

КОЛИВАННЯ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ, СПРИЧИНЕНІ ЇЇ ОБЕРТАННЯМ, РУХОМ НАВКОЛО СОНЦЯ ТА СКІНЧЕННОЮ ШВИДКІСТЮ ГРАВІТАЦІЇ

В. Ю. Слюсарчук

*Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

It is shown that the Earth surface daily oscillates not only due to the rotation around its axis and the Moon's motion around it but also due to the rotation around its axis, a finite speed of gravity, and its motion around the Sun.

Показано, що поверхня Землі здійснює добові коливання не тільки завдяки її обертанню навколо своєї осі та руху навколо неї Місяця, а й завдяки її обертанню навколо своєї осі, скінченній швидкості гравітації та руху її навколо Сонця.

1. Вступ. Форма Землі формується під впливом внутрішніх і зовнішніх сил. Основними є сила внутрішнього тяжіння і відцентрова сила. За даними геофізики Земля поводить себе як пластичне тіло. Якби вона була нерухомим і однорідним за щільністю тілом, то під дією лише сил внутрішнього тяжіння вона, як фігура рівноваги, мала б форму кулі. Оскільки Земля обертається навколо своєї осі, то внаслідок сумісної дії сил гравітації та відцентрових сил, що виникають при обертанні планети, у випадку рівномірного розподілу мас усередині Землі вона була б тілом обертання і сплюснутою біля полюсів.

Насправді внутрішня будова Землі за щільністю неоднорідна і земна кора (зовнішній шар землі завтовшки в середньому 40 км) складається з неоднорідних за щільністю ділянок. Внаслідок такого нерівномірного розподілу мас у земній корі змінюються напрями сил притягання, а отже, сил тяжіння. Як результат поверхня Землі набуває складної і неправильної в геометричному відношенні форми.

Форма поверхні Землі також залежить від сил тяжіння Сонця, Місяця, планет Сонячної системи тощо, що змінюються з часом.

Стан земної кори також суттєво залежить від скінченності швидкості c_g гравітації, що не враховувалася при вивченні коливних процесів земної кулі.

Мета статті — показати, що завдяки запізненню гравітаційного поля (на підставі скінченної швидкості гравітації), руху Землі навколо Сонця та її обертанню навколо своєї осі поверхня Землі здійснює добові коливання.

Такі коливання важко побачити, якщо використовувати класичну механіку, оскільки завдяки ним добові коливання поверхні Землі та земної кори, якщо не враховувати обертання Землі навколо своєї осі і дії на неї Місяця, неможливі.

Навіть у випадку відсутності Місяця скінченна швидкість c_g гравітації, рух Землі навколо Сонця та обертання Землі навколо своєї осі приводять до добових коливань земної поверхні.

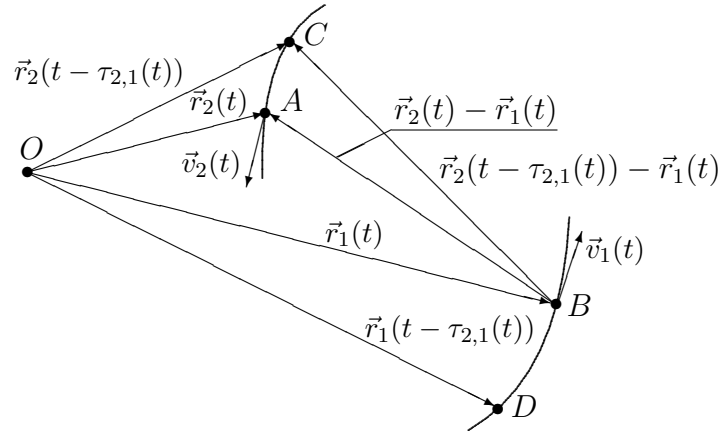


Рис. 1. Проходження точок M_1 і M_2 через точки D , B і C , A в моменти часу $t - \tau_{2,1}(t)$ і t .

2. Принцип запізнювання гравітаційного поля. Теорія відносності Ейнштейна постулює, що швидкість гравітації $c_g = c$, де c — швидкість світла [1, 2]. Ця властивість гравітації узгоджується з дослідженнями оцінки швидкості передачі впливу гравітаційного поля на результати вимірювань [3] і вимірюваннями швидкості гравітації, пов'язаними з фіксацією гравітаційних хвиль від далеких зіркових джерел одночасно зі світловим сигналом [4]. Використання цієї властивості гравітації дає змогу виявити, зокрема, добові коливання поверхні Землі.

Пояснимо вплив запізнювання гравітаційного поля на прикладі взаємодії двох точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно. Рух точок будемо розглядати в прямокутній системі координат із початком координат у точці O . Систему координат вважатимемо інерціальною. Положення точок M_1 і M_2 визначають їхні радіус-вектори $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$, з координатами $x_i(t)$, $y_i(t)$ і $z_i(t)$ в момент часу t відповідно.

Якби швидкість гравітації була нескінченною, то на підставі закону всесвітнього тяжіння в момент часу t точка M_2 притягувала б точку M_1 з силою

$$\vec{F}_{2,1,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)), \quad (1)$$

де G — гравітаційна стала і $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ — евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Однак, завдяки скінченній швидкості гравітації точка M_2 притягує точку M_1 з іншою силою

$$\vec{F}_{2,1,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)), \quad (2)$$

де запізнення гравітації $\tau_{2,1}(t)$ в (2) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{2,1}(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|. \quad (3)$$

Справді, нехай точки M_2 і M_1 рухаються по відповідним траєкторіям, частини яких зображені на рис. 1, зі швидкостями $\vec{v}_2(t) = d\vec{r}_2(t)/dt$ і $\vec{v}_1(t) = d\vec{r}_1(t)/dt$ і в момент часу

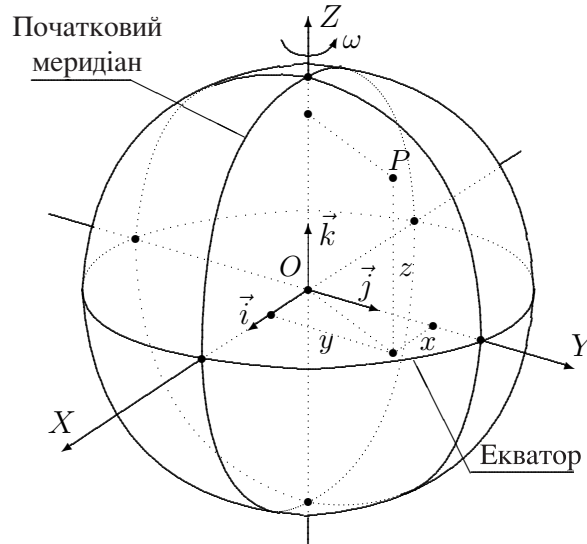


Рис. 2. Система прямокутних просторових координат.

$t - \tau_{2,1}(t)$, де $\tau_{2,1}(t)$ задовольняє (3), знаходяться в точках C і D відповідно. За проміжок часу $[t - \tau_{2,1}(t), t]$ точка M_2 переміститься з точки C в точку A , а точка M_1 — з точки D в точку B . Цього проміжку часу достатньо, щоб гравітаційне поле зі швидкістю c поширилося з точки C в точку B . Отже, в момент часу t на точку B діє не сила (1), а сила (2).

Принцип запізнювання гравітаційного поля полягає в тому, що в момент часу t точка M_1 (точка B) притягується не до точки M_2 (точки A), а до точки C , що збігається з M_2 в момент часу $t - \tau_{2,1}(t)$, де $\tau_{2,1}(t)$ задовольняє (3). Сила притягування точки M_1 визначається формулою (2).

Зазначимо, що

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \vec{F}_{2,1,c}(t) = \vec{F}_{2,1,\infty}(t)$$

і закон притягування точки M_1 точкою M_2 , що подається співвідношеннями (2) і (3), є узагальненням закону *всесвітнього тяжіння*.

3. Зображення сил тяжіння Землі. З'ясуємо сили тяжіння Землі з урахуванням її обертання навколо осі, руху навколо Сонця та принципу запізнювання гравітаційного поля.

3.1. Геоцентрична система прямокутних просторових координат, координати швидкості руху центра Землі та зміна цього вектора протягом зоряної доби. Будемо використовувати геоцентричну систему прямокутних просторових координат. Для такої системи початок координат розміщено в центрі мас Землі, вісь OX проходить через точку перетину Гринвіцького меридіана й екватора, вісь OY доповнює прийнятну систему координат до правої і знаходиться в площині екватора, утворюючи кут 90° з віссю OX , а вісь OZ спрямована вздовж осі обертання Землі до Північного полюса (рис. 2).

На цьому рисунку $P = P(x, y, z)$ — довільна точка поверхні Землі і x, y, z — координати цієї точки.

Нехай $\vec{v}(t)$ — швидкість руху центра мас Землі навколо Сонця в момент часу t . Скалярні добутки $(\vec{v}(t), \vec{i})$, $(\vec{v}(t), \vec{j})$ і $(\vec{v}(t), \vec{k})$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — вектори ортонормованого базису, є

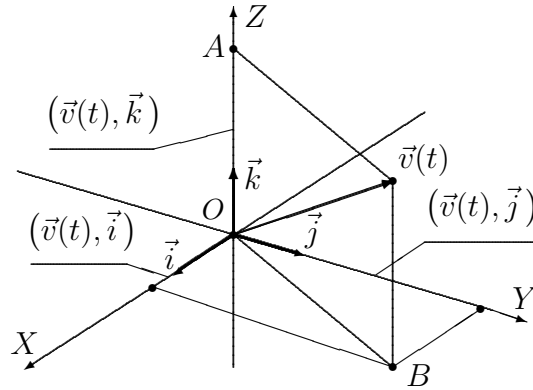


Рис. 3. Координати швидкості руху центра Землі.

