УДК 517.925

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ, ЩО Є БЛИЗЬКИМИ ДО ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ, ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

М. О. Білозерова

Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2 (голов. корп.), Одеса, 65082, Україна
e-mail: Marbel@ukr.net

Г. А. Гержановська

Держ. ун-т інтелект. технологій та зв'язку
вул. Кузнечна, 1, Одеса, 65023, Україна
e-mail: greta.odessa@gmail.com

For essentially nonlinear nonautonomous differential equations of the second order with nonlinearities that are close to regularly varying functions, the conditions of existence of a sufficiently wide class of solutions that are close to linear functions as the argument tends to the critical point are obtained. Moreover, the exact asymptotic formulas for such solutions and their first-order derivatives are found. The number of these solutions is also obtained in the paper. The results are illustrated for differential equations of a more concrete class.

Для істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, близькими до правильно змінних функцій, отримано умови існування достатньо широкого класу розв'язків, що є близькими до лінійних функцій при прямуванні аргументу до особливої точки. Крім того, одержано точні асимптотичні формули для таких розв'язків і їхніх похідних першого порядку, визначено кількість таких розв'язків. Здобуті результати проілюстровано на класі диференціальних рівнянь більш конкретного вигляду.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\exp\big(R(|\ln|yy'||)\big), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a,\omega[\,\to\,]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to\,]0,+\infty[$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — проміжок або $[y_i^0; Y_i^1[$, або $]Y_i; y_i^0]$ [1] (для кожного $i \in \{0,1\}$), R — неперервно диференційовна, з монотонною похідною, правильно змінна на нескінченності функція порядку μ, $0 < \mu < 1$. Крім того, вважається, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$ (для кожного $i \in \{0,1\}$) є правильно змінною функцією (див. [1]) при $z \to Y_i$, $z \in \Delta_{Y_i}$, порядку σ_i, $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$. Асимптотичній поведінці розв'язків диференціальних рівнянь вигляду (1), де $\exp\big(R\big(|\ln|yy'||\big)\big) \equiv 1$, присвячено багато робіт (див., наприклад, [2–4]). У роботі [5] розглядалося рівняння більш загального вигляду, близьке до рівняння (1).

[1] При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Однак, у загальному випадку рівняння (1), коли праву частину не можна зобразити у вигляді добутку функцій лише від однієї змінної, навіть асимптотично, відповідні результати вже не справджуються.

Означення 1. *Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, якщо він заданий на $[t_0, \omega[$ і для кожного $i \in \{0, 1\}$*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{2}$$

У даній роботі досліджуються $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язки рівняння (1). Цей клас розв'язків відноситься до особливого випадку, оскільки похідні першого порядку таких розв'язків є повільно змінними функціями. У роботі [6] отримано умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків рівнянь вигляду (1), але було розглянуто не всі можливі випадки.

Для формулювання основних результатів уведемо додаткові позначення. У випадку, коли $\lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \operatorname{sign} y_0^0 = Y_0$,

$$I_0(t) = \alpha_0 \int\limits_{A_\omega^0}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0\left(|\pi_\omega(\tau)| \operatorname{sign} y_0^0\right) d\tau,$$

$$A_\omega^0 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0\left(|\pi_\omega(\tau)| \operatorname{sign} y_0^0\right) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_b^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0\left(|\pi_\omega(\tau)| \operatorname{sign} y_0^0\right) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$N_0(t) = \alpha_0 p(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0+1} \Theta_0\left(|\pi_\omega(t)| \operatorname{sign} y_0^0\right),$$

де $b \in [a, \omega[$ обирається так, щоб $|\pi_\omega(t)| \operatorname{sign} y_0^0 \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [b, \omega[$,

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i} \quad \forall i \in \{0, 1\}.$$

Означення 2. *Будемо говорити, що функція φ_i, $i \in \{0, 1\}$, задовольняє умову S, якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції $L\colon \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ такої, що*

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

виконуються співвідношення

$$\Theta_i(zL(z)) = \Theta_i(z)(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad z \to Y_i, \quad z \in \Delta_{Y_i}.$$

Умову S заздалегідь задовольняють функції $\varphi_i(z)$, для яких $\Theta_i(z)$ мають скінченну границю при $z \to Y_i$, а також функції вигляду $|z|^{\sigma_i}|\ln|z||^{\mu_i}$, $|z|^{\sigma_i}|\ln|\ln|z|||^{\mu_i}$ і багато інших.

