.$$

Отже,

$$\int_0^1 g(x)dx = r_0\sum_{i=1}^{s-1} iq_i.$$

Теорема 6. *Якщо матриця* $\|q_{ik}\|$, *що визначає* Q_s^**-зображення, має властивість* $q_{ik} = q_i$ *при* $k > m$ *і* $u_{m+n} = \dfrac{\lambda}{s^n}$, $n \in N$, *то*

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{(c_1,\ldots,c_m)\in A^m} \left[(c_1u_1 + \ldots + c_mu_m) + r_0\sum_{i=1}^{s-1} iq_i\right]\prod_{k=1}^{m} q_{c_kk}. \tag{5}$$

Доведення. За адитивною властивістю інтеграла

$$I = \int_0^1 g(x)dx = \sum_{(c_1,\ldots,c_m)\in A^m} \int_{\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}} g(x)\,dx.$$

Обчислимо останній інтеграл. Враховуючи, що

$$g\Big(x = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\Big) = c_1u_1 + \ldots + c_mu_m + g_1(x),$$

де

$$g_1(x) = \frac{(s-1)\lambda\alpha_1}{s} + \frac{(s-1)\lambda\alpha_2}{s^2} + \ldots = \frac{(s-1)\lambda\alpha_1}{s} + \frac{1}{s}\,g_1\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}\right),$$

$$\Delta^{Q_s}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots} = \beta_i + q_i\Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}, \quad i = 0, 1, \ldots, s-1,$$

маємо

$$\int_{\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}} g(x)dx = \int_0^1 [c_1u_1 + \ldots + c_mu_m + g_1(t)]\,d(B_m + P_mt) =$$

$$= (c_1u_1 + \ldots + c_mu_m)P_m + P_m\int_0^1 g_1(t)\,dt,$$

де

$$B_m \equiv \beta_{c_11} + \sum_{k=2}^{m}\left(\beta_{c_kk}\prod_{i=1}^{k-1} q_{c_ii}\right), \qquad P_m \equiv \prod_{i=1}^{m} q_{c_ii}.$$

За попередньою лемою

$$\int_0^1 g_1(t)dt = \lambda\sum_{i=1}^{s-1} iq_i.$$

Тому виконується рівність (5).

Теорема 7. *Для функції* f, *означенної рівністю (2), виконується рівність*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \prod_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{s-1} a^{ju_i}q_{ji}. \tag{6}$$

Доведення. Оскільки

$$f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots}\right) = a^{iu_1} f\left(\Delta^{Q_s^*}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots}\right),$$

то

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{s-1} \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_i} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(x)dx + \sum_{i=1}^{s-1} a^{iu_1} \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(t)\,d\left(\beta_{i1} + \frac{q_{i1}}{q_{01}}\,t\right) =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{s-1} a^{iu_1} \frac{q_{i1}}{q_{01}} \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(t)\,dt =$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a^{iu_1} q_{i1}}{q_{01}}\right) \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(x)\,dx.$$

Оскільки

$$f\left(\Delta^{Q_s^*}_{0i\alpha_3\alpha_4\ldots}\right) = a^{iu_2} f\left(\Delta^{Q_s^*}_{00\alpha_3\alpha_4\ldots}\right),$$

то

$$\int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_0} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{s-1} \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{0i}} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{\infty} a^{iu_2} \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(t)\,d\left(q_{01}\beta_{i2} + \frac{q_{i2}}{q_{02}}\,t\right) =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{\infty} a^{iu_2} \frac{q_{i2}}{q_{02}} \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(t)\,dt =$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a^{iu_2} q_{i2}}{q_{02}}\right) \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(x)\,dx.$$

Отже,

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a^{iu_1} q_{i1}}{q_{01}}\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a^{iu_2} q_{i2}}{q_{02}}\right) \int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{00}} f(x)\,dx.$$