координатами швидкості $\vec{v}(t)$ відносно розглянутої на рис. 2 системи координат. Тому

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}(t), \vec{i})\vec{i} + (\vec{v}(t), \vec{j})\vec{j} + (\vec{v}(t), \vec{k})\vec{k} \quad (4)$$

(див. рис. 3). Ці координати неявно враховують як обертання Землі навколо своєї осі, нахил осі обертання Землі щодо площини орбіти, так і те, що обертання Землі навколо своєї осі при спостереженні з північного полюса екліптики відбувається проти годинникової стрілки, а рух Землі навколо Сонця також відбувається проти годинникової стрілки.

Нагадаємо, що повний оберт Земля (в інерціальній системі відліку) здійснює за зоряну добу ($T_1 = 86164,090530833 \text{ с} \approx 23 \text{ години } 56 \text{ хвилин } 4 \text{ секунди}$), Земля здійснює повний оберт по своїй орбіті навколо Сонця за зоряний рік ($T_2 \approx 31556928 \text{ с} = 365 \text{ діб } 5 \text{ годин } 48 \text{ хвилин } 48 \text{ секунд}$) і кут нахилу осі обертання Землі ζ_0 щодо площини орбіти наближено дорівнює $1,1618074568$ радіан ($66^\circ 34'$).

З'ясуємо, як змінюється вектор $\vec{v}(t)$ відносно розглянутої системи координат залежно від часу. Будемо вважати, що Земля рухається навколо Сонця по еліптичній орбіті, хоча насправді завдяки впливу планет Сонячної системи на Землю, неоднорідного розподілу маси в Сонячній системі та інших причин траєкторія руху Землі навколо Сонця відрізняється від еліптичної. Однак відхилення траєкторії руху Землі від еліптичної траєкторії в порівнянні з розмірами Сонячної системи за невеликі проміжки часу є несуттєвим. Тому в подальшому будемо використовувати наближені значення параметрів орбіти Землі. Нагадаємо, що при знаходженні Землі в перигелії — найближчій до Сонця точці орбіти, відстань між Землею та Сонцем

$$d_{\min} \approx 147,09829 \cdot 10^9 \text{ м}, \quad (5)$$

а при знаходженні Землі в афелії — найвіддаленішій до Сонця точці орбіти, відповідна відстань

$$d_{\max} \approx 152,098238 \cdot 10^9 \text{ м}. \quad (6)$$

Ці відстані можна знайти достатньо точно, за допомогою, наприклад, методів космічної радіолокації. Тоді велика піввісь орбіти Землі

$$a = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2} \approx 149,598264 \cdot 10^9 \text{ м}, \quad (7)$$

відстань від Сонця до центра орбіти Землі

$$c = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2} \approx 2,499974 \cdot 10^9 \text{ м} \quad (8)$$

і мала піввісь орбіти Землі

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx 149,577373696 \cdot 10^9 \text{ м.} \quad (9)$$

Отже, за зоряний рік площа $S_{з.р.}$, що описується радіус-вектором Землі, проведеним із Сонця, збігається з площею еліпса і дорівнює

$$S_{з.р.} = \pi ab,$$

а за зоряну добу площа $S_{з.д.}$, що описується цим радіус-вектором (на підставі другого закону Кеплера [5]), дорівнює

$$S_{з.д.} = \frac{T_1}{T_2} S_{з.р.}$$

Нехай v_{\max} і v_{\min} — швидкості руху Землі при знаходженні її в перигелії і афелії відповідно. На підставі другого закону Кеплера

$$d_{\max} v_{\min} T_1 = d_{\min} v_{\max} T_1 \approx 2S_{з.д.}$$

Тому

$$v_{\min} \approx \frac{2\pi ab}{\hat{d}_{\max} T_2} \approx 29292,3 \text{ м/с} \quad (10)$$

і

$$v_{\max} \approx \frac{2\pi ab}{\hat{d}_{\min} T_2} \approx 30287,9 \text{ м/с.} \quad (11)$$

Оскільки

$$v_{\min} \leq |\vec{v}(t)| \leq v_{\max}$$

для всіх моментів часу t і

$$v_{\max} - v_{\min} \approx 995,6 \text{ м/с} \ll v_{\min},$$

то протягом зоряної доби, а також протягом зоряного року величина $|\vec{v}(t)|$ в порівнянні з v_{\min} і v_{\max} змінюється несуттєво.

Суттєво змінюється напрямок швидкості $\vec{v}(t)$ відносно системи прямокутних просторових координат, що використовується, оскільки Земля разом із розглянутою системою координат обертається навколо своєї осі з додатною кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{2\pi}{T_1} \approx 7,2921158553 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Оцінимо зміну напрямку вектора $\vec{v}(t)$ протягом однієї зоряної доби, використовуючи прямокутну систему координат, пов'язану з площиною земної орбіти.

Розглянемо рис. 4, на якому зображено еліпс (еліптичну орбіту Землі) з півосями a і b , фокуси F_1 і F_2 цього еліпса та кут ϕ між вектором швидкості руху Землі $\vec{v}(t)$ і вектором \vec{EF}_1 , протилежним до радіус-вектора Землі, проведеним із центра Сонця (точки F_1), а також прямокутну систему координат x', y' з початком координат у центрі еліпса O' (осі еліпса розміщені на координатних осях, на яких також розміщені вектори \vec{i} і \vec{j} ортонормованого базису).

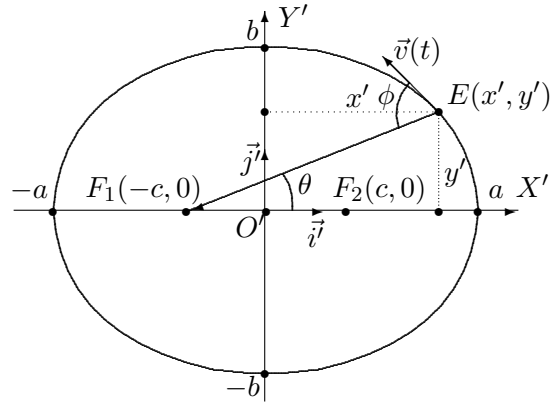


Рис. 4. Траєкторія руху Землі навколо Сонця.

Спочатку оцінимо кут ϕ . Використаємо параметричні рівняння еліпса

$$\begin{cases} x' = a \cos \theta, \\ y' = b \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Оскільки вектори

$$\vec{l} = -a \sin \theta \vec{i}' + b \cos \theta \vec{j}'$$

і $\vec{v}(t)$ колінеарні і мають однаковий напрямок, то ϕ можна знайти за допомогою формули

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{l} \times \vec{EF}_1|}{|\vec{l}| \cdot |\vec{EF}_1|} \quad (12)$$

(див. [6]), де $\vec{l} \times \vec{EF}_1$ — векторний добуток векторів \vec{l} і \vec{EF}_1 . Враховуючи, що

$$\vec{EF}_1 = -(c + a \cos \theta) \vec{i}' - b \sin \theta \vec{j}',$$

$$\begin{aligned} |\vec{EF}_1| &= \sqrt{(c + a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2} = \\ &= \sqrt{c^2 + 2ac \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \sqrt{b^2 + c^2 + 2ac \cos \theta + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2ac \cos \theta + c^2 \cos^2 \theta} = |a + c \cos \theta|, \end{aligned}$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta} = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \theta},$$

$$|\vec{l} \times \vec{EF}_1| = |(-a \sin \theta)(-b \sin \theta) - b \cos \theta(-c - a \cos \theta)| =$$

$$= |ab + bc \cos \theta| = b |a + c \cos \theta|,$$

а також (12), отримаємо

$$\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}}. \quad (13)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{b}{a} \leq \sin \phi \leq 1. \quad (14)$$

Оскільки $\sin \phi = \cos(\pi/2 - \phi)$, то завдяки (14)

$$\frac{b}{a} - 1 \leq -1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \leq 0.$$

І тому

$$\frac{b}{a} - 1 \leq -2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \leq 0.$$

Отже,

$$0 \leq \sin\left|\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{a}\right)}.$$

Таким чином,

$$0 \leq \left|\frac{\pi}{2} - \phi\right| \leq 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{a}\right)}.$$

Враховуючи, що завдяки (7) і (9)

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{a}\right)} \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{149,577373696 \cdot 10^9}{149,598264 \cdot 10^9}\right)} \approx 8,355916 \cdot 10^{-3}$$

і

$$2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{a}\right)} \approx 1,671202 \cdot 10^{-2},$$

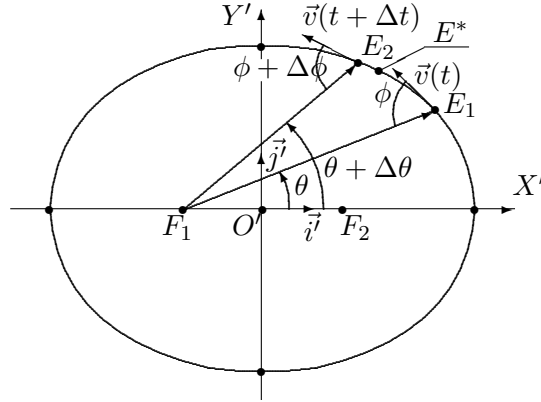
отримуємо

$$0 \leq \left|\frac{\pi}{2} - \phi\right| \leq 1,671202 \cdot 10^{-2}.$$

Отже, залежний від часу t кут ϕ відхиляється від $\frac{\pi}{2}$ не більше, ніж на $1,671202 \cdot 10^{-2}$ радіан (менше, ніж на 1°), тобто кут ϕ мало відхиляється від прямого кута, що й слід було чекати, оскільки ексцентриситет ε еліпса, що розглядається, є достатньо малим ($\varepsilon = \frac{c}{a} \approx 1,671125 \cdot 10^{-2}$).