Теорема. *Для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків необхідно виконання умов*

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ 0, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \pi_\omega(t) y_0^0 y_1^0 > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[. \tag{3}$$

Якщо функція φ_0 задовольняє умову S, p — неперервно диференційовна і

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) N_0'(t)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||) N_0(t)} = M, \quad M \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}, \tag{4}$$

то разом з (3) умови

$$\begin{gathered} \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 \exp\left(\frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} R(|\ln|\pi_\omega(t)||) \right) = Y_1, \\ y_1^0 (M+1) \alpha_0 (1 - \sigma_0 - \sigma_1) \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[\end{gathered} \tag{5}$$

є необхідними й достатніми для існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків у рівняння (1).

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$\begin{gathered} \frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t)) \exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))} = \frac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1| \, |N_0(t)(M+1)|}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} [1 + o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)]. \end{gathered} \tag{6}$$

При цьому у випадку, коли $\omega = +\infty$, для $M \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ буде існувати двопараметрична сім'я таких розв'язків, а коли $M \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ — однопараметрична. У випадку, коли $\omega < +\infty$, для $M \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ буде існувати однопараметрична сім'я.

Доведення теореми. *Необхідність.* Нехай $y \colon [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язок диференціального рівняння (1). Згідно з (2) з тотожності

$$\frac{y''(t) y(t)}{(y'(t))^2} = \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)' \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^{-2} + 1$$

випливає, що

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)' \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^{-2} = -1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси з урахуванням (2) маємо асимптотичні зображення

$$y(t) = \pi_\omega(t) y'(t) [1 + 0(1)], \qquad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)} \right) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{7}$$

Згідно з першим із цих співвідношень має місце друге зображення (6) і виконується умова (3). Крім того, з (7) випливає, що існує така повільно змінна неперервно диференційовна функція $L \colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$, що $y(t) = \pi_\omega(t) L(\pi_\omega(t))$. Тому, завдяки умові S $\Theta_0(y(t)) = \Theta_0\left(|\pi_\omega(t)| \operatorname{sign} y_0^0\right) [1 + o(1)]$ при $t \uparrow \omega$. Більш того, із першого зображення (7), використовуючи властивості логарифмічної функції та функції R, отримаємо, що асимптотичні зображення

$$R(|\ln|y(t)y'(t)||) = R(|\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)],$$
$$R'(|\ln|y(t)y'(t)||) = R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)] \tag{8}$$

мають місце при $t \uparrow \omega$.

Перепишемо рівняння (1) при $t \uparrow \omega$ у вигляді

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = I_0'(t)\exp\big(R(|\ln|y(t)y'(t)||)\big)[1+o(1)]. \tag{9}$$

Співвідношення (9) при $t \uparrow \omega$ можна подати у вигляді

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = \frac{N_0(t)\exp\left(R(|\ln|y(t)y'(t)||)\right)y'(t)[1+o(1)]}{y(t)}. \tag{10}$$

Із властивостей функції R випливає, що існує двічі неперервно диференційовна функція $\widetilde{R}:$ $]0;+\infty[\,\to\,]0;+\infty[$ така, що

$$\widetilde{R}(z) = R(z)[1+o(1)], \qquad \widetilde{R}'(z) = R'(z)[1+o(1)], \qquad \lim_{z\to+\infty}\frac{\widetilde{R}''(z)R(z)}{\left(\widetilde{R}'(z)\right)^2} = \frac{\mu}{\mu-1}. \tag{11}$$