Аналогічно міркуючи, за k кроків отримуємо

$$\int_0^1 f(x)dx = \prod_{i=1}^{k}\left(1+\sum_{j=1}^{s-1}\frac{a^{ju_i}q_{ji}}{q_{0i}}\right)\int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}} f(x)\,dx.$$

Оскільки $a^{iu_k} \to 1,\ k \to \infty$, а $f(x) \to 1$ при $x \to 0$, то для достатньо великих $k \in N$ виконується

$$\int\limits_{\Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}} f(x)dx \approx \prod_{i=1}^{k} q_{0i}$$

і

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \prod_{i=1}^{k} q_{0i}\left(1+\sum_{j=1}^{s-1}\frac{a^{ju_i}q_{ji}}{q_{0i}}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(q_{0i}+\sum_{j=1}^{s-1}a^{ju_i}q_{ji}\right) = \prod_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{s-1}a^{ju_i}q_{ji}.$$

Спрямовуючи k до нескінченності, одержуємо рівність (6).

Наслідок 1. *Якщо Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, тобто $q_{in} = q_i$ для всіх $n \in N$, $i \in A$, то*

$$\int_0^1 f(x)dx = \prod_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{s-1}a^{ju_i}q_j,$$

а при $q_i = \dfrac{1}{s}$ маємо

$$\int_0^1 f(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{a^{ju_i}}{s}.$$

7. Варіаційні властивості.

Теорема 8. *Якщо $u_n \geq (s-1)r_n$ для кожного $n \in N$, то функція g є зростаючою, а функція f — строго монотонною.*

Доведення. Очевидно, що функція g є зростаючою тоді і тільки тоді, коли вона такою є на кожному з Q_s^*-циліндрів. Розглянемо довільний циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}}$ і дві його точки $x_1 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}0\alpha_1\alpha_2\ldots}$ і $x_2 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}1\beta_1\beta_2\ldots}$.

Якщо $\alpha_k - \beta_k = s-1$ для всіх $k \in N$, то $x_1 = x_2$. Якщо існує n таке, що $\alpha_n - \beta_n \neq s-1$, то $x_1 < x_2$. Нехай $x_1 \neq x_2$, тоді

$$g(x_2) - g(x_1) = (u_m + \beta_1 u_{m+1} + \beta_2 u_{m+2} + \ldots) - (\alpha_1 u_{m+1} + \alpha_2 u_{m+2} + \ldots) =$$
$$= u_m + u_{m+1}(\beta_1 - \alpha_1) + u_{m+2}(\beta_2 - \alpha_2) + \ldots > u_m - (s-1)r_m \geq 0.$$

Наслідок 2. *Якщо $u_n \geq (s-1)r_n$ для всіх n, більших деякого $m \in N$, то функція g є функцією обмеженої варіації.*

Наслідок 3. *Якщо $u_n \geq (s-1)r_n$ для всіх n, більших деякого $m \in N$, то g є монотонною функцією на кожному з циліндрів рангу m.*

Теорема 9. *Для того щоб функція f була ніде не монотонною, необхідно й достатньо, щоб умова $u_n < (s-1)r_n$ виконувалася для нескінченної множини значень n.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай f ніде не монотонна функція. Припустимо, що при цьому нерівність $u_n < (s-1)r_n$ виконується лише скінченну кількість разів, причому $u_n \geq (s-1)r_n$ для всіх $n \geq k$. Розглянемо циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0...0}_{k}}$ і дві довільні його точки

$$x_1 = \Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0...0}_{k}c_1...c_{m-1}0\alpha_1\alpha_2...}, \qquad x_2 = \Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0...0}_{k}c_1...c_{m-1}1\beta_1\beta_2...}.$$

Якщо x_1 і x_2 різні (а це буде тоді, коли $\alpha_i - \beta_i \neq s-1$ для деякого i), то $x_1 < x_2$ і

$$g(x_2) - g(x_1) = u_m + u_{m+1}(\beta_1 - \alpha_1) + u_{m+2}(\beta_2 - \alpha_2) + \ldots \geq u_{m+k} - (s-1)(r_{m+k}) \geq 0.$$

Отже, функція g на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0...0}_{k}}$ зростає. Якщо $a > 1$, то такою є і функція f. Якщо ж $0 < a < 1$, то функція f на цьому циліндрі є спадною. В обох випадках отримуємо суперечність з умовою ніде не монотонності функції.

