УДК 517.928

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ТОЧКАМИ ПОВОРОТУ

М. О. Рашевський

Криворіз. нац. ун-т
вул. Віталія Матусевича, 11, Кривий Ріг, 50027, Україна
e-mail: mora290466@gmail.com

П. Ф. Самусенко

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: psamusenko@ukr.net

О. П. Томащук

Нац. авіац. ун-т
просп. Гузара Любомира, 1, Київ, 03058, Україна
e-mail: oleksii.tomashchuk@npp.nau.edu.ua

We develop an algorithm for finding asymptotic solutions of the singularly perturbed linear differential algebraic system with turning point.

Розроблено алгоритм знаходження асимптотичних розв'язків сингулярно збуреної лінійної диференціально-алгебраїчної системи з точкою повороту.

1. Вступ. Дослідження властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із точками повороту розпочалися на початку XX ст. Так, у працях Р. Ганса для рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - atx = 0$$

було побудовано два лінійно незалежні розв'язки, вивчено їхню асимптотичну поведінку для великих значень змінної t [1].

Для диференціальних рівнянь другого порядку з великим параметром у випадку нестабільного спектра фундаментальні результати отримав Р. Лангер. Розроблений ним метод ґрунтується на процедурі зведення зазначеного диференціального рівняння до деякого еталонного рівняння, розв'язки якого відомі [2]. Для дослідження асимптотичних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків використовувалася процедура послідовного зниження порядку рівняння [3].

Узагальнюючи ідеї Р. Лангера для сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \tag{1}$$

В. Вазов навів лінійні підстановки, за допомогою яких система (1) зводилася до деякої еталонної системи, яка у двовимірному випадку фактично є, наприклад, рівнянням Ейрі, Вебера тощо [4].

Іншим ефективним методом асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь із нестабільним спектром є метод зрощування, згідно з яким окремо будуються два розв'язки зазначеної системи — на проміжку, що містить точку повороту (внутрішнє розвинення), і на проміжку, що її не містить (зовнішнє розвинення). Якщо переріз цих проміжків є непорожньою множиною, то таким чином вдається побудувати асимптотичний розв'язок системи на заданому відрізку. У працях В. Вазова зазначений підхід реалізовано для системи (1) з нільпотентною жордановою клітиною $A(0,0)$ [5]. Зазначимо, що в методі зрощування основною складністю є узгодження асимптотичних розвинень розв'язків, побудованих на різних проміжках. Для ефективного проведення такого узгодження розв'язки сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь можна будувати у вигляді подвійних асимптотичних рядів (за степенями параметра та незалежної змінної) [6, 7].

Близьким за суттю до методу зрощування є метод примежевих функцій асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, згідно з яким розглядають задану систему також на кількох проміжках, де поведінка її розв'язків принципово відрізняється [8].

Зауважимо, що дослідження Р. Лангера та В. Вазова, насамперед, стосувалися системи (1), в якій $A(0,0)$ — нільпотентна жорданова клітина, тобто

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Випадок, коли $A(0,0) = 0$, в теорії асимптотичного інтегрування сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь принципово відрізняється.

У працях Й. Сібуї наведено теореми про асимптотичне розщеплення системи (1) на підсистеми меншої розмірності як у випадку, коли $A(0,0)$ є матрицею типу (2), так і у випадку, коли $A(0,0) = 0$ [9].

Пізніше Р. Хансон [10, 11] побудував асимптотичні розв'язки системи (1), в якій

$$A(t,0) = t^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^p & 0 \end{pmatrix},$$

де $k \geq 0,\ p \geq 0$.

Система (1) є частинним випадком сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad t \in [0;T], \tag{3}$$

де $x = x(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, $A(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t),\ B(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k B_k(t)$, яка й розглядається у цій праці.

Диференціально-алгебраїчна система (3) має два типи асимптотичних розв'язків. Розв'язки першого типу відповідають скінченним елементарним дільникам в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t),$ а розв'язки другого типу — нескінченним. Зазначені розв'язки зображуються за допомогою розвинень за степенями параметра $\varepsilon,$ показники яких залежать як від кратності коренів характеристичного рівняння

$$\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) = 0$$

та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурювальних коефіцієнтів системи ($A_k(t), B_k(t), k \geq 1$) [12].

Теоретичним підґрунтям досліджень властивостей розв'язків системи (3) є відповідні результати, отримані для аналогічної диференціально-алгебраїчної системи без параметра

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0;T]. \tag{4}$$

Якщо в'язка $A(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0;T]$ зберігає сталу кронекереву структуру, то систему (4) можна розщепити на алгебраїчну та диференціальну системи з одиничною матрицею при похідних в останній [13 – 15]. Якщо ж сталість кронекерової структури зазначеної в'язки в окремих точках відрізка $[0;T]$ порушується, тобто наявні точки повороту, то можна скористатися алгоритмом розщеплення, що ґрунтується на понятті індекса системи [16 – 18].

Зазначимо, що наявність малого параметра при похідних суттєво ускладнює використання першого підходу до розщеплення системи (3) і робить практично неможливим другий. Саме тому систему (3) розглядають переважно за умови сталої кронекерової структури в'язки $A_0(t) - \lambda B_0(t)$.

Питання про структуру фундаментальної матриці системи (4) вирішено у працях В. П. Яковця [19]. Це дозволило вже для системи (3) розробити алгоритми побудови розв'язку задачі Коші [12, 20], крайових задач [21, 22], задач теорії оптимального керування [23], спираючись на теорію Флоке [24 – 26], розв'язати задачу про періодичні розв'язки [27], узагальнити наведені результати для диференціально-алгебраїчних систем вищих порядків [28]. Зауважимо, що перелічені дослідження задач, пов'язаних із системою (3), стосувалися, насамперед, випадку сталої кронекерової структури в'язки $A_0(t) - \lambda B_0(t)$.

У працях [29, 30] досліджено систему (3) за наявності точки повороту. При цьому припускається, що

$$A(0,0) = \operatorname{diag}\{E_q, J_p\}, \qquad B(0,0) = \operatorname{diag}\{J_q, E_p\},$$

де E_q — одинична матриця порядку $q,$ J_q — нільпотентна жорданова клітина порядку q типу (2), матриці E_p та J_p визначаються аналогічно. Асимптотичні формули для розв'язків системи (3) побудовано окремо на двох відрізках, один із яких містить точку повороту, а інший — її не містить. Проведено зрощування знайдених асимптотичних розвинень.