З урахуванням умов (2), (8), (11), (4) і першого асимптотичного зображення (7) з рівності

$$\left(\frac{N_0(t)\exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)}{\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}\right)'$$
$$= \frac{N_0(t)\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))y'(t)}{y(t)}\times$$
$$\times\left(\frac{y(t)}{\pi_\omega(t)y'(t)}\left(\frac{N_0'(t)\pi_\omega(t)}{N_0(t)\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)} - \frac{\widetilde{R}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}{\left(\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)\right)^2}\frac{\widetilde{R''}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}{\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}\right)+\right.$$
$$\left.+1+\frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}\right)$$

маємо таке зображення при $t \uparrow \omega$:

$$\left(\frac{N_0(t)\exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)}{\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}\right)' =$$
$$= \frac{(M+1)N_0(t)\exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)}{\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}[1+o(1)].$$

Отже, використовуючи властивості функції φ_1 і (10), отримуємо

$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = \frac{(M+1)N_0(t)\exp\left(R\left(|\ln|y(t)y'(t)||\right)\right)}{\widetilde{R'}\left(|\ln|\pi_\omega(t)||\right)}\times$$

$$\times (1 - \sigma_0 - \sigma_1)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Перше із зображень (6) випливає з цього співвідношення з використанням (11). Враховуючи знак функції $y'(t)$, одержуємо умови (5).

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що φ_0 задовольняє умову S, а також виконуються умови (3) – (5). Позначимо $g(v_0, v_1) = \exp\big(R(|\ln|v_0 v_1||)\big)L_1(v_1)$, де $L_1(z) = \Theta_1(z)[1 + o(1)]$ при $z \to Y_1$, $z \in \Delta_{Y_1}$, $\lim\limits_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \dfrac{zL_1'(z)}{L_1(z)} = 0$. Звідси, з урахуванням вигляду функцій φ_1 та R, маємо

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \dfrac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad v_j \in \Delta_{Y_j}, \quad j \neq i \quad \forall i, j \in \{0, 1\}. \tag{12}$$

Таким чином, можна вибрати $\widetilde{\Delta}_{Y_i} \subset \Delta_{Y_i}$ $(\forall i \in \{0, 1\})$ так, щоб

$$\left| \frac{v_i \dfrac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} \right| < \zeta \quad \forall i \in \{0, 1\} \quad \text{при} \quad (v_0, v_1) \in \widetilde{\Delta}_{Y_0} \times \widetilde{\Delta}_{Y_1}, \tag{13}$$

де $0 < \zeta < \dfrac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}{4}$, ζ достатньо мале та

$$\widetilde{\Delta}_{Y_i} = \begin{cases} [\tilde{y}_i^0, Y_i[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[, \quad y_i^0 \leq \tilde{y}_i^0 < Y_i, \\ ]Y_i, \tilde{y}_i^0], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0], \quad Y_i > \tilde{y}_i^0 \geq y_i^0, \end{cases} \qquad i \in \{0, 1\}.$$

Розглянемо функцію

$$F(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)} \\ \dfrac{s_1}{s_0} \end{pmatrix},$$

яка задана на множині $\widetilde{\Delta}_{Y_0} \times \widetilde{\Delta}_{Y_1}$. Розглянемо першу компоненту даної функції. З урахуванням (12) маємо

$$\lim_{\substack{s_1\to Y_1\\ s_1\in\widetilde{\Delta}_{Y_1}}} \frac{s_1 \left(\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)} \right)'_{s_1}}{\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)}} = 1 - \sigma_0 - \sigma_1 \quad \text{рівномірно по} \quad s_0 \in \widetilde{\Delta}_{Y_0},$$

$$\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\widetilde{\Delta}_{Y_0}}} \frac{s_0 \left(\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)} \right)'_{s_0}}{\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)}} = -R'(|\ln|s_0 s_1||)\,\mathrm{sign}(s_0) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad s_1 \in \widetilde{\Delta}_{Y_1}.$$