Достатність. Зрозуміло, що коли $u_n < (s-1)r_n$, тоді існує таке натуральне $v = v(n)$, що виконується нерівність $u_n < (s-1)(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+v})$. Очевидно, що f буде ніде не монотонною тоді та тільки тоді, коли вона не є монотонною на кожному з Q_s^*-циліндрів. Розглянемо довільний Q_s^*-циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m}$ і три точки, що йому належать:

$$x_1 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m\underbrace{1...1}_{k}(0)}, \qquad x_2 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m\underbrace{1...1}_{k-1}0\underbrace{c...c}_{p}(0)}, \qquad x_3 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m\underbrace{1...1}_{k-1}0\underbrace{c...c}_{v}(0)},$$

такі, що $c = s-1$, $v < p$, $u_{m+k} < (s-1)(u_{m+k+1} + u_{m+k+2} + \ldots + u_{m+k+v}) < (s-1)r_{m+k}$. Тоді $x_3 < x_2 < x_1$. Разом із цим

$$g(x_2) - g(x_3) = u_{m+k+s+1} + u_{m+k+s+2} + \ldots + u_{m+k+s+p} > 0,$$

$$g(x_1) - g(x_2) = u_{m+k} - (u_{m+k+1} + \ldots + u_{m+k+p}) < 0.$$

Тоді $(g(x_2) - g(x_3))(g(x_1) - g(x_2)) < 0$, що є свідченням немонотонності функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m}$. Отже, такою є і функція $f(x)$.

Таким чином, функція $f(x)$ ніде не монотонна.

Зауваження 4. Якщо $u_n > u_{n+1} > 0$ для будь-якого $n \in N$, то очевидними є рівності

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m}} g(x) = g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m(0)}\Big) = c_1u_1 + \ldots + c_mu_m,$$

$$\sup_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m}} g(x) = g\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m(s-1)}\Big) = c_1u_1 + \ldots + c_mu_m + (s-1)r_m.$$

Отже, коливання функції g на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1...c_m}$ дорівнює $(s-1)r_m$ і не залежить від основи циліндра.

Теорема 10. *Якщо $u_n > u_{n+1} > 0$ і виконується принаймні одна з умов:*

1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} s^n r_n = \infty$*;*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} s^n |(s-1)r_n - u_n| = \infty$,
то функція g має необмежену варіацію.

Доведення. Зрозуміло, що варіація функції g на відрізку $[0;1]$ є не меншою суми всіх стрибків функції. А тому, якщо сума всіх стрибків функції дорівнює ∞ (а це обумовлено умовою 2), то g має необмежену варіацію.

Сума коливань функції g на циліндрах рангу n дорівнює $(s-1)s^n r_n$. Тому умова 1) визначає необмежену варіацію цієї функції.

8. Множина значень і множини рівнів функції. Множину $U_s = \{x : x = \alpha_1 u_1 + \ldots \ldots + \alpha_n u_n + \ldots,\ (\alpha_n) \in L_s\}$ називатимемо *U_s-множиною* ряду (3). Очевидно, що U_s-множина є узагальненням множини неповних сум (підсум) ряду. Нагадаємо, що множиною неповних сум (підсум) ряду (3) називається множина

$$E(u_n) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \varepsilon_n \in \{0,1\} \right\} =$$

$$= \left\{ x : x = \sum_{n \in M \subset N} u_n,\ M \in 2^N \right\}.$$

До того ж U_s-множина ряду (3) є множиною неповних сум такого ряду:

$$\underbrace{u_1 + \ldots + u_1}_{s} + \underbrace{u_2 + \ldots + u_2}_{s} + \ldots + \underbrace{u_n + \ldots + u_n}_{s} + \ldots \partial.$$

Відомо [13], що множина неповних сум будь-якого абсолютно збіжного ряду є континуальною досконалою множиною, яка є відрізком або об'єднанням відрізків, ніде не щільною множиною (нульової або додатної міри Лебега [14]), канторвалом [9, 11], а тому такі ж властивості має U_s-множина ряду.