Неважко перевірити, використовуючи (13), що для швидкості зміни кута ϕ щодо кута θ (див. рис. 4) справджується співвідношення

$$\frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{bc \cos \theta}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}.$$

Рис. 5. Зміна напрямку швидкості $\vec{v}(t)$ руху центра Землі.

Тому функція $\phi = \phi(\theta)$ є строго зростаючою і строго спадною на $[\pi/2, 3\pi/2)$ і $[0, 2\pi) \setminus [\pi/2, 3\pi/2)$ відповідно. Очевидно, що

$$0 \leq \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| \leq \frac{c}{b} \quad (15)$$

для всіх $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$\min_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| = 0$$

і

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| = \frac{c}{b}. \quad (16)$$

Отже, завдяки (8), (9) і (16)

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| \approx 1,671358 \cdot 10^{-2}. \quad (17)$$

Оцінимо зміну кута ϕ за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$ з достатньо малим $\Delta t > 0$. Розглянемо радіус-вектори $\vec{r}(t) = \overrightarrow{F_1 E_1}$ і $\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{F_1 E_2}$ та сектор, що відповідає цим радіус-векторам та дузі $E_1 E_2$ (див. рис. 5). Приросту Δt відповідає приріст $\Delta\theta > 0$ кута θ , причому $\Delta\theta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Площа розглянутого сектора наближено дорівнює

$$\frac{1}{2} |\vec{r}(t)| \cdot |\vec{r}(t + \Delta t)| \sin \Delta\theta \approx \frac{1}{2} |\vec{r}(t)|^2 \Delta\theta$$

(тут ураховано те, що $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sin \Delta\theta / \Delta\theta = 1$). Завдяки другому закону Кеплера

$$\frac{1}{2} |\vec{r}(t)|^2 \Delta\theta \approx \frac{1}{2} d_{\min} v_{\max} \Delta t = \frac{1}{2} d_{\max} v_{\min} \Delta t.$$

Відносна похибка у цьому співвідношенні прямує до 0 при $\Delta t \rightarrow 0$. Тому

$$|\vec{r}(t)|^2 \frac{d\theta}{dt} = d_{\min} v_{\max} = d_{\max} v_{\min}$$

і, отже,

$$\frac{v_{\min}}{d_{\max}} \leq \frac{d\theta}{dt} \leq \frac{v_{\max}}{d_{\min}}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{v_{\min}}{d_{\max}} \Delta t \leq \Delta\theta \leq \frac{v_{\max}}{d_{\min}} \Delta t. \quad (18)$$

Якщо далі врахувати (15), то отримуємо, що для приросту кута ϕ на проміжку часу $[t, t + \Delta t]$ виконується оцінка

$$|\Delta\phi| \leq \frac{c}{b} \frac{v_{\max}}{d_{\min}} \Delta t. \quad (19)$$

Позначимо через $\chi = \chi(t)$ кут між векторами $\vec{v}(t)$ та \vec{i} . Очевидно (див. рис. 5), що

$$\chi = \theta + \phi.$$

Завдяки (18) і (19) за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$ вектор $\vec{v}(t)$ змінює напрямок на кут, не більший

$$\Delta\theta + |\Delta\phi| \leq \left(1 + \frac{c}{b}\right) \frac{v_{\max}}{d_{\min}} \Delta t$$

і не менший

$$\Delta\theta - |\Delta\phi| \geq \left(\frac{v_{\min}}{d_{\max}} - \frac{c}{b} \frac{v_{\max}}{d_{\min}}\right) \Delta t.$$

Отже, протягом зоряної доби вектор $\vec{v}(t)$ змінює напрямок на кут $\chi(t + T_1) - \chi(t)$, для якого

$$\left(\frac{v_{\min}}{d_{\max}} - \frac{c}{b} \frac{v_{\max}}{d_{\min}}\right) T_1 \leq \chi(t + T_1) - \chi(t) \leq \left(1 + \frac{c}{b}\right) \frac{v_{\max}}{d_{\min}} T_1.$$

Зазначимо, що завдяки (5), (6), (8)–(11), (16) і (17)

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_{\min}}{d_{\max}} - \frac{c}{b} \frac{v_{\max}}{d_{\min}}\right) T_1 &\approx \frac{29992,3}{152,098238 \cdot 10^9} \cdot 86164,090530833 - \\ &- 1,671358 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{30287,9}{147,09829 \cdot 10^9} \cdot 86164,090530833 \approx 0,0166942 \end{aligned}$$

і

$$\left(1 + \frac{c}{b}\right) \frac{v_{\max}}{d_{\min}} T_1 \approx 1,01671358 \cdot \frac{30287,9}{147,09829 \cdot 10^9} \cdot 86164,090530833 \approx 0,01803792.$$

Отже, кут $\chi(t)$ зростає і протягом зоряної доби змінюється на величину $\chi(t + T_1) - \chi(t)$, що не менша $\chi_{\min} = 0,0166942$ радіан (близько $0,9565072^\circ$) і не більша $\chi_{\max} = 0,01803792$ радіан (близько $1,033496^\circ$).

Далі розглянемо кут $\zeta(t)$ між вектором швидкості $\vec{v}(t)$ та вектором \vec{k} .

Нагадаємо, що напрямком вектора \vec{k} збігається з напрямком осі обертання Землі і ця вісь нахилена до площини земної орбіти (площини екліптики) під кутом $\zeta_0 = 1,1618074568$ радіан ($66^\circ 34'$).

Очевидно, що

$$\sin \zeta(t) = \frac{|\vec{v}(t) \times \vec{k}|}{|\vec{v}(t)|}.$$

Позначимо через t_1, t_2, t_3 і t_4 ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4$) послідовні моменти весняного рівнодення, літнього сонцестояння, осіннього рівнодення і зимового сонцестояння відповідно.

Очевидно, що

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}, \quad t_4 = t_3 + \frac{t_3 - t_1}{2},$$

$$\zeta(t_1) = \zeta(t_3) = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta(t_2) = \zeta_0, \quad \zeta(t_4) = \pi - \zeta_0.$$

Також очевидно, що на кожному проміжку часу $[t_2, t_4]$ (між послідовними моментами літнього та зимового сонцестояння) кут $\zeta(t)$ монотонно зростає, а на наступному проміжку часу між послідовними моментами зимового та літнього сонцестояння кут $\zeta(t)$ монотонно спадає.

Оскільки кут нахилу осі обертання Землі до площини земної орбіти більший 60° , то кут між вектором \vec{k} і кожним з векторів $\vec{v}(t), \vec{v}(t + T_1)$ також більший 60° . Тому абсолютне значення приросту $\zeta(t + T_1) - \zeta(t)$ кута $\zeta(t)$ протягом зоряної доби (на проміжку $[t, t + T_1]$) строго менше $\chi(t + T_1) - \chi(t)$. Отже, зміна кута $\zeta(t)$ протягом зоряної доби із-за малості $\chi(t + T_1) - \chi(t)$ є несуттєвою. Це підтверджує малість щоденної зміни тривалості світлового дня.

Далі використаємо співвідношення (4). Подамо його у вигляді

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{XOY}(t) + \vec{v}_{OZ}(t),$$

де

$$\vec{v}_{XOY}(t) = (\vec{v}(t), \vec{i})\vec{i} + (\vec{v}(t), \vec{j})\vec{j}$$

і

$$\vec{v}_{OZ}(t) = (\vec{v}(t), \vec{k})\vec{k}$$

(згідно з рис. 3 $\vec{v}_{XOY}(t) = \vec{OB}$ і $\vec{v}_{OZ}(t) = \vec{OA}$). Позначимо через $\delta(t)$ кут між векторами $\vec{v}_{XOY}(t)$ і \vec{i} , що відповідає куту $\chi(t)$ між векторами $\vec{v}(t)$ і \vec{i} . При обертанні Землі навколо своєї осі кінець вектора $\vec{v}_{XOY}(t)$ рухатиметься в площині екватора за годинниковою стрілкою і протягом зоряної доби повернеться на кут $-2\pi + |\delta(t + T_1) - \delta(t)|$ відносно геоцентричної системи прямокутних просторових координат (тут ураховано те, що протягом зоряної доби вектор $\vec{v}(t)$ повертається проти годинникової стрілки на кут $\chi(t + T_1) - \chi(t)$).

Неважко показати, враховуючи кут $\pi/2 - \zeta_0$ між площиною екватора та площиною орбіти Землі, що для всіх моментів часу t

$$|\delta(t + T_1) - \delta(t)| \leq \frac{\chi(t + T_1) - \chi(t)}{\cos \zeta_0}. \quad (20)$$

Зазначимо, що

$$\frac{1}{\cos \zeta_0} \approx 2,514573.$$

Використовуючи попередні дослідження, приходимо до таких висновків.