У цій праці розглянуто сингулярну збурену диференціально-алгебраїчну систему (3) з точкою повороту за умови, що $J_q = 0,$ $J_p = 0.$ Такий випадок принципово відрізняється від дослідженого раніше випадку в [29, 30]. Розв'язки системи (3) побудовано на двох відрізках, один із яких містить точку повороту, та здійснено зрощування знайдених асимптотичних розвинень.

2. Сингулярно збурені системи з точками повороту. Асимптотичні розв'язки системи (3) побудовано на відрізках $\left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_0\right]$, $t_0 \leq T$, та $\left[0; k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right]$, числа $k_0,\ k_0',\ \left(k_0 < k_0'\right),\ t_0$ визначено далі. У п. 3 проведено зрощування побудованих асимптотичних розвинень і визначено фундаментальну матрицю системи (3) на відрізку $[0; t_0]$.

2.1. Зовнішнє розвинення. 1. Припустимо, що $A(0,0) = \operatorname{diag}\{E_q, 0_p\}$, $B(0,0) = \operatorname{diag}\{0_q, E_p\}$, $p + q = n$, де E_q — одинична матриця порядку q, 0_p — нульова матриця порядку p; аналогічно визначаються матриці E_p та 0_q.

Тоді згідно з [9, 20, 31] існують такі неособливі достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon) \in [0; t_1] \times [0; \varepsilon_1]$, $t_1 \leq T$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що виконуються рівності

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\{E_q, J_p(t,\varepsilon)\},$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\{J_q(t,\varepsilon), E_p\},$$

де $J_p(0,0) = 0_p$, $J_q(0,0) = 0_q$.

Покладаючи $x(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)$ у системі (3), дістаємо

$$\varepsilon H(t,\varepsilon)\,\frac{dy}{dt} = C(t,\varepsilon)y, \tag{5}$$

де $C(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) - \varepsilon H(t,\varepsilon)Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon)$. Згідно з [12] формальні розв'язки системи (5) шукаємо у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

де $u_i(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярна функція, причому

$$u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k u_i^{(k)}(t), \qquad \lambda_i(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\lambda_i^{(k)}(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Підставимо (6) у систему (5):

$$H(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon)\lambda_i(t,\varepsilon) + \varepsilon H(t,\varepsilon)u_i'(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon). \tag{7}$$

Вважаючи, що

$$H(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k H_k(t), \qquad C(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(t),$$

у рівності (7) зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях k, $k = \overline{1,m}$, параметра ε:

$$\left(C_0(t) - \lambda_i^{(0)}(t)H_0(t)\right)u_i^{(0)}(t) = 0, \tag{8}$$

$$\left(C_0(t) - \lambda_i^{(0)}(t)H_0(t)\right)u_i^{(k)}(t) = d_i^{(k)}(t), \quad k \in N; \tag{9}$$

тут

$$d_i^{(k)}(t) = \sum_{s=0}^{k-1}H_s(t)\left(u_i^{(k-s-1)}(t)\right)' - \sum_{s=1}^{k}C_s(t)u_i^{(k-s)}(t) +$$

$$+\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{s}H_s(t)u_i^{(j)}(t)\lambda_i^{(k-s-j)}(t)+H_0(t)\sum_{s=0}^{k-1}u_i^{(s)}(t)\lambda_i^{(k-s)}(t).$$

Запишемо рівняння (8) таким чином:

$$\left(E_q-\lambda_i^{(0)}(t)J_q(t,0)\right)u_{i1}^{(0)}(t)=0, \tag{10}$$

$$\left(J_p(t,0)-\lambda_i^{(0)}(t)E_p\right)u_{i2}^{(0)}(t)=0, \tag{11}$$

де $u_{i1}^{(0)}(t)$ — q-вимірний вектор, що містить q перших компонент вектора $u_i^{(0)}(t),\ u_{i2}^{(0)}(t)$ — p-вимірний вектор, що містить решту компонент $u_i^{(0)}(t)$.

2. Припустимо, що

$$\lim_{t\to 0}\frac{\det J_p(t,0)}{t^p}\neq 0, \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\det J_q(t,0)}{t^q}\neq 0$$

Враховуючи достатню гладкість елементів $J_q(t,0)$, вважаємо $J_q(t,0)=t\widetilde{J}_q(t,0)$. Тоді згідно з умовою 2 $\det\widetilde{J}_q(0,0)\neq 0$. Характеристичні рівняння

$$\det(J_q(t,0)-\eta E_q)=0$$

і

$$\det\left(\widetilde{J}_q(t,0)-wE_q\right)=0, \quad \eta=tw, \tag{12}$$

на множині $(0;T]$ рівносильні.

Перепишемо рівняння (12) у вигляді

$$w^q-\gamma_1(t)w^{q-1}-\ldots-\gamma_{q-1}(t)w-\gamma_q(t)=0.$$

Тут $\gamma_q(t)=\det\widetilde{J}_q(t,0)$.

3. Нехай корені $\zeta_i,\ i=\overline{1,q}$, рівняння

$$\zeta^q-\gamma_1(0)\zeta^{q-1}-\ldots-\gamma_{q-1}(0)\zeta-\gamma_q(0)=0$$

задовольняють умови:

а) $\zeta_i\neq\zeta_j,\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,q}$;

б) $\operatorname{Re}\zeta_i<0,\ i=\overline{1,q}$.

Тоді для коренів рівняння (12) мають місце асимптотичні формули [32]

$$w_i(t)=\zeta_j+O\left(t^{\frac{1}{q}}\right), \quad t\to 0+, \quad i=\overline{1,q}.$$

У рівнянні (10) покладемо

$$u_{i1}^{(0)}(t)=T_q(t)p_{i1}^{(0)}(t),$$

де

$$T_q^{-1}(t)\widetilde{J}_q(t,0)T_q(t)=W_q(t)\equiv\operatorname{diag}\{w_1(t),w_2(t),\ldots,w_q(t)\}.$$

Маємо

$$\left(E_q - t\lambda_i^{(0)}(t)W_q(t)\right) p_{i1}^{(0)}(t) = 0.$$

Отже,

$$\lambda_i^{(0)}(t) = \frac{1}{tw_i(t)},$$

$$\left\{p_{i1}^{(0)}(t)\right\}_i = 1, \quad \left\{p_{i1}^{(0)}(t)\right\}_j = 0, \quad t \in \left[k_0\, \varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right], \quad t_2 \le t_1, \quad i \ne j, \quad i,j = \overline{1,q},$$

де $\left\{p_{i1}^{(0)}(t)\right\}_j$ — j-та компонента вектора $p_{i1}^{(0)}(t)$.

Як і раніше, вважатимемо, що $J_p(t,0) = t\widetilde{J}_p(t,0)$.