Очевидно, що множина E_g значень функції g з точністю до зліченної множини співпадає з U_s-множиною ряду (3). Справді, якщо x є Q_s^*-бінарним числом, тобто $x = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_{m-1}[c_m - 1](s-1)}$, в якому функція g має розрив, то число

$$y = c_1 u_1 + \ldots + c_{m-1} u_{m-1} + (c_m - 1) u_m + (s-1) r_m$$

є точкою множини $E(u_n)$, але не належить множині E_g, якщо воно не є образом жодної Q_s^*-унарної точки. Оскільки функція $y = a^x$ зберігає розмірність Хаусдорфа – Безиковича [15], то розмірності U_s-множини і множин значень E_g і E_f рівні між собою.

Нехай $(\alpha_n) \in L_s$. Введемо скорочення (позначення):

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots \equiv \Delta^{U_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

Зрозуміло, що при будь-якій послідовності $(\alpha_n) \in L_s$ число $x = \Delta^{U_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ належить U_s-множині ряду (3).

Множину $\Delta^{U_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ усіх чисел x, які мають зображення $\Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_m \alpha_1 \alpha_2 \ldots}$, назвемо *$U_s$-циліндром рангу m з основою $c_1 \ldots c_m$*. Очевидно, що

$$\Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_m} = \bigcup_{i=0}^{s-1} \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_m i}, \qquad \min \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_m} = \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_m (0)},$$

$$\max \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m} = \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m(s-1)}, \qquad \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m} = \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m} \quad \forall (c_m) \in L_s.$$

Оскільки

$$U_s = \bigcup_{c_1=0}^{s-1} \ldots \bigcup_{c_m=0}^{s-1} \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m},$$

то топологічні властивості U_s-циліндра такі ж, як і в U_s-множини ряду (3).

Циліндричним відрізком рангу m *з основою* $c_1 \ldots c_m$ називається відрізок із кінцями $\Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m(0)}$ і $\Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m(s-1)}$.

Діаметр U_s*-циліндра* (як і циліндричного відрізка) обчислюється за формулою

$$d\left(\Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m}\right) = \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m(s-1)} - \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m(0)} = (s-1)r_m.$$

Теорема 11. *1. Якщо* $u_n \leq (s-1)r_n$ *для всіх* $n \in N$, *то множиною значень функції* g *є відрізок* $[0; r_0]$.

2. Якщо $u_n \leq (s-1)r_n$ *для всіх* $n \geq m$, *то множиною значень функції* g *є об'єднання циліндрів рангу* m.

3. Якщо $u_n > (s-1)r_n$ *для всіх* $n \in N$, *то множиною значень функції* g *є множина канторівського типу (досконала ніде не щільна множина), міра Лебега якої обчислюється за формулою*

$$\lambda(U_s) = sr_0 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{r_{k-1}},$$

а α*-вимірна міра Хаусдорфа — за формулою*

$$H^{\alpha}(U_s) = \varliminf_{n\to\infty} s^n[(s-1)r_n]^{\alpha} = \varliminf_{n\to\infty} \left[s((s-1)r_n^{\alpha})^{\frac{1}{n}}\right]^n.$$

4. Якщо $u_n > (s-1)r_n$ *для всіх* n, *більших деякого* m, *то множиною значень функції* g *є множина канторівського типу (досконала ніде не щільна множина).*

Доведення. При $s = 2$ сформульоване твердження є наслідком теореми Какея [13].