Тому отримуємо

$$\lim_{\substack{s_1\to Y_1\\ s_1\in\widetilde{\Delta}_{Y_1}}}\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0,s_1)}=\Upsilon\quad \text{рівномірно по}\quad s_0\in\widetilde{\Delta}_{Y_0},$$

$$\Upsilon=\begin{cases}+\infty, & \text{якщо}\quad Y_1=\infty\quad \text{і}\quad 1-\sigma_0-\sigma_1>0\\ & \text{або}\quad Y_1=0\quad \text{і}\quad 1-\sigma_0-\sigma_1<0,\\ 0, & \text{якщо}\quad Y_1=\infty\quad \text{і}\quad 1-\sigma_0-\sigma_1<0\\ & \text{або}\quad Y_0=0\quad \text{і}\quad 1-\sigma_0-\sigma_1>0.\end{cases}$$

Покажемо, що F взаємно однозначно відображає $\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1}$ на множину

$$F(\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1})=\begin{cases}\left[\dfrac{\left|\tilde{y}_1^0\right|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g\left(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_1^0\right)};\Upsilon\right)\times\Delta_0, & \text{якщо}\quad \dfrac{\left|\tilde{y}_1^0\right|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g\left(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_1^0\right)}<\Upsilon,\\ \left(\Upsilon;\dfrac{\left|\tilde{y}_1^0\right|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g\left(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_1^0\right)}\right]\times\Delta_0, & \text{якщо}\quad \dfrac{\left|\tilde{y}_1^0\right|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g\left(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_1^0\right)}>\Upsilon,\end{cases}$$

де

$$\Delta_0=\begin{cases}\left[\dfrac{\tilde{y}_1^0}{\tilde{y}_0^0};Y_0^0\right), & \text{якщо}\quad \lambda_0<0,\quad \dfrac{\tilde{y}_1^0}{\tilde{y}_0^0}<Y_0^0,\\ \left(Y_0^0;\dfrac{\tilde{y}_1^0}{\tilde{y}_0^0}\right], & \text{якщо}\quad \lambda_0<0,\quad \dfrac{\tilde{y}_1^0}{\tilde{y}_0^0}>Y_0^0,\end{cases}$$

$$Y_0^0=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad Y_0=0,\\ -\infty, & \text{якщо}\quad Y_0=0\quad \text{та}\quad \omega<+\infty,\\ +\infty, & \text{якщо}\quad Y_0=0\quad \text{та}\quad \omega=+\infty.\end{cases}$$

Розглянемо поведінку функції $\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0,s_1)}$ на прямих

$$s_0=ks_1,\quad k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{14}$$

На кожній такій прямій $\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0,s_1)}=\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1,s_1)}$. Крім того, маємо

$$\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1,s_1)}\right)'_{s_1}=\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{s_1g(ks_1,s_1)}\times$$
$$\times\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_1L_1'(s_1)}{L(s_1)}-2ks_1R'\left(|\ln|ks_1^2||\right)\operatorname{sign}\!\big(\ln\left|ks_1^2\right|\big)\right).$$

Це означає, що з урахуванням (13)

$$\operatorname{sign}\!\left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1,s_1)}\right)'_{s_1}=\operatorname{sign}\!\big(y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1)\big).$$

Тому функція $\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1, s_1)}$ строго монотонна на будь-якій прямій вигляду (14). Припустимо, що відображення F не є взаємно однозначним. Тоді

$$\exists\,(p_0,p_1),(q_0,q_1)\in\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1},\quad (p_0,p_1)\neq(q_0,q_1)\colon F(p_0,p_1)=F(q_0,q_1).$$

З урахуванням визначення множини $\widetilde{\Delta}_{Y_0}$, $\widetilde{\Delta}_{Y_1}$ остання рівність означає, що

$$\frac{|p_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(p_0,p_1)}=\frac{|q_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(q_0,q_1)},\qquad \frac{p_0}{p_1}=\frac{q_0}{q_1}=c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{15}$$

Покажемо, що точки (p_0,p_1) і (q_0,q_1) розташовані на одній прямій вигляду (14). Але тоді рівності (15) не виконуються, оскільки функція $\dfrac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_1, cs_1)}$ строго монотонна на цій прямій.