4. Припустимо, що корені $\zeta_i,\ i = \overline{q+1,n},$ рівняння

$$\det\left(\widetilde{J}_p(0,0) - \zeta E_p\right) = 0$$

задовольняють умови:

а) $\zeta_i \ne \zeta_j,\ i \ne j,\ i,j = \overline{q+1,n}$;

б) $\operatorname{Re}\zeta_i < 0,\ i = \overline{q+1,n}.$

Тоді для власних значень матриці $\widetilde{J}_p(t,0)$ мають місце асимптотичні формули

$$w_i(t) = \zeta_j + O\left(t^{\frac{1}{p}}\right), \quad t \to 0+, \quad i = \overline{q+1,n}.$$

Покладаючи у рівнянні (11)

$$u_{i2}^{(0)}(t) = T_p(t)p_{i2}^{(0)}(t),$$

де

$$T_p^{-1}(t)\widetilde{J}_p(t,0)T_p(t) = W_p(t) \equiv \operatorname{diag}\left\{w_{q+1}(t), w_{q+2}(t), \ldots, w_n(t)\right\},$$

дістаємо

$$\left(tW_p(t) - \lambda_i^{(0)}(t)E_p\right) p_{i2}^{(0)}(t) = 0,$$

звідки

$$\lambda_i^{(0)}(t) = tw_i(t),$$

$$\left\{p_{i2}^{(0)}(t)\right\}_i = 1, \quad \left\{p_{i2}^{(0)}(t)\right\}_j = 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right], \quad i \ne j, \quad i,j = \overline{q+1,n}.$$

Нехай

$$p_{i1}^{(0)}(t) = 0, \quad t \in \left[k_0\, \varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right], \quad i = \overline{q+1,n},$$

$$p_{i2}^{(0)}(t) = 0, \quad t \in \left[k_0\, \varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right], \quad i = \overline{1,q}.$$

Запишемо систему (9) при $k = 1$ таким чином:

$$\Big(E_q - \lambda_i^{(0)}(t) J_q(t,0)\Big)\, u_{i1}^{(1)}(t) = d_{i1}^{(1)}(t), \tag{13}$$

$$\Big(J_p(t,0) - \lambda_i^{(0)}(t) E_p\Big)\, u_{i2}^{(1)}(t) = d_{i2}^{(1)}(t), \tag{14}$$

де $u_{i1}^{(1)}(t),\ d_{i1}^{(1)}(t)$ — q-вимірні вектори, що містять q перших компонент векторів $u_i^{(1)}(t)$, $d_i^{(1)}(t)$ відповідно; $u_{i2}^{(1)}(t),\ d_{i2}^{(1)}(t)$ — p-вимірні вектори, що містять решту компонент векторів $u_i^{(1)}(t),\ d_i^{(1)}(t)$.

Покладаючи $u_{i1}^{(1)}(t) = T_q(t) p_{i1}^{(1)}(t)$ і $u_{i2}^{(1)}(t) = T_p(t) p_{i2}^{(1)}(t)$ у рівняннях (13), (14), одержуємо

$$\Big(E_q - t\lambda_i^{(0)}(t) W_q(t)\Big)\, p_{i1}^{(1)}(t) = h_{i1}^{(1)}(t),$$

$$\Big(tW_p(t) - \lambda_i^{(0)}(t) E_p\Big)\, p_{i2}^{(1)}(t) = h_{i2}^{(1)}(t),$$

де

$$h_{i1}^{(1)}(t) = T_q^{-1}(t) d_{i1}^{(1)}(t) \equiv tW_q(t) T_q^{-1}(t) T_q'(t) p_{i1}^{(0)} - T_q^{-1}(t) C_{11}(t) T_q(t) p_{i1}^{(0)} + \\ + T_q^{-1}(t) H_{11}(t) T_q(t) p_{i1}^{(0)} \lambda_i^{(0)}(t) + tW_q(t) p_{i1}^{(0)} \lambda_i^{(1)}(t),$$

$$h_{i2}^{(1)}(t) = T_p^{-1}(t) d_{i2}^{(1)}(t) \equiv T_p^{-1}(t) T_p'(t) p_{i2}^{(0)} - T_p^{-1}(t) C_{22}(t) T_p(t) p_{i2}^{(0)} + \\ + T_p^{-1}(t) H_{22}(t) T_p(t) p_{i2}^{(0)} \lambda_i^{(0)}(t) + p_{i2}^{(0)} \lambda_i^{(1)}(t),$$

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad H_1(t) = \operatorname{diag}\{H_{11}(t), H_{22}(t)\},$$

$C_{11}(t),\ H_{11}(t)$ — квадратні матриці порядку q.

Тоді

$$\lambda_i^{(1)}(t) = -\frac{\Big\{f_{i1}^{(1)}(t)\Big\}_i}{tw_i(t)}, \quad \Big\{p_{i1}^{(1)}(t)\Big\}_i = 0, \quad t \in \Big[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\Big],$$

$$\Big\{p_{i1}^{(1)}(t)\Big\}_j = \frac{\Big\{h_{i1}^{(1)}(t)\Big\}_j w_i(t)}{w_i(t) - w_j(t)}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, q},$$

$$p_{i2}^{(1)}(t) = \Big(tW_p(t) - \lambda_i^{(0)}(t) E_p\Big)^{-1} h_{i2}^{(1)}(t), \quad i = \overline{1, q},$$

де

$$f_{i1}^{(1)}(t) = tW_q(t) T_q^{-1}(t) T_q'(t) p_{i1}^{(0)} - \\ - T_q^{-1}(t) C_{11}(t) T_q(t) p_{i1}^{(0)} + T_q^{-1}(t) H_{11}(t) T_q(t) p_{i1}^{(0)} \lambda_i^{(0)}(t),$$

$$\lambda_i^{(1)}(t) = -\left\{f_{i2}^{(1)}(t)\right\}_i, \quad \left\{p_{i2}^{(1)}(t)\right\}_i = 0, \quad t \in \left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right],$$

$$\left\{p_{i2}^{(1)}(t)\right\}_j = \frac{\left\{h_{i2}^{(1)}(t)\right\}_j}{t(w_j(t) - w_i(t))}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{q+1, n},$$

$$p_{i1}^{(1)}(t) = \left(E_q - t\lambda_i^{(0)}(t)W_q(t)\right)^{-1} h_{i1}^{(1)}(t), \quad i = \overline{q+1, n},$$

$$f_{i2}^{(1)}(t) = T_p^{-1}(t)T_p'(t)p_{i2}^{(0)} - T_p^{-1}(t)C_{22}(t)T_p(t)p_{i2}^{(0)} + T_p^{-1}(t)H_{22}(t)T_p(t)p_{i2}^{(0)}\lambda_i^{(0)}(t).$$

Аналогічно знаходимо вектори $u_i^{(k)}(t),\ i = \overline{1, n},\ k \geq 2$, та функції $\lambda_i^{(k)}(t),\ i = \overline{1, n}$, $k \geq 2$.