1. Оскільки U_s-множина є досконалою (замкненою множиною без ізольованих точок), то для доведення твердження досить показати, що між будь-якими двома точками x_1 і x_2 U_s-множини ряду (3) існує точка цієї множини.

Нехай $x_1 = \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m a_1 a_2\ldots}$, $x_2 = \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m b_1 b_2\ldots}$ — різні точки U_s-множини ряду (3), причому $a_1 < b_1$.

Враховуючи коректність означення функції f, вважаємо, що серед членів обох послідовностей (a_n) і (b_n) існує безліч відмінних від $s-1$. Тоді $x_1 < x_2$, оскільки

$$x_2 - x_1 = (b_1 - a_1)u_{m+1} + (b_2 - a_2)u_{m+2} + \ldots > u_{m+1} - (s-1)r_{m+1} \geq 0.$$

Розглянемо два можливі випадки.

1) Серед членів послідовності $(b_2, b_3, \ldots)$ існують відмінні від 0. У цьому випадку розглянемо число $x = \Delta^{U_s}_{c_1\ldots c_m b_1(0)}$. Оскільки

$$x_2 - x = b_2 u_{m+2} + b_3 u_{m+3} + \ldots > 0,$$

$$x - x_1 = (b_1 - a_1)u_{m+1} - a_2 u_{m+2} - \ldots > u_{m+1} - (s-1)r_{m+1} \geq 0,$$

то $x_1 < x < x_2$.

2) У випадку $b_{1+n} = 0$ для всіх $n \in N$ розглянемо число

$$x = \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_m a_1 \underbrace{[s-1] \ldots [s-1]}_{k} (0)},$$

де $u_{m+k+1} \neq s-1,$ k — найменше з можливих. Оскільки

$$x_2 - x = (b_1 - a_1) u_{m+1} - (s-1)(u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots + u_{m+k+2}) > u_{m+1} - (s-1) r_{m+1},$$

$$x - x_1 = (s - 1 - a_{m+k+1}) u_{m+k+1} - a_{m+k+2} u_{m+k+2} - a_{m+k+3} u_{m+k+3} - \ldots >$$

$$> u_{m+k+1} - (s-1) r_{m+k+1},$$

то $x_1 < x < x_2.$

Твердження 1 доведено.

Твердження 2 доводиться аналогічно з тією лише різницею, що міркування слід вести стосовно щільності U_s-множини у довільному U_s-циліндрі рангу $m.$

3. Враховуючи порядок слідування U_s-циліндрів $\left(\min \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_{m-1} i} < \min \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_{m-1} [i+1]} \right)$ і те, що

$$\Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_{n-1} [i+1] (0)} - \Delta^{U_s}_{c_1 \ldots c_{n-1} i (s-1)} = u_n - (s-1) r_n > 0$$

для будь-якого $n \in N$ і набору цифр $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, i),$ робимо висновок, що між двома довільними циліндрами одного рангу міститься суміжний з U_s-множиною інтервал.

Отже, множини значень функцій g і f ніде не щільні.

Враховуючи зроблені вище зауваження, розуміємо, що міри Лебега U_s-множини ряду (3) і множини E_g значень функції g рівні. Знайдемо вираз $\lambda(U_s).$

Нехай F_n — об'єднання циліндричних відрізків рангу $n,$ $F_{n+1} \equiv F_n \setminus F_{n+1}.$ Тоді

$$U_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \lim_{n \to \infty} F_n \qquad \text{і} \qquad \lambda(U_s) = \lim_{n \to \infty} \lambda(F_n) \equiv \lambda(U_s).$$

Оскільки

$$\lambda(F_n) = r_0 \, \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} \frac{\lambda(F_{n-1})}{\lambda(F_{n-2})} \ldots \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)},$$

де $F_0 = [0; r_0],$ то

$$\lambda(U_s) = r_0 \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = r_0 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Але $F_n = s^n (s-1) r_n,$ і тому

$$\lambda(U_s) = s r_0 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{r_{k-1}}.$$

Оскільки циліндричні відрізки одного рангу утворюють покриття множини U_s і при цьому в сукупності для них виконується умова “економності покриттів”, то наведена формула для обчислення міри Хаусдорфа випливає безпосередньо з її означення.