Твердження 1. *Протягом кожної зоряної доби кінець вектора $\vec{v}_{XOY}(t)$ з початком у центрі Землі (у точці O) неперервно рухається за годинниковою стрілкою відносно розглянутої геоцентричної системи прямокутних просторових координат при спостереженні з північного полюса екліптики; при цьому вектор $\vec{v}_{XOY}(t)$ повертається відносно розглянутої системи координат на кут $2\pi - |\delta(t+T_1) - \delta(t)|$, де $|\delta(t+T_1) - \delta(t)|$ задовольняє (20). У (20) приріст $\chi(t+T_1) - \chi(t)$ кута $\chi(t)$ на проміжку $[t, t+T_1]$, тобто зміна напрямку швидкості руху $\vec{v}(t)$ центра Землі протягом зоряної доби (у радіанах), знаходиться в межах проміжку $[\mu_1, \mu_2]$, де $\mu_1 = 0,0166942$ ($\approx 57'$) і $\mu_2 = 0,01803792$ ($\approx 1^\circ 2'$).*

Твердження 2. *Протягом кожного зоряного року швидкість $\vec{v}(t)$ руху центра Землі неперервно і періодично (з періодом T_2) змінює свій напрямок відносно осі обертання Землі (вектора \vec{k}) і кут $\zeta(t)$ між векторами $\vec{v}(t)$ і \vec{k} змінюється в межах проміжку $[\zeta_0, \pi - \zeta_0]$. Моментам весняного і зимового сонцестояння відповідають кути ζ_0 і $\pi - \zeta_0$ відповідно, а моментам весняного та осіннього рівнодення відповідає кут $\pi/2$.*

3.2. Притягувальні точки для точок Землі. Зафіксуємо довільну точку $P = P(x, y, z)$ Землі, що не збігається з її центром, і з'ясуємо, яка точка буде притягувальною для неї при русі центра мас Землі зі швидкістю $\vec{v}(t)$. Зазначимо, що центр мас Землі (див. рис. 2) згідно з принципом запізнювання гравітаційного поля не буде притягувальною точкою для P .

Притягувальну точку для P позначимо через C .

Спочатку приділимо увагу більш простій задачі. Розглянемо невагомий кулю \mathcal{B} і сферу \mathcal{S} радіуса R , де R — радіус Землі, з центром у точці O . У точці O зосередимо масу, що збігається з масою M_\oplus Землі. З'ясуємо розміщення притягувальної точки C для точки $P \in \mathcal{S}$, якщо точка O рухається по тій же самій траєкторії, що й центр Землі, зі швидкістю $\vec{v}(t)$, а куля \mathcal{B} обертається навколо осі обертання Землі з аналогічною кутовою швидкістю.

Розв'язання цієї задачі нам допоможе краще зрозуміти розміщення притягувальної точки для точки P в загальному випадку.

Використаємо проміжки часу $[t - \varsigma, t]$, для яких $\varsigma \in (0, \varsigma_0]$, де $\varsigma_0 = 0,025$ с — час, за який гравітація поширюється на відстань більшу, ніж $10R/9$. Оскільки за зоряну добу швидкість $\vec{v}(t)$ змінює напрямок не більше, ніж на $\chi_{\max} = 0,01803792$ радіан (згідно з пп. 3.1), то за проміжок часу $[t - \varsigma_0, t]$ швидкість $\vec{v}(t)$ змінить напрямок не більше, ніж на

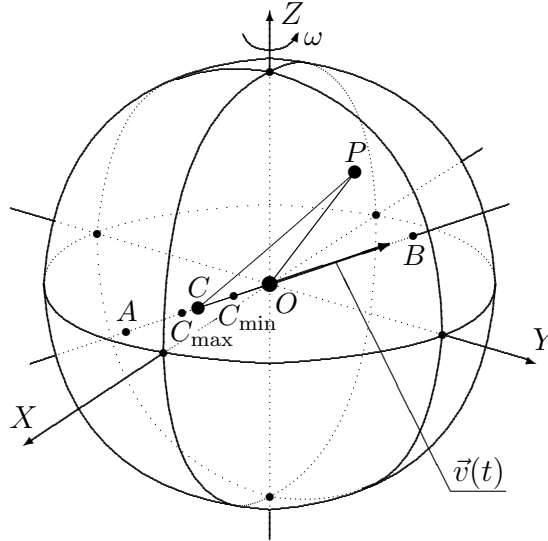
$$\chi_{\max} \frac{\varsigma_0}{T_1} \approx \frac{0,01803792 \cdot 0,025}{86164,090530833} \approx 5,23359554 \cdot 10^{-9} \text{ радіан.} \quad (21)$$

Завдяки малій зміні напрямку швидкості $\vec{v}(t)$ за розглянутий проміжок часу можна вважати, що точка O на малих проміжках часу рухається по прямих. З урахуванням цього та (3) для притягувальної точки C для P будуть виконуватися співвідношення

$$\frac{|\vec{OC}|}{|\vec{v}(t - \tau)|} = \frac{|\vec{CP}|}{c} \quad (22)$$

і

$$\vec{OC} = -\tau \vec{v}(t - \tau) \quad (23)$$

Рис. 6. Зображення притягувальної точки C для точки P поверхні \mathcal{S} .

(див. рис. 6), де τ — запізнення гравітаційного поля, для якого на підставі (22) і (23)

$$\tau^2 c^2 = \left(x + \tau(\vec{v}(t - \tau), \vec{i})\right)^2 + \left(y + \tau(\vec{v}(t - \tau), \vec{j})\right)^2 + \left(z + \tau(\vec{v}(t - \tau), \vec{k})\right)^2. \quad (24)$$

Згідно з обмеженнями на рух точки O для кожного моменту часу t та точки $P \in \mathcal{S}$ є єдине значення τ , що задовольняє (24), тобто τ є функцією змінних t і P :

$$\tau = \tau(t, P).$$

Розглянемо пряму, що проходить через точку O , з напрямним вектором $\vec{v}(t - \tau)$ (замість $\vec{v}(t - \tau)$ можна використати $\vec{v}(t)$, оскільки на підставі (21) напрямки цих векторів мало відрізняються). Ця пряма перетинає поверхню \mathcal{S} в точках A і B . При русі точки O притягувальною точкою для точки $P \in \mathcal{S}$ є точка C , що знаходиться на відрізку AO (див. рис. 6). Завдяки (24) точка C не збігається з точкою O .

Знайдемо найменше і найбільше значення $|\vec{OC}|$.

Очевидно, що вектор \vec{OC} має найменшу довжину тоді, коли точка P збігається з точкою A . У цьому випадку завдяки (22) справджується рівність

$$\frac{|\vec{OC}|}{|\vec{v}(t - \tau)|} = \frac{R - |\vec{OC}|}{c}$$

і, отже,

$$\min_{P \in \mathcal{S}} |\vec{OC}| = \frac{R |\vec{v}(t - \tau)|}{c + |\vec{v}(t - \tau)|}.$$

Аналогічно, вектор \vec{OC} має найбільшу довжину тоді, коли точка P збігається з точкою B . У цьому випадку на підставі (22) справджується рівність

$$\frac{|\vec{OC}|}{|\vec{v}(t - \tau)|} = \frac{R + |\vec{OC}|}{c}.$$

Тому

$$\max_{P \in \mathcal{S}} |\overrightarrow{OC}| = \frac{R |\vec{v}(t - \tau)|}{c - |\vec{v}(t - \tau)|}.$$

Точки відрізка AO , в яких вектор \overrightarrow{OC} має найменшу і найбільшу довжини, позначимо через C_{\min} і C_{\max} відповідно (точки зображені на рис. 6). Тоді

$$|\overrightarrow{OC_{\min}}| = \min_t \frac{R |\vec{v}(t - \tau)|}{c + |\vec{v}(t - \tau)|} = \frac{R v_{\min}}{c + v_{\min}} \quad (25)$$

і

$$|\overrightarrow{OC_{\max}}| = \max_t \frac{R |\vec{v}(t - \tau)|}{c - |\vec{v}(t - \tau)|} = \frac{R v_{\max}}{c - v_{\max}}. \quad (26)$$

В інженерній геодезії та роботах по топографії умовно вважають, що Земля має форму кулі радіуса $R = 6371,11$ км. Використовуючи це, а також те, що $c = 299792458$ м/с, на підставі (10), (11), (25) і (26) отримуємо

$$c_{\min} \stackrel{\text{df}}{=} |\overrightarrow{OC_{\min}}| \approx \frac{6371110 \cdot 29292,3}{299792458 + 29292,3} \text{ м} \approx 622,45 \text{ м} \quad (27)$$

і

$$c_{\max} \stackrel{\text{df}}{=} |\overrightarrow{OC_{\max}}| \approx \frac{6371110 \cdot 30287,9}{299792458 - 30287,9} \text{ м} \approx 643,73 \text{ м}. \quad (28)$$

Очевидно, що для кожної точки $P \in \mathcal{S}$, що не збігається з жодною з точок A і B , притягувальна точка C знаходиться між точками C_{\min} і C_{\max} , а для точок A і B притягувальними точками є точки C_{\max} і C_{\min} відповідно.

Потрібно також звернути увагу на те, що завдяки (27) і (28) відстань між точками C_{\min} і C_{\max} є достатньо малою ($\approx 21,28$ м) в порівнянні з R , а відстань між притягувальною точкою C для точки P поверхні \mathcal{S} (точка P довільна) і точкою O є достатньо великою ($\approx 633,09$ м $= (c_{\min} + c_{\max})/2$) — це близько 10^{-4} радіуса Землі і завдяки (23) запізнення гравітації τ для точок поверхні \mathcal{S} задовольняє співвідношення

$$\frac{|\overrightarrow{OC_{\min}}|}{v_{\max}} \leq \tau \leq \frac{|\overrightarrow{OC_{\max}}|}{v_{\min}},$$

тобто

$$0,020551 \text{ с} \leq \tau \leq 0,021976 \text{ с} \quad \text{і} \quad \tau < \zeta_0.$$

Для точок P , для яких $0 < |\overrightarrow{OP}| < R$, притягувальні точки знаходяться між точками C_{\max} і O , що видно з (27) і (28). Чим ближче точка E до точки O , тим ближче до цієї точки і притягувальна точка C , причому якщо $E \rightarrow O$, то й $C \rightarrow O$.

Отже, справджується таке твердження.