За побудовою

$$u_i^{(k)}(t) = O\Big(t^{-k}\Big), \quad \lambda_i^{(k)}(t) = O\Big(t^{-k-1}\Big), \quad i = \overline{1, q},$$

$$u_i^{(k)}(t) = O\Big(t^{-2k+1}\Big), \quad \lambda_i^{(k)}(t) = O\Big(t^{-2k+2}\Big), \quad i = \overline{q+1, n},$$

$k \in N,\ t \in \left[k_0\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right]$.

Покажемо, що побудовані формальні розв'язки (6) системи (5) мають асимптотичний характер. Для цього позначимо

$$y_{mi}(t, \varepsilon) = u_{mi}(t, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{t} \lambda_{mi}(t, \varepsilon)\, dt\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{15}$$

де

$$u_{mi}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k u_i^{(k)}(t), \qquad \lambda_{mi}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \lambda_i^{(k)}(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

При підстановці вектор-функції (15) до системи (5) отримуємо нев'язку

$$f_i(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1} t^{-\sigma(m)}), \qquad \sigma(m) = \begin{cases} m+2, & i = \overline{1, q}, \\ 2m, & i = \overline{q+1, n}, \end{cases}$$

$t \in \left[k_0\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_2\right],\ \varepsilon \to 0+$.

У системі (5) покладемо

$$y_i(t, \varepsilon) = z_i(t, \varepsilon) + y_{mi}(t, \varepsilon),$$

де $z_i(t, \varepsilon)$ — нова невідома вектор-функція. Маємо

$$\varepsilon H(t, \varepsilon)\,\frac{dz_i}{dt} = C(t, \varepsilon)z_i + f_i(t, \varepsilon). \tag{16}$$

Оскільки

$$J_q^{-1}(t, \varepsilon) = \frac{1}{t}\,\widetilde{J}_q^{-1}(t, 0)(E_q + D(t, \varepsilon)),$$

де $D(t,\varepsilon)=O\big(\varepsilon t^{-1}\big),\ t\in\big[k_0\varepsilon^{\frac12};t_2\big],\ \varepsilon\to 0+,$ то система (16) рівносильна системі

$$\varepsilon\,\frac{dz_i}{dt}=(G(t,\varepsilon)+L(t,\varepsilon))z_i+g_i(t,\varepsilon), \tag{17}$$

де

$$G(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\dfrac1t\,\widetilde J_q^{-1}(0,0) & 0\\ 0 & t\widetilde J_p(0,0)\end{pmatrix},$$

$$L(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\dfrac1t\,\Big(\widetilde J_q^{-1}(t,0)-\widetilde J_q^{-1}(0,0)+\widetilde J_q^{-1}(t,0)D(t,\varepsilon)\Big) & 0\\ 0 & J_p(t,\varepsilon)-t\widetilde J_p(0,0)\end{pmatrix}-$$

$$-\,\varepsilon Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon),\quad g_i(t,\varepsilon)=H^{-1}(t,\varepsilon)f_i(t,\varepsilon).$$

Нехай

$$L(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}L_{11}(t,\varepsilon) & L_{12}(t,\varepsilon)\\ L_{21}(t,\varepsilon) & L_{22}(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$L_{11}(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця порядку q. За побудовою

$$L_{11}(t,\varepsilon)=O(1),\qquad L_{12}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon),$$

$$L_{21}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon),\qquad L_{22}(t,\varepsilon)=O\big(\varepsilon+t^2\big),\quad t\in\Big[k_0\,\varepsilon^{\frac12};t_2\Big],\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Еквівалентна до системи (17) система інтегральних рівнянь із початковою умовою

$$z_i\Big(k_0\varepsilon^{\frac12},\varepsilon\Big)=0$$

має вигляд

$$z_{i1}(t,\varepsilon)=\frac1\varepsilon\int\limits_{k_0\varepsilon^{\frac12}}^{t}\exp\left(\frac1\varepsilon\,\widetilde J_q^{-1}(0,0)\ln\frac ts\right)(L_{11}(s,\varepsilon)z_{i1}+L_{12}(s,\varepsilon)z_{i2}+g_{i1}(s,\varepsilon))\,ds, \tag{18}$$

$$z_{i2}(t,\varepsilon)=\frac1\varepsilon\int\limits_{k_0\varepsilon^{\frac12}}^{t}\exp\left(\frac1{2\varepsilon}\,\widetilde J_p(0,0)\left(t^2-s^2\right)\right)(L_{21}(s,\varepsilon)z_{i1}+L_{22}(s,\varepsilon)z_{i2}+g_{i2}(s,\varepsilon))\,ds, \tag{19}$$

де розмірності векторів $z_{i1}(t,\varepsilon)$ і $z_{i2}(t,\varepsilon)$ відповідно дорівнюють q та p.

Не обмежуючи загальності, вважаємо $\widetilde J_q^{-1}(0,0)$ і $\widetilde J_p(0,0)$ діагональними матрицями. Оскільки

$$e^{\frac{\operatorname{Re}\zeta_j}{2\varepsilon}\left(t^2-s^2\right)}\le e^{\frac{\operatorname{Re}\zeta_j}{2\varepsilon}(t-s)},\quad k_0\,\varepsilon^{\frac12}\le s\le t,\quad j=\overline{q+1,n},$$

і функція $\varphi(s)=e^{-\frac{\operatorname{Re}\zeta_j}{2\varepsilon}s}s^{-\sigma(m)+k},\ k\in R,$ для фіксованих значень $m,\ k$ на відрізку $\big[k_0\,\varepsilon^{\frac12};t_2\big]$ є зростаючою, то

$$\int\limits_{k_0\varepsilon^{\frac12}}^{t}e^{\frac{\operatorname{Re}\zeta_j}{2\varepsilon}\left(t^2-s^2\right)}s^{-\sigma(m)+k}ds\le\frac{2\varepsilon}{|\operatorname{Re}\zeta_j|}\,t^{-\sigma(m)+k}(1+\sigma(m)-k),\quad j=\overline{q+1,n}.$$

Тоді з оцінок для елементів матриці $L(t,\varepsilon)$ і компонент вектора $g_i(t,\varepsilon)$ випливає, що для достатньо малої сталої $t_3,\ t_3 \le t_2$, оператор, визначений за допомогою (18), (19), відображає множину

$$\overline{P} = \left\{ z_i(t,\varepsilon) \in C\Big(\Big[k_0\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_3\Big] \times [0;\varepsilon_0]\Big) : \|z_i(t,\varepsilon)\| \le c\,\varepsilon^m t^{-\sigma(m)+1} \right\},$$

у себе і є оператором стиску. Отже, система (18), (19) на множині $\overline{P}$ має єдиний розв'язок $z_i = z_i(t,\varepsilon)$.