Таким чином, існує обернена функція $F^{-1}\colon F\big(\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1}\big)\to\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1}$. Враховуючи вигляд функції F, маємо

$$F^{-1}(w_0,w_1)=\begin{pmatrix}F_1^{-1}(w_0,w_1)\\ F_0^{-1}(w_0,w_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1^{-1}(w_0,w_1)\\ \dfrac{1}{w_0}\,F_1^{-1}(w_0,w_1)\end{pmatrix}.$$

Так само, як і при доведенні теореми 1 з [6], з урахуванням того, що якобіан функції F не дорівнює нулю при $(s_0,s_1)\in\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1}$, одержуємо, що функція F^{-1} є неперервно диференційовною на $F\big(\widetilde{\Delta}_{Y_0}\times\widetilde{\Delta}_{Y_1}\big)$.

Вважаючи

$$\begin{cases}\dfrac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y')\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))}=\dfrac{|1-\sigma_0-\sigma_1||N_0(t)(M+1)|}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}\,[1+z_1(x)],\\[2ex] \dfrac{y'(t)}{y(t)}=\dfrac{1}{\pi_\omega(t)}\,[1+z_2(x)],\end{cases}$$

де

$$x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,\quad \beta=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \omega=+\infty,\\ -1 & \text{при}\quad \omega<\infty,\end{cases}$$

зводимо рівняння (1) до системи

$$\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dx}=\Bigg[\dfrac{K_1(x,z_1,z_2)|1+z_2|^{\sigma_0}}{(1-\sigma_0-\sigma_1)}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\dfrac{\Psi_1(x,z_1,z_2)L_1'(\Psi_1(x,z_1,z_2))}{L_1(\Psi_1(x,z_1,z_2))}\right)-\\ \qquad -G_1(x)[1+z_1]-K_2(x,z_1,z_2)\left(1+z_1+\dfrac{K_1(x,z_1,z_2)G_0(x)|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1-\sigma_0-\sigma_1|}\right)+\\ \qquad +\dfrac{G_2(x)[1+z_1]}{R(|\ln|\pi_\omega(t)||)}\Bigg]\,\dfrac{\beta}{M+1}\,G_0(x),\\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx}=\beta[1+z_2]\left[\dfrac{K_1(x,z_1,z_2)G_0(x)|1+z_2|^{\sigma_0}}{|1-\sigma_0-\sigma_1|[1+z_1]}-z_2\right],\end{cases} \tag{16}$$

де

$$G_0(x) = \widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||), \qquad G_1(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))N_0'(t(x))}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)N_0(t(x))},$$

$$G_2(x) = \frac{\widetilde{R}''(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)\widetilde{R}(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||))^2},$$

$$\Psi_0(x,z_1,z_2) = F_0^{-1}\left(\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)(M+1)N_0(t(x))}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}\,[1+z_1],\ \frac{1}{\pi_\omega(t(x))}\,[1+z_2]\right),$$

$$\Psi_1(x,z_1,z_2) = F_1^{-1}\left(\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)(M+1)N_0(t(x))}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}\,[1+z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t(x))}\,[1+z_2]\right),$$

$$K_1(x,z_1,z_2) = \frac{\Theta_0(\Psi_0(t(x),z_1,z_2))}{\Theta_0(|\pi_\omega(t(x))|)},$$

$$K_2(x,z_1,z_2) = \frac{\widetilde{R}'(|\ln|\Psi_0(t(x),z_1,z_2)\Psi_1(t(x),z_1,z_2)||)}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}.$$

Отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} K_i(x,z_1,z_2) = 1 \quad \text{рівномірно по} \quad (z_1,z_2) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]. \tag{17}$$

Так само, як і при доведенні теореми 1 з [6], з огляду на (3) зрозуміло, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{\pi_\omega(t)} = Y_0^0.$$

Більш того, з (4) і (5) випливає

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|(M+1)N_0(t)}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)} = \Upsilon.$$

Тому можна вибрати $t_0 \in [a,\omega[$ таким чином, щоб

$$\begin{pmatrix} \dfrac{|1-\sigma_0-\sigma_1|(M+1)N_0(t)}{\widetilde{R}'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}\,[1+z_1(x)] \\ \dfrac{1}{\pi_\omega(t)}\,[1+z_2(x)] \end{pmatrix} \in F\left(\widetilde{\Delta}_{Y_0} \times \widetilde{\Delta}_{Y_1}\right)$$

при $t \in [t_0,\omega[,\ |z_i| \le \dfrac{1}{2}\ \forall i \in \{1,2\}$.