4. Властивості множин E_{g_1} значень функції $g_1 = u_{m+1}\alpha_{m+1} + u_{m+2}\alpha_{m+2}(x) + \ldots$ описує твердження 3. Множина значень E_g функції g має вказані у тверженні 4 властивості, оскільки вона є арифметичною сумою скінченної множини

$$C = \{x : x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m, (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A^m\}$$

і множини E_{g_1}.

Приклад 5. Нехай $u_n = \dfrac{1}{a^n}$, $s = a - k$, де $2 < a \in N$, $k \in N$, $2 \le a - k$. Тоді $r_0 = \dfrac{1}{a-1}$, $r_n = \dfrac{1}{(a-1)a^n} < u_n$.

У цьому випадку виконуються умови твердження 3 теореми 11, а отже, міра Лебега множин U_s, E_g і E_f дорівнює нулю, оскільки

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{a}, \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{r_k}{r_{k-1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

а фрактальна розмірність Хаусдорфа – Безиковича дорівнює $\log_a (a - k)$.

Приклад 6. Нехай $u_n = 2^{-n}$, $s = 3$. Тоді очевидно, що умови твердження 1 теореми 11 виконуються, а отже, множиною значень функцій g і f є проміжок, а саме: множиною значень функції $g(x)$ є відрізок $[0; 2]$, а функції $f(x)$ — $[1; a^2]$, якщо $a > 1$, і навпаки — $[a^2; 1]$, якщо $a < 1$ відповідно. Разом із цим, згідно з теоремою 4 функції мають розрив у кожній Q_3^*-бінарній точці. Нехай $B \equiv \{(0,2), (1,0)\}$. Розглянемо число $y_0 = g\big(\Delta^{Q_3^*}_{(10)}\big) = \dfrac{2}{3}$. Легко бачити, що y_0 має континуальну множину прообразів. Це числа вигляду $x = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\ldots}$, де $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) \in B$, множина яких при умові, що Q_3^*-зображення є Q_3-зображенням, є самоподібною множиною канторівського типу, розмірність d_0 якої є розв'язком рівняння $q_0^x(q_1^x + q_2^x) = 1$. При $q_0 = q_1 = q_2 = \dfrac{1}{3}$ маємо $d_0 = \log_9 2$. Аналогічна ситуація має місце для множини рівня $y_0 = g\Big(\Delta^{Q_3^*}_{(20)}\Big)$, оскільки пари $(2,0)$ і $(1,2)$ є взаємозамінними у поданні числа двійковим дробом із надлишковою цифрою 2 [16, 17].

Таким чином, у даному випадку функції g і f мають безліч континуальних множин рівнів. Справді, якщо $y_0 = f(x_0)$ і при цьому у Q_3^*-зображенні числа x нескінченну кількість разів зустрічається принаймні одна з пар послідовних цифр, що належить множині $\{(1;0), (0,2), (1,2), (2,0)\}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною, а отже, фрактальною, аномально фрактальною або суперфрактальною [2].

Зауважимо, що при виконанні умов теореми 11 функція g (а разом із нею і f) може мати розподіл значень як абсолютно неперервний, так сингулярний [4, 16, 17]. В останньому випадку він зосереджений на фракталі.

9. Диференціальні властивості неперервних функцій. У цьому пункті ми розглядаємо неперервні функції, означені рівністю (2), тобто такі, для яких $u_n = \dfrac{(s-1)r_0}{s^n}$. Згідно з теоремою 8 кожна з таких функцій є строго монотонною, а отже, згідно з відомою теоремою Лебега майже скрізь (у розумінні міри Лебега) має скінченну похідну. У цьому випадку вираз функції g є класичним s-ковим зображенням.