Твердження 3. Завдяки руху точки O навколо Сонця по орбіті Землі, обертанню кулі \mathcal{B} навколо осі Землі і скінченній швидкості гравітації:

1) кожна точка $P \in \mathcal{B}$, для якої $0 < |\overrightarrow{OP}| < R$, має свою притягувальну точку C , що не співпадає з точкою O і розміщена між точками C_{\max} і O ;

2) кожна точка сфери \mathcal{S} має притягувальну точку C , що розміщена між точками C_{\min} і C_{\max} (відстань між ними наближено дорівнює 21,28 м) і знаходиться на відстані близько 633,09 м від точки O (633,09 — середина відрізка $[c_{\min}, c_{\max}]$);

3) притягувальна точка C кожної точки $P \in \mathcal{B}$ (крім точки O) здійснює рух навколо осі обертання Землі як протягом кожної зоряної доби, так і протягом кожного зоряного року згідно з напрямком, протилежним до напрямку вектора швидкості руху центра мас Землі $\vec{v}(t)$ відносно системи координат, розглянутої в пп. 3.1.

Це твердження отримано в припущенні, що маса кулі \mathcal{B} зосереджена в точці O .

Далі проведемо дослідження у випадку невиконання цього припущення.

Вважатимемо, що куля \mathcal{B} є Землею і густина розподілу $\rho = \rho(x, y, z)$ маси Землі залежить лише від відстані від точки $E(x, y, z)$ до центра Землі (точки $O(0, 0, 0)$). При виконанні таких вимог для всіх точок кожної сфери з центром у точці O , радіус якої не більший радіуса Землі, густина розподілу $\rho = \rho(x, y, z)$ маси Землі буде однаковою.

Такі вимоги дають змогу подати земну кулю у вигляді об'єднання скінченного (досить великого) числа складових малих розмірів, кожна з яких складається з чотирьох частин із центрами мас у точках E_1, E_2, E_3 і E_4 або з двох частин із центрами мас у точках \hat{E}_1 і \hat{E}_2 , і які задовольняють умови симетрії, зміст яких розкривається в подальшому.

Розглянемо довільну точку P земної кулі, що не збігається з точкою O . Ця точка є точкою поверхні Землі або внутрішньою точкою Землі, що не співпадає з її центром. Також розглянемо довільні чотири частини земної кулі однакової маси та достатньо малих розмірів, центри мас E_1, E_2, E_3 і E_4 яких утворюють прямокутник, для якого точка O є центром симетрії, а вісь, що проходить через точки O і P , є віссю симетрії. Для простоти викладення матеріалу маси розглянутих частин зосередимо в точках E_1, E_2, E_3 і E_4 . Зафіксуємо площину, на якій розміщені точки E_1, E_2, E_3, E_4, O і P . Ця площина, перетинаючись із земною кулею, дає круг радіуса R (див. рис. 7). Використаємо прямокутну систему координат $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ із початком координат у точці O , координатні осі $O\hat{X}$ і $O\hat{Y}$ якої знаходяться на розглянутій площині, причому вектор \vec{OP} є напрямним для осі $O\hat{X}$, а координатна вісь $O\hat{Z}$ перпендикулярна до осей $O\hat{X}$ і $O\hat{Y}$.

Використаємо пряму, що проходить через точки A і B (вони знаходяться на поверхні Землі, див. рис. 6 і 7) і центр Землі O , а також вектор швидкості $\vec{v}(t)$ руху центра Землі, що розміщений на цій прямій. Будемо розглядати малий проміжок часу $[t - \varsigma, t]$, як і у випадку зосередження всієї маси Землі в її центрі. У межах цього проміжку часу швидкість $\vec{v}(t)$ суттєво не змінюється ($\vec{v}(t) \approx \vec{v}(t - \tau)$ для всіх $\tau \in [0, \varsigma]$ (див. (21))). Щоб виклад матеріалу не був громіздким, вважатимемо, що $\vec{v}(t) = \vec{v}(t - \tau)$ для всіх $\tau \in [0, \varsigma]$.

Нагадаємо, що в точках E_1, E_2, E_3 і E_4 зосереджено однакові маси і ці точки рухаються зі швидкістю $\vec{v}(t)$ (обертання Землі навколо своєї осі не враховується). Нехай $v = |\vec{v}(t)|$. Завдяки принципу запізнювання гравітаційного поля притягувальними точками для P є не точки E_1, E_2, E_3 і E_4 , а точки E_1^*, E_2^*, E_3^* і E_4^* відповідно (див. рис. 7, де відрізки $E_1E_1^*, E_2E_2^*, E_3E_3^*$ і $E_4E_4^*$ паралельні відрізку AB) і

$$\frac{|E_i^*E_i|}{v} = \frac{|E_i^*P|}{c}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (29)$$

Використаємо ці співвідношення.

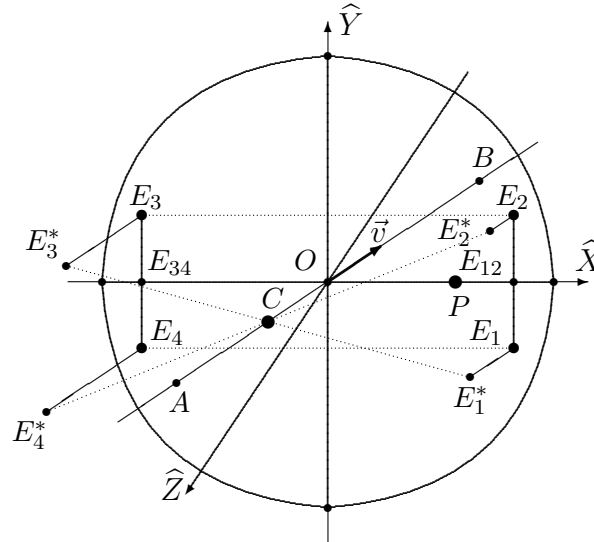


Рис. 7. Притягувальна точка C для точки P Землі, породжена точками E_1 , E_2 , E_3 і E_4 .

Позначимо через τ_i час, за який центр Землі O зі швидкістю \vec{v} проходить шлях довжиною $|\vec{E}_i^* E_i|$. Тоді, очевидно (див. рис. 7), що

$$\overrightarrow{E_i E_i^*} = -\tau_i \vec{v}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (30)$$

і

$$\overrightarrow{P E_i^*} = \overrightarrow{P E_i} + \overrightarrow{E_i E_i^*} = \overrightarrow{P E_i} - \tau_i \vec{v}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (31)$$

Із того, що точка O є серединою відрізків $E_1 E_3$ і $E_2 E_4$, випливає

$$\frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \overrightarrow{P E_s} = \overrightarrow{P O},$$

а з того, що точки E_1^* , E_2^* , E_3^* і E_4^* є притягувальними точками для точки P , випливає, що для вектора

$$\overrightarrow{P C} = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \overrightarrow{P E_s^*}$$

точка C є притягувальною точкою для P . Точка C породжена точками E_1^* , E_2^* , E_3^* і E_4^* (дія точки C на точку P в чотири рази менша сумарної дії притягувальних точок E_1^* , E_2^* , E_3^* і E_4^* на цю точку). Тому завдяки (30) і (31)

$$\overrightarrow{P C} = \overrightarrow{P O} - \left(\frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \tau_s \right) \vec{v}.$$

Звідси випливає, що притягувальна точка C для точки P знаходиться на відрізку AO прямої, що проходить через точки A і B .

З'ясуємо, в яких межах точка C знаходить на відріжку AO . Наведемо оцінки для

$$|\vec{OC}| = \left| \left(\frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \tau_i \right) \vec{v} \right|.$$

Завдяки (29) і (30)

$$\tau_i = \frac{|\vec{E}_i^* \vec{P}|}{c}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Тому на підставі (31)

$$\frac{|\vec{PE}_i|}{c} - \frac{v}{c} \tau_i \leq \tau_i \leq \frac{|\vec{PE}_i|}{c} + \frac{v}{c} \tau_i, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Отже,

$$\frac{|\vec{PE}_i|}{c+v} \leq \tau_i \leq \frac{|\vec{PE}_i|}{c-v}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\vec{PE}_i| \right) \frac{v}{c+v} \leq \left| \left(\frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \tau_i \right) \vec{v} \right| \leq \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\vec{PE}_i| \right) \frac{v}{c-v}. \quad (32)$$

Далі оцінимо $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\vec{PE}_i|$, враховуючи, що точки E_1, E_2, E_3 і E_4 знаходяться в крузі радіуса R , зображеному на рис. 7.

Нехай E_{12} і E_{34} — середини відрізків E_1E_2 і E_3E_4 , а h і l — відстані від точки E_{12} до точок E_1 і O відповідно.