За побудовою вектори $y_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}$, лінійно незалежні на відрізку $\big[k_0\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_3\big]$.

Теорема 1. *Нехай* $A(t,\varepsilon),\ B(t,\varepsilon) \in C^{m+1}(\overline{K})$, *де* $\overline{K} = \{(t,\varepsilon)\colon 0 \le t \le T,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$, *і виконуються умови* ***1 – 4***. *Тоді існує таке* $\varepsilon_1,\ \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, *що система (3) на відрізку* $\big[k_0\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}; t_0\big]$, $t_0 \le T$, *має* n *лінійно незалежних розв'язків* $x_i = x_i(t,\varepsilon)$, *для яких*

$$\|x_i(t,\varepsilon) - x_{mi}(t,\varepsilon)\| \le c\,\varepsilon^m t^{-\sigma(m)+1}, \quad t \in [k_0\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}, t_0],$$

де $x_{mi}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon) y_{mi}(t,\varepsilon)$.

3. Внутрішнє розвинення. Розв'язок системи (5) шукатимемо на відрізку $\big[0; k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\big]$, $k_0' > k_0$.

Зробимо заміну $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$. Тоді система (5) набуде вигляду

$$H(\varepsilon\tau,\varepsilon)\,\frac{dy}{d\tau} = C(\varepsilon\tau,\varepsilon) y, \tag{20}$$

де

$$H(\varepsilon\tau,\varepsilon) = H(0,0) + \varepsilon\left(\tau\,\frac{\partial H(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial H(0,0)}{\partial \varepsilon}\right) +$$

$$+ \sum_{k\ge 2} \varepsilon^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}\,\frac{\partial^k H(0,0)}{\partial t^{k-i}\partial\varepsilon^i}\,\tau^{k-i} \equiv \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k H_k(\tau),$$

$$C(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \Omega(0,0) + \sum_{k\ge 1} \varepsilon^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}\,\frac{\partial^k C(0,0)}{\partial t^{k-i}\partial\varepsilon^i}\,\tau^{k-i} \equiv \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k C_k(\tau).$$

Формальний матричний розв'язок системи (20) шукаємо у вигляді

$$Y(\tau,\varepsilon) = \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k Y_k(\tau). \tag{21}$$

Підставляючи (21) у систему (20), зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях параметра ε:

$$H(0,0)Y_0' = \Omega(0,0)Y_0,$$

$$H(0,0)Y_k' = \Omega(0,0)Y_k + D_k(\tau),$$

де

$$D_k(\tau) = \sum_{s=1}^{k}\big(C_s(\tau)Y_{k-s}(\tau) - H_s(\tau)Y_{k-s}'(\tau)\big).$$

Позначимо через

$$Y_k(\tau)=\begin{pmatrix}Y_{11}^{(k)}(\tau) & Y_{12}^{(k)}(\tau)\\ Y_{21}^{(k)}(\tau) & Y_{22}^{(k)}(\tau)\end{pmatrix},\qquad C_k(\tau)=\begin{pmatrix}C_{11}^{(k)}(\tau) & C_{12}^{(k)}(\tau)\\ C_{21}^{(k)}(\tau) & C_{22}^{(k)}(\tau)\end{pmatrix},$$

$$H_k(\tau)=\begin{pmatrix}H_{11}^{(k)}(\tau) & H_{12}^{(k)}(\tau)\\ H_{21}^{(k)}(\tau) & H_{22}^{(k)}(\tau)\end{pmatrix},\qquad D_k(\tau)=\begin{pmatrix}D_{11}^{(k)}(\tau) & D_{12}^{(k)}(\tau)\\ D_{21}^{(k)}(\tau) & D_{22}^{(k)}(\tau)\end{pmatrix},$$

де $Y_{11}^{(k)}(\tau),\ C_{11}^{(k)}(\tau),\ H_{11}^{(k)}(\tau)$ та $D_{11}^{(k)}(\tau)$ — квадратні матриці порядку $q.$ Тоді

$$Y_0(\tau)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ K_{21} & E_p\end{pmatrix},$$

прямокутна матриця K_{21} зі сталими елементами розмірів $p\times q$ визначається далі.

Враховуючи, що $C_{12}^{(1)}(\tau)\equiv 0,\ \tau\in\left[0;k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$, дістаємо

$$Y_1(\tau)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \left(\displaystyle\int_0^\tau C_{22}^{(1)}(\tau)\,d\tau+E_p\right)K_{21} & \displaystyle\int_0^\tau C_{22}^{(1)}(\tau)d\tau\end{pmatrix},$$

$$Y_k(\tau)=\begin{pmatrix}-D_{11}^{(k)}(\tau) & -D_{12}^{(k)}(\tau)\\ \displaystyle\int_0^\tau D_{21}^{(k)}(\tau)d\tau & \displaystyle\int_0^\tau D_{22}^{(k)}(\tau)d\tau\end{pmatrix},\quad k\geq 2.$$

За побудовою

$$Y_k(\tau)=\begin{pmatrix}O(1) & O(1)\\ O(\tau) & O(\tau)\end{pmatrix},\quad \tau\in[0;1],$$

$$Y_k(\tau)=\begin{pmatrix}O\big(\tau^{2(k-1)}\big) & O\big(\tau^{2(k-1)}\big)\\ O\big(\tau^{2k}\big) & O\big(\tau^{2k}\big)\end{pmatrix},\quad \tau\in\left[1;k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right],\quad k\geq 2.$$

Доведемо асимптотичний характер формального розв'язку (21) системи (20). Для цього в системі (20) покладемо

$$y_i(\tau,\varepsilon)=r_i(\tau,\varepsilon)+y_{mi}(\tau,\varepsilon),\quad y_{mi}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k y_{ki}(\tau),$$

де $y_{ki}(\tau),\ i=\overline{1,n},$ — стовпці матриці $Y_k(\tau),$ а $r_i(\tau,\varepsilon)$ — нова невідома вектор-функція. Маємо

$$H(\varepsilon\tau,\varepsilon)\,\frac{dr_i}{d\tau}=C(\varepsilon\tau,\varepsilon)r_i+f_i(\tau,\varepsilon), \tag{22}$$

де $f_i(\tau,\varepsilon)=C(\varepsilon\tau,\varepsilon)y_{mi}(\tau,\varepsilon)-H(\varepsilon\tau,\varepsilon)\,\dfrac{dy_{mi}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}$ і

$$f_i(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}O(\varepsilon^{m+1}), & \tau\in[0;1],\\ O(\varepsilon^{m+1}\tau^{2m+1}), & \tau\in\left[1;k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right],\quad \varepsilon\to 0+.\end{cases}$$

Нехай
$$\Psi_1 = \left(\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}, \qquad \Psi_2 = \left(\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t}\right)^{-1}.$$
Позначимо через ψ_{ij} власні значення матриці $\Psi_i,\ i = 1,2$.