Лема 8. *Якщо у точці* x_0 *існує похідна* $f'(x_0)$, *то вона обчислюється за формулою*

$$f'\left(x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \lim_{n\to\infty}(s-1)\prod_{k=1}^{n}(sq_{\alpha_k k})^{-1} = (s-1)\prod_{k=1}^{\infty}(sq_{\alpha_k k})^{-1}. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що якщо похідна $f'(x_0)$ існує, то вона виражається

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}\right)}{\left|\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right|},$$

де $\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right)$ — послідовність вкладених Q_s^*-циліндрів, які містять точку x_0.

Покладемо

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)} \equiv x_0 + \tau_n, \qquad \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} \equiv x_0 - \varepsilon_n.$$

Тоді маємо

$$\delta \equiv \frac{f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}\right)}{\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)} - \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}} = \frac{f(x_0+\tau_n) - f(x_0-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n+\tau_n} =$$

$$= \frac{f(x_0+\tau_n) - f(x_0)}{\tau_n+\varepsilon_n} + \frac{f(x_0) - f(x_0-\varepsilon_n)}{\tau_n+\varepsilon_n} =$$

$$= \frac{f(x_0+\tau_n) - f(x_0)}{\tau_n}\,\frac{\tau_n}{\tau_n+\varepsilon_n} + \frac{f(x_0) - f(x_0-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\,\frac{\varepsilon_n}{\tau_n+\varepsilon_n}.$$

Оскільки $f'(x_0)$ існує, то

$$\frac{f(x_0+\tau_n) - f(x_0)}{\tau_n} = f'(x_0) + L(x_0,\tau_n), \quad \text{де} \quad \lim_{n\to\infty} L(x_0,\tau_n) = 0,$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_0-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = f'(x_0) + B(x_0,\varepsilon_n), \quad \text{де} \quad \lim_{n\to\infty} B(x_0,\varepsilon_n) = 0.$$

Далі одержуємо

$$\delta = \left[f'(x_0) + L(x_0,\tau_n)\right]\frac{\tau_n}{\tau_n+\varepsilon_n} + \left[f'(x_0) + B(x_0,\varepsilon_n)\right]\frac{\varepsilon_n}{\tau_n+\varepsilon_n} =$$

$$= f'(x_0) + L(x_0,\tau_n)\frac{\tau_n}{\tau_n+\varepsilon_n} + B(x_0,\varepsilon_n)\frac{\varepsilon_n}{\tau_n+\varepsilon_n}.$$

Враховуючи, що

$$0 < \frac{\tau_n}{\tau_n+\varepsilon_n} = \frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon_n}{\tau_n}} < 1 \qquad \text{і} \qquad 0 < \frac{\varepsilon_n}{\tau_n+\varepsilon_n} = \frac{1}{\dfrac{\tau_n}{\varepsilon_n}+1} < 1,$$

отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}\right)}{\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)} - \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}} = f'(x_0).$$

Наслідок 4. *Якщо для точки x_0 нескінченний добуток (7) розбігається, то функція f у точці x_0 не має скінченної похідної.*

Будемо вважати, що стохастична матриця $\|q_{ik}\|$, яка визначає Q_s^*-зображення, має асимптотичну властивість, якщо для кожного $i \in A$ існує границя $\lim_{k\to\infty} q_{ik} \equiv q_i$. Якщо матриця має асимптотичну властивість, то $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$. При цьому, якщо виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{s-1}\left(1-\frac{q_{ik}}{q_i}\right)^2 < \infty, \tag{8}$$

то для майже всіх чисел $x \in [0;1]$ частота $\nu_i(x)$ цифри i у Q_s^*-зображенні числа x дорівнює $q_i,\ i=\overline{0, s-1}$, тобто множина

$$E\big[Q_s^*; q_0, \ldots, q_{s-1}\big] = \Big\{x \in [0;1] : \nu_i(x) = q_i,\ i = \overline{0, s-1}\Big\}$$

є множиною повної міри (див. [2]).