Розглянемо тепер системи диференціальних рівнянь (16) на множині

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D, \quad \text{де} \quad x_0 = \beta\ln|t_0|,$$

$$D = \left\{(z_1,z_2)\colon |z_i| \le \frac{1}{2}\ \forall i \in \{1,2\}\right\}.$$

Перепишемо (16) у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = G_0(x)[A_{11}z_1 + A_{12}z_1 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(z_2)], \\ \dfrac{dz_2}{dx} = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(z_2), \end{cases}$$

де

$$A_{11} = A_{22} = -\frac{\beta(1-M)}{M+1}, \qquad A_{12} = \frac{\beta\sigma_0}{M+1}, \qquad A_{21} = 0,$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \frac{\beta}{1+M}\Bigg((K_1(x, z_1, z_2) - 1)|1 + z_2|^{\sigma_0} - (K_2(x, z_1, z_2) - 1) +$$

$$+ \frac{G_2(x)}{R(|\ln|\pi_\omega(x)||)[1 + z_2]} - \frac{K_1(x, z_1, z_2)}{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}\frac{\Psi_1(x, z_1, z_2)L_1'(\Psi_1(x, z_1, z_2))}{L_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))} -$$

$$- (G_1(x) - M)[1 + z_1] - \frac{G_0(x)K_2(x, z_1, z_2)K_1(x, z_1, z_2)}{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}|1 + z_2|^{\sigma_0}\Bigg),$$

$$R_2(z_2) = \frac{1}{M+1}\,(|1 + z_2|^{\sigma_0} - \sigma_0 z_2 - 1),$$

$$R_3(x, z_1, z_2) = \beta\,\frac{G_0(x)K_1(x, z_1, z_2)}{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}\,\frac{|1 + z_2|^{\sigma_0+1}}{1 + z_1},$$

$$R_4(z_2) = -\beta z_2^2.$$

З (3) і (4) одержуємо

$$\lim_{x\to\infty} G_0(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} G_1(x) = M, \qquad \lim_{x\to\infty} G_2(x) = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

З урахуванням вигляду функції G_0 зрозуміло, що

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G_0(x)dx = \infty.$$

Таким чином, зважаючи на (17), маємо

$$\forall i \in \{2, 4\} \qquad \lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad x : x \in]x_0, +\infty[,$$

і

$$\forall i \in \{1, 3\} \qquad \lim_{x\to+\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D.$$

Характеристичні рівняння матриці A

$$\det|A - \mu E_2| = 0,$$

де E_2 — одинична матриця другого порядку, мають вигляд
$$\mu^2 + \frac{2\beta}{M+1}\mu + \frac{1-M}{M+1} = 0.$$
Згідно з (4) це рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною. Отже, для системи диференціальних рівнянь (16) виконуються всі умови теореми 2.8 з [7]. Згідно з цією теоремою система (16) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty) \to \mathrm{R}^2,\ x_1 \geq x_0$, який прямує до нуля, при $x \to +\infty$. Йому відповідає розв'язок y рівняння (1), який допускає асимптотичні зображення (6) при $t \uparrow \omega$. Завдяки цим зображенням і (1) y є $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язком. При цьому у випадку, коли $\omega = +\infty$, для $M \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ буде існувати двопараметрична сім'я таких розв'язків, а при $M \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ — однопараметрична сім'я. У випадку, коли $\omega < +\infty$, для $M \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ існуватиме однопараметрична сім'я.