Очевидно, що

$$l^2 + h^2 \leq R^2,$$

$$|\vec{PE}_1| = |\vec{PE}_2| = \sqrt{(l-r)^2 + h^2} \quad \text{і} \quad |\vec{PE}_3| = |\vec{PE}_4| = \sqrt{(l+r)^2 + h^2}.$$

Тому

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\vec{PE}_i| = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(l-r)^2 + h^2} + \sqrt{(l+r)^2 + h^2} \right).$$

Звідси (див. також рис. 7) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\vec{PE}_i| &\leq \max_{\substack{l^2+h^2 \leq R^2 \\ 0 \leq l \leq R}} \frac{\sqrt{(l-r)^2 + h^2} + \sqrt{(l+r)^2 + h^2}}{2} \leq \\ &\leq \max_{0 \leq l \leq R} \frac{\sqrt{(l-r)^2 + R^2 - l^2} + \sqrt{(l+r)^2 + R^2 - l^2}}{2} = \\ &= \max_{0 \leq l \leq R} \frac{\sqrt{-2rl + r^2 + R^2} + \sqrt{2rl + r^2 + R^2}}{2} = \sqrt{R^2 + r^2} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\overrightarrow{PE_i}| &\geq \min_{\substack{l^2+h^2 \leq R^2 \\ 0 \leq l \leq R}} \frac{\sqrt{(l-r)^2+h^2} + \sqrt{(l+r)^2+h^2}}{2} \geq \\ &\geq \min_{0 \leq l \leq R} \frac{\sqrt{(l-r)^2} + \sqrt{(l+r)^2}}{2} = r. \end{aligned}$$

Тому на підставі (32)

$$\frac{rv}{c+v} \leq |\overrightarrow{OC}| \leq \frac{\sqrt{R^2+r^2}v}{c-v}$$

і, отже,

$$\frac{rv_{\min}}{c+v_{\min}} \leq |\overrightarrow{OC}| \leq \frac{\sqrt{R^2+r^2}v_{\max}}{c-v_{\max}}. \quad (33)$$

Це співвідношення у випадку $r = R$ (тоді точка P знаходиться на поверхні Землі) має вигляд

$$\frac{Rv_{\min}}{c+v_{\min}} \leq |\overrightarrow{OC}| \leq \frac{\sqrt{2}Rv_{\max}}{c-v_{\max}}. \quad (34)$$

Зауважимо, що співвідношення (33) виконується і тоді, коли точка P знаходиться за межами Землі, тобто, коли на рис. 7 точка P знаходиться на осі $O\hat{X}$ і за межами круга (тоді $r > R$).

Співвідношення (33) і (34) можна подати у вигляді

$$\frac{r}{R} 622,45 \text{ м} \leq |\overrightarrow{OC}| \leq \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{R} 643,73 \text{ м},$$

і

$$622,45 \text{ м} \leq |\overrightarrow{OC}| \leq 910,37 \text{ м} \quad (35)$$

відповідно, якщо врахувати (25)–(28).

Далі розглянемо випадок двох точок \hat{E}_1 і \hat{E}_2 , в яких зосереджена однакова маса. Ці точки розміщені на осі $O\hat{X}$ або на осі $O\hat{Y}$ симетрично відносно точки O .

До цього випадку ми приходимо, коли точка E_1 збігається з точкою E_2 , а точка E_3 — з точкою E_4 або точка E_1 збігається з точкою E_4 , а точка E_2 — з точкою E_3 .

Із наведених попередніх міркувань випливає, що й у цьому випадку також виконуються співвідношення (33)–(35).

Отже, справджується таке твердження.

Твердження 4. У випадку розглянутих чотирьох точок E_1, E_2, E_3 і E_4 , в яких зосереджена однакова маса, або у випадку розглянутих двох точок \hat{E}_1 і \hat{E}_2 , в яких також зосереджена однакова маса, притягувальна точка C для точки P поверхні Землі знаходиться на відрізку AO (див. рис. 7) на відстані до центра Землі, не меншій 622,45 м і не більшій 910,37 м, а у випадку $|\overrightarrow{OP}| = r < R$ (точка P є внутрішньою точкою Землі) притягувальна точка C для точки P знаходиться на відрізку AO на відстані до центра Землі, не меншій, ніж $622,45 r/R$ м, і не більшій, ніж $643,73 \sqrt{R^2+r^2}/R$ м.

Тепер можна зробити остаточний висновок про розміщення притягувальних точок для точок Землі.

Використаємо те, що:

1) земну кулю можна подати у вигляді об'єднання скінченного числа частин як завгодно малих розмірів і однакової маси так, що центри мас E_1, E_2, E_3 і E_4 або \hat{E}_1 і \hat{E}_2 відповідних частин задовольняють умови симетрії;

2) кожній четвірці точок E_1, E_2, E_3 і E_4 або парі точок \hat{E}_1 і \hat{E}_2 відповідає притягувальна для P точка C , що знаходиться на відрізку AO на відстані до центра Землі, не меншій, ніж $622,45 r/R$ м, і не більшій, ніж $643,73 \sqrt{R^2 + r^2}/R$ м.

Згідно з твердженням 4 справджується таке твердження.

Твердження 5. *Результатом дії всіх притягувальних точок, розглянутих на попередньому кроці, на точку P Землі, віддаленої від центра Землі на відстань $r \in (0, R]$, є дія однієї притягувальної точки C на точку P , що породжена землею кулею; точка C знаходиться на відрізку AO на відстані до центра Землі, не меншій, ніж $622,45 r/R$ м, і не більшій, ніж $643,73 \sqrt{R^2 + r^2}/R$ м.*

Отже, підготовча робота завершена і можна приділити увагу силі земного тяжіння у вигляді, що враховуватиме скінченну швидкість гравітації.

3.3. Сила тяжіння Землі, породжена її обертанням навколо своєї осі, рухом навколо Сонця та скінченною швидкістю гравітації. Врахувавши розміщення притягувальних точок для точок Землі, породжених її рухом навколо Сонця та скінченною швидкістю гравітації, та обертання Землі з кутовою швидкістю ω , знайдемо силу тяжіння Землі для будь-якої точки P її поверхні. Нехай у цій точці зосереджено масу m .

На точку P діють дві сили \vec{F}_{PC} і \vec{F}_{pr} . Сила \vec{F}_{PC} — це реально діюча на точку P сила, викликана взаємодією Землі маси M_{\oplus} і точки P маси m з урахуванням швидкості руху центра Землі навколо Сонця та скінченної швидкості гравітації. Сила \vec{F}_{pr} — це відцентрова сила, що діє на точку P маси m .

Розглянемо кожну з цих сил.

Спочатку вивчимо складову силу \vec{F}_{PC} тяжіння Землі, з якою притягується точка P поверхні Землі до притягувальної точки C з твердження 5, породжену рухом Землі та скінченною швидкістю гравітації.

Згідно з наведеними вище міркуваннями кожній точці $E \neq P$ Землі можна поставити у відповідність єдину точку $C = C(E)$, що знаходиться між точками C_{\min} і C_{\max} (з урахуванням твердження 5), і є притягувальною для деяких точок E_1, E_2, E_3 і E_4 (хоча б одна з цих точок збігається з E), для яких виконується умова симетрії (див. пп. 3.2). Деякі з цих точок можуть збігатися. Завдяки виконанню умови симетрії точки E_1, E_2, E_3 і E_4 визначаються єдиним чином і притягувальна точка $C(E)$ для точки P неперервно залежить від точки E .

Тому у випадку неперервної залежності густини розподілу маси Землі $\rho = \rho(E)$ існуватиме потрійний інтеграл

$$\vec{F}_{PC} = Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(E)}{|\overrightarrow{PC(E)}|^3} \overrightarrow{PC(E)} dx dy dz, \quad (36)$$

де Ω — множина всіх точок Землі, і векторне значення \vec{F}_{PC} цього інтеграла за законом всесвітнього тяжіння збігатиметься з силою, що діє на точку P , в якій зосереджена маса m .

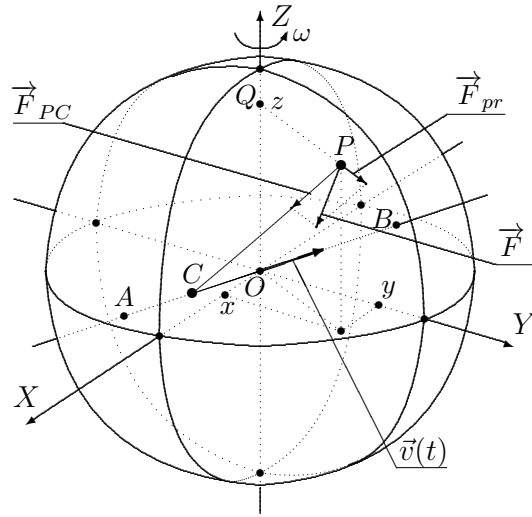


Рис. 8. Зображення сил \vec{F}_{PC} , \vec{F}_{pr} і \vec{F} , що діють на точку P .

Рівність (36) можна отримати з використанням розбиття земної кулі на частини, узгодженим із умовою симетрії, та побудови інтегральної суми, що відповідає потрібному інтегралу. При цьому потрібно враховувати, що точка $E = P$ є особливою для підінтегральної функції.

Далі приділимо увагу відцентровій силі \vec{F}_{pr} . Вона визначається формулою

$$\vec{F}_{pr} = m\omega^2 \vec{QP} \quad (37)$$

(див. рис. 8), де Q — проекція точки P на вісь обертання Землі, тобто на вісь OZ .

Точка Q має координати $0, 0, z$, оскільки точка P має координати x, y, z , а вектор сили \vec{F}_{pr} лежить у площині осі обертання і направлений перпендикулярно від неї.

Тому згідно з (37)

$$\vec{F}_{pr} = m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j}) \quad \text{і} \quad |\vec{F}_{pr}| = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отже, при русі Землі навколо Сонця й обертанні її навколо своєї осі на точку P маси m поверхні Землі діє сила тяжіння $\vec{F} = \vec{F}_{PC} + \vec{F}_{pr}$ і на підставі (36) і (37)

$$\vec{F} = Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(E)}{|\vec{PC}(E)|^3} \vec{PC}(E) dx dy dz + m\omega^2 \vec{QP}. \quad (38)$$

4. Добові коливання поверхні Землі. Перший доданок \vec{F}_{PC} у правій частині (38) залежить від часу t , оскільки завдяки обертанню Землі навколо своєї осі (і зміни розміщення точки P відносно точок A і B (див. рис. 8)) притягувальна точка $C(E)$ в (36) для P , що відповідає точці E , змінює координати. Другий доданок \vec{F}_{pr} у (38) не залежить від часу t , а залежить лише від координат x і y точки P . Тому сила тяжіння \vec{F} Землі залежить від часу t .