5. Припустимо, що $\psi_{1j} \neq \psi_{1k},\ j \neq k,\ j,k \in \overline{1,q}$, причому $\operatorname{Re}\psi_{1j} < 0,\ j \in \overline{1,q}$. Зазначимо, що за побудовою $\psi_{2j} = \dfrac{1}{\zeta_j},\ j = \overline{1,q}$.

Тоді з умов ***3***, ***5*** випливає існування таких $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_1 < 1 < \tau_2$, що
$$\left(\tau\,\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} + G_1(\tau), \quad \tau \in [0;\tau_1],$$
$$\left(\tau\,\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t}\right)^{-1} + G_2(\tau), \quad \tau \in \left[\tau_2; k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right].$$
де $\|G_1(\tau)\| \leq k\tau,\ \tau \in [0;\tau_1],\ \|G_2(\tau)\| \leq \dfrac{k}{\tau^2},\ \tau \in \left[\tau_2; k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Нехай
$$\Psi_3(\tau) = \left(\tau\,\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}.$$

6. Припустимо, що $\psi_{3j}(\tau) \neq \psi_{3k}(\tau),\ \tau \in \left[\widetilde{\tau}_1;\widetilde{\tau}_2\right],\ \widetilde{\tau}_1 < \tau_1,\ \widetilde{\tau}_2 > \tau_2,\ j \neq k,\ j,k \in \overline{1,q}$, причому $\operatorname{Re}\psi_{3j}(\tau) < 0,\ \tau \in \left[\widetilde{\tau}_1;\widetilde{\tau}_2\right],\ j \in \overline{1,q}$, де $\psi_{3j}(\tau)$ — власні значення матриці $\Psi_3(\tau)$.

Отже, остаточно
$$\left(\tau\,\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} =$$
$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} + O(\tau), & \tau \in [0;\tau_1], \\ \left(\tau\,\dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}, & \tau \in [\widetilde{\tau}_1;\widetilde{\tau}_2], \\ \dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial t}\right)^{-1} + O\big(\tau^{-2}\big), & \tau \in \left[\tau_2; k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$
А тому
$$H^{-1}(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\tau\,\dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} + O(1) & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}.$$

Враховуючи неособливість матриці $H(\varepsilon\tau,\varepsilon)$, записуємо систему (22) у вигляді
$$\frac{dr_i}{d\tau} = \left(\Psi(\tau,\varepsilon) + L(\tau,\varepsilon)\right) r_i + g_i(\tau,\varepsilon), \tag{23}$$
де
$$\Psi(\tau,\varepsilon) = \Phi(\tau,\varepsilon)\Omega(0,0), \qquad \Phi(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\tau\,\dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \dfrac{\partial J_q(0,0)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix},$$

$$L(\tau,\varepsilon) = \left(H^{-1}(\varepsilon\tau,\varepsilon) - \Phi(\tau,\varepsilon)\right)\Omega(0,0) + H^{-1}(\varepsilon\tau,\varepsilon)\sum_{k\geq 1}\varepsilon^k C_k(\tau),$$

$$g_i(\tau,\varepsilon) = H^{-1}(\varepsilon\tau,\varepsilon) f_i(\tau,\varepsilon).$$

Нехай

$$L(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} L_{11}(\tau,\varepsilon) & L_{12}(\tau,\varepsilon) \\ L_{21}(\tau,\varepsilon) & L_{22}(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де $L_{11}(\tau,\varepsilon)$ — квадратна матриця порядку q. Тоді за побудовою

$$L_{1j}(\tau,\varepsilon) = O(1), \quad j = 1,2,$$

$$L_{2j}(\tau,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad j = 1,2, \quad \tau \in \left[0; k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right], \quad \varepsilon \to 0+.$$

Розглянемо систему (23) окремо на відрізках $[0;\tau_1]$, $\left[\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2\right]$ та $\left[\tau_2; k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$. Отже, нехай $\tau \in [0;\tau_1]$. Еквівалентна система інтегральних рівнянь до системи (23) з початковою умовою

$$r_i(0,\varepsilon) = 0$$

має вигляд

$$r_{i1}(\tau,\varepsilon) = \int_0^\tau \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Psi_1(\tau - s)\right) \times$$
$$\times \left(\left(\frac{1}{\varepsilon}G_1(s) + L_{11}(s,\varepsilon)\right) r_{i1} + L_{12}(s,\varepsilon) r_{i2} + g_{i1}(s,\varepsilon)\right) ds, \tag{24}$$

$$r_{i2}(\tau,\varepsilon) = \int_0^\tau (L_{21}(s,\varepsilon) r_{i1} + L_{22}(s,\varepsilon) r_{i2} + g_{i2}(s,\varepsilon)) ds, \tag{25}$$

де вектори $r_{i1}(\tau,\varepsilon)$ і $g_{i1}(\tau,\varepsilon)$ містять відповідно q перших компонент векторів $r_i(\tau,\varepsilon)$ і $g_i(\tau,\varepsilon)$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що Ψ_1 — діагональна матриця. Тоді для достатньо малих τ_1 оператор, визначений за допомогою (24), (25), відображає множину $\overline{P}_1$, $\overline{P}_1 = \{r_i(\tau,\varepsilon) \in C([0;\tau_1] \times [0;\varepsilon_0]) \colon \|r_i(\tau,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^m\}$, у себе і є оператором стиску. Таким чином, система (24), (25) на множині $\overline{P}_1$ має єдиний розв'язок $r_i = r_i(\tau,\varepsilon)$.