Проілюструємо отримані результати на прикладі. Розглянемо на проміжку $[t_0; +\infty[$, $t_0 > 0$, диференціальне рівняння
$$y'' = mt^{-1-\sigma_0} \exp(k \ln^\gamma t)\, |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \exp\big((|\ln |yy'||)^\mu\big), \tag{18}$$
де $m, k \in]0, +\infty[,\ \gamma, \mu \in (0; 1),\ \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R},\ \sigma_0 + \sigma_1 \neq 1,\ \sigma_1 \neq 1$. Це рівняння є рівнянням (1), у якому $\alpha_0 = \operatorname{sign} m = 1,\ p(t) = mt^{-1-\sigma_0} \exp(k \ln^\gamma t),\ \varphi_0 = |y|^{\sigma_0},\ \varphi_1 = |y|^{\sigma_1},\ R(z) = z^\mu$. При цьому функція φ_0 задовольняє умову S. Будемо розглядати випадок, коли $\omega = Y_0 = Y_1 = +\infty$. Застосуємо до рівняння (18) теорему. Функції I_0 та N_0 з теореми задовольняють такі асимптотичні співвідношення при $t \to +\infty$:
$$I_0(t) = \frac{m}{\gamma k} \exp(k \ln^\gamma t) \ln^{1-\gamma} t[1 + o(1)], \qquad N_0(t) = m \exp(k \ln^\gamma t).$$
Перевіримо виконання умови (4), яка набуває вигляду
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{mk\gamma t \ln^{\gamma-1} \exp(k \ln^\gamma t)}{\mu m t \ln^{\mu-1} \exp(k \ln^\gamma t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{k\gamma}{\mu} \ln^{\gamma-\mu} t.$$
Отримуємо, що ця умова виконується у випадку, коли $\mu = \gamma$. Тоді
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{k\gamma}{\mu} \ln^{\gamma-\mu} t = k$$
і рівняння (18) буде мати вигляд
$$y'' = mt^{-1-\sigma_0} \exp(k \ln^\gamma t)\, |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \exp\big((|\ln |yy'||)^\gamma\big). \tag{19}$$
Для існування у рівняння (19) $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, +\infty)$-розв'язків необхідно і достатньо виконання умови
$$(1 - \sigma_0 - \sigma_1)(k + 1) > 0.$$
Більш того, кожний такий розв'язок має асимптотичні зображення при $t \to +\infty$
$$\frac{(y'(t))^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{\exp((|\ln |y(t)y'(t)||)^\gamma)} = \frac{|(1 - \sigma_0 - \sigma_1)(k + 1)m|}{\gamma} |\exp(k \ln^\gamma t)| \ln^{1-\gamma} t[1 + o(1)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t}\, [1 + o(1)].$$
При цьому буде існувати двопараметрична сім'я таких розв'язків при $k \in (0; 1)$ і однопараметрична сім'я при $k \in (1; +\infty)$.

Висновок. У цій роботі для розв'язків, що є близькими до лінійних функцій, отримано необхідні й достатні умови існування, асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega,$ а також визначено їхню кількість. Результати дослідження проілюстровано на класі диференціальних рівнянь більш конкретного вигляду.

Література

1. E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508** (1976).
2. В. М. Евтухов, Л. А. Кириллова, *Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения, **41**, № 8, 1053 – 1061 (2005).
3. M. A. Bilozerova, V. M. Evtukhov, *Asymptotic representations of solutions of the differential equation* $y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i(y^{(i)})$, Miskolc Math. Notes, **13**, № 2, 249 – 270 (2012).
4. М. А. Белозерова, *Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным*, Нелін. коливання, **12**, № 1, 3 – 15 (2009).
5. В. М. Евтухов, Л. И. Кусик, *Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения, **49**, № 4, 424 – 438 (2013).
6. M. A. Belozerova, G. A. Gerzhanovskaya, *Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order*, Mem. Differ. Equ. Math. Phys., **77**, 1 – 12 (2019).
7. В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **62**, № 1, 52 – 80 (2010).

Одержано 14.01.22,
після доопрацювання — 03.02.22