Теорема 12. *Нехай матриця $\|q_{ik}\|$, яка визначає Q_s^*-зображення, має асимптотичну властивість і при цьому виконується умова (8). Якщо існує $q_i \neq \dfrac{1}{s},\ i \in A$, то функція f є сингулярною (має похідну, рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). Якщо $q_i = \dfrac{1}{s}$ для всіх $i \in A$, то f є абсолютно неперервною функцією.*

Доведення. Нехай W — множина точок з $E\left[Q_s^*; q_0, \ldots, q_{s-1}\right]$, у яких функція g має скінченну похідну, і $x_0 \in W$. Тоді згідно з лемою 8 виконується рівність (7). Оскільки при $q_i \neq \dfrac{1}{s}$ необхідна умова збіжності нескінченного добутку (7) не виконується, то $f'(x_0) = 0$. Враховуючи, що W є множиною повної міри Лебега і $f'(x_0) = 0$ для кожної точки цієї множини, робимо висновок: функція f є сингулярною.

Якщо $q_i = \dfrac{1}{s}$, то очевидно, що добуток (7) збігається, а тому функція є абсолютно неперервною.

Зауваження 5. Клас функцій, які задовольняють умови попередньої теореми, містить класичну сингулярну функцію Салема [18], що є функцією розподілу випадкової величини з незалежними s-ковими цифрами [2, 19].

Література

1. M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko, *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation*, Int. J. Math. Anal. (Ruse), **7**, № 61-64, 3155 – 3167 (2013).
2. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
3. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, N. V. Dyvliash, S. P. Ratushniak, *Inversor of digits of Q_2^*-representation of numbers*, Мат. студії, **55**, № 1, 37 – 43 (2021).
4. М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк, *Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 16 (2), 150 – 160 (2014).
5. М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк, *Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2-зображення*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 231 – 252 (2020).
6. Бл. Сендов, *Двоично собственно-подобные фрактальные функции*, Фундам. и прикл. математика, **5**, № 2, 589 – 595 (1999).

7. М. В. Працьовитий, Я. В. Гончаренко, С. О. Дмитренко, І. М. Лисенко, С. П. Ратушняк, *Про один клас функцій з фрактальними властивостями*, Буковин. мат. журн., **6**, № 1, 273 – 283 (2021).

8. Н. О. Корсунь, М. В. Працьовитий, *Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 10, 28 – 39 (2009).

9. J. A. Guthrie, I. E. Nymann, *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Collog. Math., **55**, № 2, 323 – 327 (1988).

10. В. П. Маркітан, М. В. Працьовитий, І. О. Савченко, *Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду*, Укр. мат. журн., **70**, № 10, 1403 – 1416 (2018).

11. J. E. Nymann, R. A. Saenz, *On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, The topological structure of the set of subsums of an infinite series, Collog. Math., **68**, 259 – 264 (1995).

12. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, I. M. Lysenko, S. P. Ratushniak, *Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^*-representation of argument*, Мат. студії, **56**, № 2, 133 – 143 (2021).

13. S. Kakeya, *On the partial sums of an infinite series*, Tohoku Sci. Rep., **3**, № 4, 159 – 164 (1914).

14. Я. Виннишин, В. Маркітан, М. Працьовитий, І. Савченко, *Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами*, Proc. Int. Geom. Cent., **12**, № 2, 26 – 42 (2019); https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455.

15. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff – Besicovitch dimension*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **24**, 1 – 16 (2004).

16. М. В. Працьовитий, *Розподіли сум випадкових степеневих рядів*, Доп. НАН України, № 5, 32 – 37 (1996).

17. М. В. Працьовитий, *Згортки сингулярних розподілів*, Доп. НАН України, № 9, 36 – 42 (1997).

18. R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*, Trans. Amer. Math. Soc., **53**, 423 – 439 (1943).

19. G. Marsaglia, *Random variables with independent binary digits*, Ann. Math. Statist., **42**, № 2, 1922 – 1929 (1971).

Одержано 31.12.21