Завдяки цій властивості \vec{F} відбуваються коливання поверхні Землі.

Здійснимо аналіз коливання поверхні Землі в околі точки P в одному випадку розміщення цієї точки.

Використаємо кут нахилу $\zeta_0 \approx 66^\circ 34'$ осі обертання OZ Землі відносно площини орбіти. При русі Землі по своїй орбіті протягом зоряного року кут $\zeta(t)$ між віссю обертання Землі і вектором швидкості $\vec{v}(t)$ змінюватиметься у межах відрізка $[\zeta_0, \pi - \zeta_0]$.

Зафіксуємо довільний момент часу t_1 .

Можливі випадки:

- 1) $\zeta(t_1) \in [\zeta_0, \pi/2)$;
- 2) $\zeta(t_1) = \pi/2$;
- 3) $\zeta(t_1) \in (\pi/2, \pi - \zeta_0]$.

Розглянемо 1-й випадок (дослідження в інших випадках аналогічні).

Завдяки співвідношенню (21) і твердженню 1 можна вважати, що протягом часового проміжку $[t_1, t_1 + T_1]$, де T_1 — тривалість зоряної доби Землі (див. пп. 3.1), центр Землі рухається по осі l_1 з напрямним вектором $\vec{v}(t_1)$. Розглянемо площину Υ , на якій розміщені вісь l_1 і вісь обертання Землі, а також прямокутну декартову систему координат на площині Υ з координатними осями l_1 і l_2 (розміщення осі l_2 на площині Υ показано на рис. 9).

Нехай у момент часу t_1 точка P (тобто $P(t_1)$) належить спільній частині $\Upsilon \cap \mathcal{S}$ площини Υ та поверхні \mathcal{S} Землі і кут $\zeta(t)$ між векторами \vec{OP} та $\vec{v}(t_1)$ знаходиться у межах проміжку $(\zeta_0, 0]$ (див. рис. 9). Тоді в результаті обертання Землі навколо своєї осі в деякий момент часу $t_2 \approx t_1 + T_1/2$ точка P збігатиметься з точкою $P(t_2) \in \Upsilon \cap \mathcal{S}$ і точки $P(t_1)$ та $P(t_2)$ розміщені на площині Υ симетрично відносно осі OZ .

Крім прямокутної декартової системи координат використаємо полярну систему координат, полярна вісь якої збігається з додатною частиною осі l_1 , а полюс — з точкою O .

Позначимо через α і β полярні кути точок $P(t_1)$ і $P(t_2)$ відповідно. Вважатимемо, що гострий кут α є таким, що кут β є тупим, абсциса точки $P(t_2)$ менша $-c_{\min}$ і

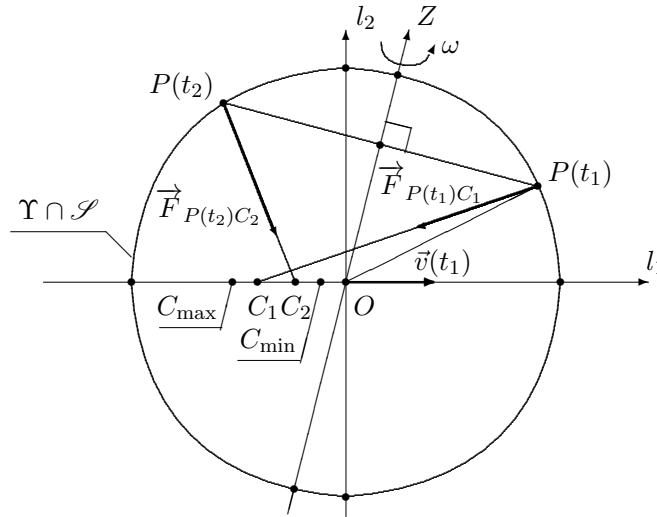
$$\cos \alpha + |\cos \beta| > \frac{1 + 3c_{\min}/R}{1 - 2c_{\min}/R} \frac{\sqrt{2} c_{\max} - c_{\min}}{c_{\min}}. \quad (39)$$

Значимо, що права частина (39) менша $1/2$ (з урахуванням того, що $c_{\min} \approx 622,45$ м і $R \approx 6371,11$ км) і виконання нерівності (39) не є суттєвим звуженням множини пар кутів α і β , для яких правильними є такі міркування.

Порівнюємо сили, з якими точка P притягується Землею в моменти часу t_1 і t_2 , тобто сили, з якими точки $P(t_1)$ і $P(t_2)$ притягуються до точок C_1 і C_2 відповідно. Значимо, що притягувальні точки C_1 і C_2 для точок $P(t_1)$ і $P(t_2)$ не збігаються і точка C_2 ближче знаходиться до точки O , ніж точка C_1 , оскільки завдяки виконанню наведених вище вимог $|\vec{P}(t_2)C_2| < |\vec{P}(t_1)C_1|$.

За формулою (36) з урахуванням рис. 6 і 9 маємо

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{P(t_1)C_1}| &= \left| Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(E)}{|\vec{P}(t_1)C_1(E)|^3} \overrightarrow{P(t_1)C_1(E)} dx dy dz \right| \leq \\ &\leq \iiint_{\Omega} \frac{Gm\rho(E)}{|\vec{P}(t_1)C_1(E)|^3} |\overrightarrow{P(t_1)C_1(E)}| dx dy dz \leq \frac{GmM_{\oplus}}{|\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2}, \end{aligned}$$

Рис. 9. Сили $\vec{F}_{P(t_1)C_1}$ і $\vec{F}_{P(t_2)C_2}$.

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_{P(t_1)C_1}| &= \left| Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(E)}{|\overrightarrow{P(t_1)C_1(E)}|^3} \left(\overrightarrow{P(t_1)C_{\max}} + \overrightarrow{C_{\max}C_1(E)} \right) dx dy dz \right| \geq \\
 &\geq Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(E)}{|\overrightarrow{P(t_1)C_1(E)}|^3} \left(|\overrightarrow{P(t_1)C_{\max}}| - |\overrightarrow{C_{\max}C_1(E)}| \right) dx dy dz \geq \\
 &\geq Gm M_{\oplus} \frac{|\overrightarrow{P(t_1)C_{\max}}| - |\overrightarrow{C_{\max}C_{\min}}|}{|\overrightarrow{P(t_1)C_{\max}}|^3}.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$Gm M_{\oplus} \frac{|\overrightarrow{P(t_1)C_{\max}}| - |\overrightarrow{C_{\max}C_{\min}}|}{|\overrightarrow{P(t_1)C_{\max}}|^3} \leq |\vec{F}_{P(t_1)C_1}| \leq \frac{Gm M_{\oplus}}{|\overrightarrow{P(t_1)C_{\min}}|^2}. \quad (40)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_{P(t_2)C_2}| &= \left| Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(E)}{|\overrightarrow{P(t_2)C_2(E)}|^3} \overrightarrow{P(t_2)C_2(E)} dx dy dz \right| \leq \\
 &\leq \iiint_{\Omega} \frac{Gm \rho(E)}{|\overrightarrow{P(t_2)C_2(E)}|^3} |\overrightarrow{P(t_2)C_2(E)}| dx dy dz \leq \frac{Gm M_{\oplus}}{|\overrightarrow{P(t_2)C_{\max}}|^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{P(t_2)C_2}| &\geq \iiint_{\Omega} \frac{Gm\rho(E)}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3} \left(|\vec{P}(t_2)C_{\min}| - |\vec{C}_{\max}C_{\min}| \right) dx dy dz = \\ &= GmM_{\oplus} \frac{|\vec{P}(t_2)C_{\min}| - |\vec{C}_{\max}C_{\min}|}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3} \end{aligned}$$

і, отже,

$$GmM_{\oplus} \frac{|\vec{P}(t_2)C_{\min}| - |\vec{C}_{\max}C_{\min}|}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3} \leq |\vec{F}_{P(t_2)C_2}| \leq \frac{GmM_{\oplus}}{|\vec{P}(t_2)C_{\max}|^2}. \quad (41)$$

Виконується нерівність

$$\frac{1}{|\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2} < \frac{|\vec{P}(t_2)C_{\min}| - |\vec{C}_{\max}C_{\min}|}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3}. \quad (42)$$

Справді, з урахуванням рис. 6, 9 та співвідношень (27) і (28) маємо

$$\begin{aligned} \Delta &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{|\vec{P}(t_2)C_{\min}| - |\vec{C}_{\max}C_{\min}|}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3} - \frac{1}{|\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2} = \\ &= \frac{1}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^2} - \frac{1}{|\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2} - \frac{|\vec{C}_{\max}C_{\min}|}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3} = \\ &= \frac{|\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2 - |\vec{P}(t_2)C_{\min}|^2}{|\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2 |\vec{P}(t_2)C_{\min}|^2} - \frac{|\vec{C}_{\max}C_{\min}|}{|\vec{P}(t_2)C_{\min}|^3}. \end{aligned}$$

Використаємо координати векторів $\vec{P}(t_1)C_{\min}$, $\vec{P}(t_2)C_{\min}$ і $\vec{C}_{\max}C_{\min}$.