Припустимо, що $\tau \in \left[\widetilde{\tau}_1; \widetilde{\tau}_2\right]$. З умови ***6*** випливає існування такої неособливої достатньо гладкої матриці $V_q(\tau)$, що

$$V_q^{-1}(\tau)\left(\tau\frac{\partial J_q(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial J_q(0,0)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} V_q(\tau) = \Theta_q(\tau) \equiv \{\psi_{31}(\tau), \psi_{32}(\tau), \ldots, \psi_{3q}(\tau)\}.$$

Покладаючи у системі (23)

$$r_i(\tau,\varepsilon) = V(\tau) u_i(\tau,\varepsilon), \qquad V(\tau) = \begin{pmatrix} V_q(\tau) & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}, \tag{26}$$

дістаємо

$$\frac{du_i}{d\tau} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\,\Theta_q(\tau) & 0 \\ 0 & 0_p \end{pmatrix} + M(\tau,\varepsilon)\right) u_i + h_i(\tau,\varepsilon), \tag{27}$$

де

$$M(\tau,\varepsilon) = V^{-1}(\tau)L(\tau,\varepsilon)V(\tau) - V^{-1}(\tau)V'(\tau), \qquad h_i(\tau,\varepsilon) = V^{-1}(\tau)g_i(\tau,\varepsilon).$$

Позначимо через $\widetilde{u}_i(\varepsilon) = V^{-1}\big(\widetilde{\tau}_1\big)r_i\big(\widetilde{\tau}_1,\varepsilon\big)$, $r_i\big(\widetilde{\tau}_1,\varepsilon\big)$ визначається за формулами (24), (25). Тоді система інтегральних рівнянь, еквівалентна до системи (27) з початковою умовою

$$u_i\left(\widetilde{\tau}_1,\varepsilon\right) = \widetilde{u}_i(\varepsilon),$$

має вигляд

$$u_{i1}(\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\widetilde{\tau}_1}^{\tau}\Theta_q(v)dv\right)\widetilde{u}_{i1}(\varepsilon) + \int\limits_{\widetilde{\tau}_1}^{\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{\tau}\Theta_q(v)dv\right)\times$$
$$\times\left(M_{11}(s,\varepsilon)u_{i1} + M_{12}(s,\varepsilon)u_{i1} + h_{i1}(s,\varepsilon)\right)ds, \tag{28}$$

$$u_{i2}(\tau,\varepsilon) = \widetilde{u}_{i2}(\varepsilon) + \int\limits_{\widetilde{\tau}_1}^{\tau}\left(M_{21}(s,\varepsilon)u_{i1} + M_{22}(s,\varepsilon)u_{i2} + h_{i2}(s,\varepsilon)\right)ds. \tag{29}$$

Оператор, визначений за допомогою (28), (29), для достатньо великих c відображає множину

$$\overline{P}_2 = \left\{r_i(\tau,\varepsilon) \in C\left([\widetilde{\tau}_1,\widetilde{\tau}_2]\times[0;\varepsilon_0]\right) \colon \|r_i(\tau,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^m\right\}$$

у себе і є оператором стиску. А тому система (28), (29) на множині $\overline{P}_2$ має єдиний розв'язок $r_i = r_i(\tau,\varepsilon)$.

Таким чином, на відрізках $[0;\tau_1]$ та $\big[\widetilde{\tau}_1;\widetilde{\tau}_2\big]$ доведено існування та єдиність розв'язків відповідних початкових задач. Отже, на відрізку $\big[\widetilde{\tau}_1;\tau_1\big] = [0;\tau_1]\cap\big[\widetilde{\tau}_1;\widetilde{\tau}_2\big]$ зазначені розв'язки збігаються.

Нехай тепер $\tau \in \big[\tau_2; k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\big]$. Позначимо $\widetilde{z}_i(\varepsilon) = r_i(\tau_2,\varepsilon)$, де $r_i(\tau_2,\varepsilon)$ визначається за формулами (26), (28), (29). Тоді система інтегральних рівнянь, еквівалентна до системи (23) з початковою умовою

$$r_i(\tau_2,\varepsilon) = \widetilde{z}_i(\varepsilon),$$

має вигляд

$$r_{i1}(\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\,\Psi_2\ln\frac{\tau}{\tau_2}\right)\widetilde{z}_{i1}(\varepsilon) + \int\limits_{\tau_2}^{\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\,\Psi_2\ln\frac{\tau}{s}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\,G_2(s) + L_{11}(s,\varepsilon)\right)r_{i1} + L_{12}(s,\varepsilon)r_{i2} + g_{i1}(s,\varepsilon)\right)ds, \tag{30}$$

$$r_{i2}(\tau,\varepsilon)=\widetilde{z}_{i2}(\varepsilon)+\int\limits_{\tau_2}^{\tau}(L_{21}(s,\varepsilon)r_{i1}+L_{22}(s,\varepsilon)r_{i2}+g_{i2}(s,\varepsilon))ds. \qquad (31)$$

Як і раніше вважатимемо, що матриця Ψ_2 діагональна. Тоді для достатньо великих τ_2 оператор, визначений за допомогою (30), (31), відображає множину

$$\overline{P}_3=\left\{r_i(\tau,\varepsilon)\in C\left(\left[\tau_2;k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]\times[0;\varepsilon_0]\right)\colon \|r_i(\tau,\varepsilon)\|\le c\varepsilon^m\tau^{2m}\right\},$$

у себе і є оператором стиску. Таким чином, система (30), (31) на множині $\overline{P}_3$ має єдиний розв'язок $r_i=r_i(\tau,\varepsilon)$.

За побудовою розв'язки початкових задач, визначені за формулами (28), (29) та (30), (31) на відрізку $[\tau_2;\widetilde{\tau}_2]=[\widetilde{\tau}_1;\widetilde{\tau}_2]\cap\left[\tau_2;k_0'\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$ збігаються.

7. Припустимо, що $\det(C_{12}^{(2)}(0)K_{21})\ne 0$. Тоді для будь-якого фіксованого m, $m\ge 2$, вектор-функції $y_i(\tau,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, лінійно незалежні на відрізку $\left[0;k_0'\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$. Справді, за побудовою

$$\det\left(Y_0(0)+\varepsilon Y_1(0)+\varepsilon^2Y_2(0)+\ldots+\varepsilon^mY_m(0)\right)=\varepsilon^{3q}\det\left(C_{12}^{(2)}(0)K_{21}+O(\varepsilon)\right). \qquad (32)$$

Нехай

$$Y_m(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^kY_k(\tau),$$

а $R(\tau,\varepsilon)$ — матриця зі стовпцями $r_i(\tau,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$. Оскільки стовпці матриці $Y_m(\tau,\varepsilon)+$ $+R(\tau,\varepsilon)$ є розв'язками системи (20) і згідно з (32)

$$\det(Y_m(0,\varepsilon)+R(0,\varepsilon))\ne 0,$$

то $Y_m(\tau,\varepsilon)+R(\tau,\varepsilon)$ — фундаментальна матриця системи (20).

Теорема 2. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^{m+1}(\overline{K})$ і виконуються умови **1 – 3, 5 – 7**. Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (3) на відрізку $\left[0;k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right]$, $k_0'>k_0$, для всіх $m\ge 2$ має n лінійно незалежних розв'язків $x_i=x_i(t,\varepsilon)$, причому*

$$\left\|x_i(t,\varepsilon)-x_{mi}(t,\varepsilon)\right\|\le c\varepsilon^{-m}t^{2m},\quad t\in\left[0;k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right],$$

де $x_{mi}(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)y_{mi}(\tau,\varepsilon)$, $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$.

4. Зрощування асимптотичних розвинень. Позначимо через $X_1(t,\varepsilon)$ та $X_2(t,\varepsilon)$ фундаментальні матриці системи (3) відповідно на відрізках $\left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}};t_0\right]$ та $\left[0;k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right]$. Тобто

$$X_1(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)\left(U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{t}\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)+Z(t,\varepsilon)\right),$$

$$X_2(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)(Y_m(\tau,\varepsilon)+R(\tau,\varepsilon)),$$

де матриці $U_m(t,\varepsilon),\ Z(t,\varepsilon),\ Y_m(\tau,\varepsilon)$ та $R(\tau,\varepsilon)$ складаються відповідно зі стовпців $u_{mi}(t,\varepsilon),$ $z_i(t,\varepsilon),\ y_{mi}(\tau,\varepsilon)$ та $r_i(\tau,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},\ \Lambda_m(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{\lambda_{m1}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_{mn}(t,\varepsilon)\}.$

Оскільки, за побудовою, $k_0'>k_0,$ то на відрізку $\left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}};k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right]$ побудовано дві фундаментальні матриці лінійної системи (3). А тому існує така стала матриця $S(\varepsilon),$ що

$$X_2(t,\varepsilon)=X_1(t,\varepsilon)S(\varepsilon),\quad t\in\left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}};k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right].$$

Для її визначення достатньо взяти деяке $t'\in\left[k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}};k_0'\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right]$ і покласти

$$S(\varepsilon)=X_1^{-1}(t',\varepsilon)X_2(t',\varepsilon).$$

Нехай, наприклад, $t'=k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Тоді

$$S(\varepsilon)=U_m^{-1}\left(k_0\varepsilon^{\frac{1}{2}},\varepsilon\right)\left(Y_m\left(k_0\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\varepsilon\right)+R\left(k_0\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\varepsilon\right)\right).$$

Зазначимо, що $S(\varepsilon)=O(1),\ \varepsilon\to 0+.$

Література

1. R. Gans, *Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium*, Ann. Phys., **352**, № 14, 709 – 736 (1915).
2. R. E. Langer, *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point*, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 461 – 490 (1949).
3. R. E. Langer, *Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type*, Trans. Amer. Math. Soc., **92**, № 3, 371 – 410 (1959).
4. W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Intersci. Publ. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney (1965).
5. W. Wasow, *Linear turning point theory*, Springer, New York (1985).
6. A. Leung, *Doubly asymptotic series for nth order differential equations in unbounded domains*, SIAM J. Math. Anal., **5**, № 2, 187 – 201 (1974).
7. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, Москва (1989).
8. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, L. V. Kalachev, *The boundary function method for singular perturbation problems*, SIAM Stud. Appl. Math., **14** (1995).
9. Y. Sibuya, *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point*, Funkcial. Ekvac., **4**, 29 – 56 (1962).
10. R. J. Hanson, R. L. Russell, *Classification and reduction of second order systems at a turning point*, J. Math. Phys., **46**, № 1-4, 74 – 92 (1967).
11. R. J. Hanson, *Simplification of second order systems of ordinary differential equations with a turning point*, SIAM J. Appl. Math., **16**, № 5, 1059 – 1080 (1968).
12. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
13. S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, **4**, 4, 517 – 521 (1983).
14. S. L. Campbell, *A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations*, SIAM J. Math. Anal., **18**, № 4, 1101 – 1115 (1987).
15. Yu. Boyarintsev, *Methods of solving singular systems of ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (1992).
16. E. Griepentrog, R. März, *Basic properties of some differential-algebraic equations*, Z. Anal. Anwendungen, **8**, № 1, 25 – 41 (1989).
17. R. März, *Index-2 differential-algebraic equations*, Results Math., **15**, № 1, 149 – 171 (1989).

18. R. Riaza, R. März, *Linear index-1 DAEs: regular and singular problems*, Acta Appl. Math., **84**, № 1, 29 – 53 (2004).

19. В. П. Яковець, *Деякі властивості вироджених лінійних систем*, Укр. мат. журн., **49**, № 9, 1278 – 1296 (1997).

20. П. Ф. Самусенко, *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями*, Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Київ (2011).

21. А. А. Бойчук, Л. М. Шегда, *Бифуркация решений вырожденных нетеровых краевых задач*, Дифференц. уравнения, **47**, № 4, 459 – 467 (2011).

22. М. Віра, *Про побудову асимптотики розв'язку багатоточкової крайової задачі для лінійної виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **18**, № 2, 164 – 175 (2015).

23. В. П. Яковець, О. В. Тарасенко, *Про керовність вироджених лінійних процесів*, Допов. НАН України, **7**, 29 – 33 (2009).

24. R. Lamour, *Floquet-theory for differential algebraic equations (DAE)*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., **78**, № S3, 989 – 990 (1998).

25. R. Lamour, R. März, R. Winkler, *How Floquet theory applies to index 1 differential algebraic equations*, J. Math. Anal. Appl., **217**, № 2, 372 – 394 (1998).

26. R. Lamour, R. März, R. Winkler, *Stability of periodic solutions of index-2 differential algebraic systems*, J. Math. Anal. Appl., **279**, № 2, 475 – 494 (2003).

27. В. П. Яковець, А. М. Акименко, *Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем з кратним елементарним дільником*, Укр. мат. журн., **54**, № 10, 1403 – 1415 (2002).

28. С. П. Пафик, В. П. Яковець, *Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків*, Укр. мат. журн., **65**, № 2, 296 – 305 (2013).

29. А. М. Самойленко, П. Ф. Самусенко, *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь з точками повороту. I*, Укр. мат. журн., **72**, № 12, 1669 – 1681 (2020).

30. А. М. Самойленко, П. Ф. Самусенко, *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь з точками повороту. II*, Укр. мат. журн., **73**, № 6, 849 – 864 (2021).

31. П. Ф. Самусенко, *До питання про канонічні форми регулярної в'язки матриць*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 266 – 273 (2020).

32. A. Ostrowski, *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*, Pure Appl. Math., Vol. 9, Acad. Press, New York-London (1973).

Одержано 02.11.21