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \vec{P}(t_1)C_{\min} &= (-c_{\min} - R \cos \alpha, -R \sin \alpha), \\ |\vec{P}(t_1)C_{\min}|^2 &= R^2 + c_{\min}^2 + 2Rc_{\min} \cos \alpha, \\ \vec{P}(t_2)C_{\min} &= (-c_{\min} - R \cos \beta, -R \sin \beta), \\ |\vec{P}(t_2)C_{\min}|^2 &= R^2 + c_{\min}^2 - 2Rc_{\min} |\cos \beta|, \end{aligned}$$

де R — радіус Землі, і згідно з твердженням 5

$$\vec{C}_{\max}C_{\min} = (-c_{\min} + \sqrt{2} c_{\max}, 0),$$

$$\left| \overrightarrow{C_{\max} C_{\min}} \right| = \sqrt{2} c_{\max} - c_{\min}.$$

Тому

$$\Delta = \frac{c_{\min}(\cos \alpha + |\cos \beta|) - \gamma (\sqrt{2} c_{\max} - c_{\min})}{(R + c_{\min}^2/R + 2c_{\min} \cos \alpha) (R^2 + c_{\min}^2 - 2Rc_{\min} |\cos \beta|)},$$

де

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{R + c_{\min}^2/R + 2c_{\min} \cos \alpha}{(R^2 + c_{\min}^2 - 2Rc_{\min} |\cos \beta|)^{1/2}} = \\ &= \frac{1 + c_{\min}^2/R^2 + 2c_{\min} \cos \alpha/R}{(1 + c_{\min}^2/R^2 - 2c_{\min} |\cos \beta|/R)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Оскільки згідно з (43) і тим, що $c_{\min} \ll R$,

$$\gamma < \frac{1 + 3c_{\min}/R}{(1 - 2c_{\min}/R)^{1/2}} < \frac{1 + 3c_{\min}/R}{1 - 2c_{\min}/R},$$

то на підставі (39) $\Delta > 0$, тобто справджується нерівність (42). Тому завдяки (40) і (41) сили $\vec{F}_{P(t_2)C_2}$ і $\vec{F}_{P(t_1)C_1}$ відрізняються за величиною і $|\vec{F}_{P(t_1)C_1}| < |\vec{F}_{P(t_2)C_2}|$.

Отже, завдяки скінченній швидкості гравітації, обертанню Землі навколо своєї осі та руху її навколо Сонця відбувається зміна величини сили \vec{F} , з якою притягується точка P поверхні Землі, що в момент часу t_1 збігалася з точкою $P(t_1)$. Виявлена властивість для точки $P(t_1)$ має місце і для точок поверхні Землі, що знаходяться в деяких околах цієї точки і точки $P(t_2)$ (в силу неперервної залежності \vec{F} від P).

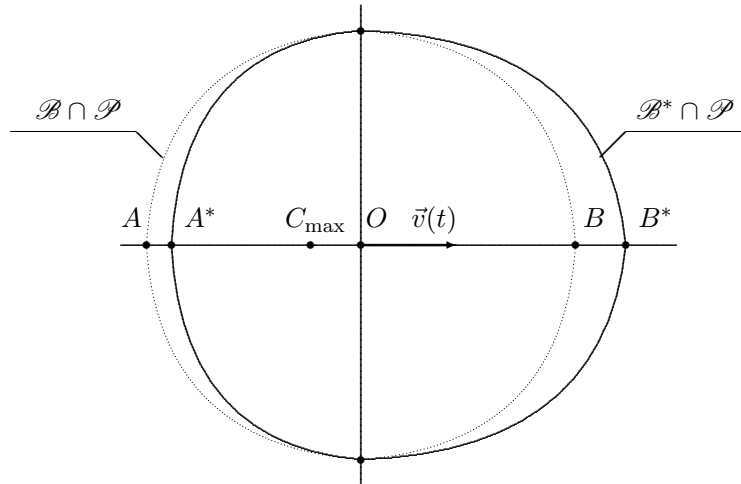
Тому відбувається коливання поверхні Землі. Ці коливання відбувалися б навіть у випадку, коли у Сонячній системі не було б інших планет, супутників Землі (наприклад, Місяця) й інших небесних об'єктів.

5. Додаткові висновки, зауваження та літературні вказівки. 1. Принцип запізнення гравітаційного поля та узагальнення закону всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченності швидкості гравітації (п.2) використовувалися в [7–10]. Завдяки дослідженню побудованої в [7] математичної моделі Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації було помічено, що на підставі скінченної швидкості гравітації, обертання Землі навколо своєї осі й її руху навколо Сонця *притягувальна точка для точок Землі не збігається з її центром ваги, а зміщена в точку, в якій перебував цей центр у деякому минулому, що залежить від руху Землі та її швидкості.* Тому сила тяжіння Землі завдяки її обертанню змінюється з часом (дію на Землю планет Сонячної системи, супутників Землі та інших небесних тіл ми не враховуємо).

Залежність сили тяжіння Землі від часу також вивчалася за допомогою експериментів, що проводилися з 19 лютого по 2 березня 2021 року в м. Рівне. Кожної доби з розглянутого проміжку часу в околі 6 годин 25 хвилин і 18 годин 25 хвилин вимірювалася сила, з якою Земля притягувала гирю 20 г. Використовувалася електронна вага FC-50, точність результатів зважувань якої до 0,001 г. Основний результат експериментів — *сила притягування Землею гирі вранці менша, ніж увечері*, що узгоджується з дослідженнями п. 4.

Принцип запізнення гравітаційного поля також використовувався в [11–13].

2. Зміна у часі сили \vec{F}_{PC} , породжена скінченністю швидкості гравітації й обертанням Землі навколо своєї осі, впливає і на припливи, тобто підняття до максимального рівня

Рис. 10. Яйцеподібна форма тіла \mathcal{B}^* .

й опускання до мінімального рівня води відносно берегів морів та океанів двічі за добу. Вважається (див., наприклад, [14, 15]), що припливи викликаються змінами в часі сил тяжіння Місяця і Сонця, які діють на Землю і на води морів та океанів, що покривають її. Крім цих двох сил при дослідженні припливів потрібно враховувати силу \vec{F}_{PC} , що також є однією з приливоутворюючих сил.

3. Завдяки зміщенню точки притягування кожної точки небесного тіла, крім центра ваги, при його русі в просторі з ненульовою швидкістю, пов'язаному зі скінченністю швидкості гравітації, поле сили тяжіння в точках поверхні тіла відрізняється від аналогічного поля у випадку, коли притягувальна точка збігається з центом ваги. Така зміна поля тяжіння, спричинена зміщенням притягувальних точок для точок небесного тіла, є причиною зміни форми цього тіла. Наприклад, у випадку сферичного тіла \mathcal{B} з однорідним розподілом маси, що рухається з ненульовою швидкістю $\vec{v}(t)$, на точки, що знаходяться до притягувальних точок далі (вони заповнюють проміжок $[\sqrt{2}C_{\max}, O)$), ніж центр ваги, діє менша сила, ніж на точки, що знаходяться ближче до притягувальних точок. Завдяки такому розподілу сили тяжіння сферичне тіло \mathcal{B} набуває яйцеподібної форми (тіло \mathcal{B}^*). При цьому точки A і B поверхні тіла \mathcal{B} перейдуть у точки A^* і B^* поверхні тіла \mathcal{B}^* відповідно (рис. 10).

На рис. 10 суцільною лінією зображено перетин поверхні тіла \mathcal{B}^* з площиною \mathcal{P} , що проходить через точки A і B , з урахуванням деформації тіла, коли $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$. Пунктирною лінією зображено перетин поверхні тіла \mathcal{B} з розглянутою площиною \mathcal{P} , коли $\vec{v}(t) \equiv \vec{0}$.

4. Розглянутий у пп. 3.2 метод знаходження притягувальних точок для сферичних тіл, формула (38) (пп. 3.3) та висновки п. 5 наведено вперше.

Література

1. А. Эйнштейн, *О специальной и общей теории относительности*, Госиздат, Москва (1922).
2. Yvonne Choquet-Bruhat, *General relativity and the Einstein equations*, Oxford Univ. Press, Oxford (2009).
3. E. B. Fomalont, S. M. Kopeikin, *The Measurement of the light deflection from Jupiter: experimental results*, *Astrophys. J.*, **598**, 704–711 (2003).

4. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al., *Gravitational waves and Gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A*, *Astrophys. J.*, **848**, Issue 2, article id. L13 (2017); DOI:10.3847/2041-8213/aa920c.
5. О. В. Голубева, *Теоретическая механика*, Высш. шк., Москва (1968).
6. С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В. П. Иваницкая, *Аналитическая геометрия*, Просвещение, Москва (1965).
7. В. Ю. Слюсарчук, *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації*, *Нелін. коливання*, **21**, № 2, 238–261 (2018); DOI 10.1007/s10958-019-04540-2.
8. В. Ю. Слюсарчук, *Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації*, *Нелін. коливання*, **21**, № 3, 397–419 (2018); DOI: 10.1007/s10958-019-04550-0.
9. В. Ю. Слюсарчук, *Динаміка трьох тіл, розміщених на прямій, з урахуванням скінченності швидкості гравітації*, *Нелін. коливання*, **23**, № 4, 529–552 (2020).
10. В. Ю. Слюсарчук, *Динаміка двох тіл із траєкторіями на нерухомій прямій з урахуванням скінченності швидкості гравітації*, *Нелін. коливання*, **24**, № 2, 249–277 (2021).
11. В. Ю. Слюсарчук, *Дослідження систем диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв'язків*, *Укр. мат. журн.*, **71**, № 5, 677–691 (2019); DOI: 10.1007/s11253-019-01673-0.
12. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння в гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів*, *Укр. мат. журн.*, **72**, № 1, 86–99 (2020); DOI: 10.1007/s11253-020-01765-2.
13. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи відображень, ізоморфної однопараметричній групі поворотів*, *Нелін. коливання*, **23**, № 1, 112–123 (2020).
14. А. И. Дубанин, *Приливы в море*, Гидрометеоролог. изд-во, Ленинград (1960).
15. Е. И. Бутиков, *Физика океанских приливов в компьютерных моделях*, Уч. пособие, Изд-во Санкт-Петербург. гос. ун-та, Санкт-Петербург (2007).

Одержано 30.12.21