УДК 517.929

СЛАБКО ЗБУРЕНА ІМПУЛЬСНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ У РЕЗОНАНСНОМУ ВИПАДКУ*

І. А. Бондар

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: holovatska.iv@gmail.com

О. П. Страх

Сум. держ. ун-т, Суми, Україна
вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007, Україна
e-mail: o.strakh@dcs.sumdu.edu.ua

For the weakly perturbed impulsive boundary-value problem for systems of integro-differential equations, conditions for the existence of its solutions and the structure of these solutions are established. The sufficient condition for the existence of solutions of these problems are investigated with the help of the theory of orthoprojectors and pseudoinverse Moore – Penrose matrices.

Встановлено умови існування та структуру розв'язків слабко збуреної імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь. За допомогою теорії ортопроєкторів і псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць досліджено достатню умову існування розв'язків таких задач.

1. Постановка задачі. Специфіка розгляду відповідних задач для інтегро-диференціальних систем полягає у тому, що їхня лінійна частина є оператором, який не має оберненого. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких операторних рівнянь і крайових задач для них і призводить до того, що розв'язок крайової задачі для таких систем складається з умов розв'язності як самої операторної системи, так і крайової задачі для неї.

Для дослідження існування розв'язків таких задач можна використати апарат теорії псевдообернених матриць і операторів, розвинений у працях А. М. Самойленка, О. А. Бойчука, С. А. Кривошеї та в роботах [1 – 6].

Зокрема, в роботі [3] встановлено достатню умову існування розв'язку слабко збуреної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь у вигляді частини ряду Лорана з $j \geq -1$. Якщо ж ця умова не виконується, то розв'язку відповідної крайової задачі у такому вигляді не існує, але він може існувати у вигляді частини ряду Лорана з $j \geq -2$. Також цю теорію можна узагальнити для схожих задач на часовій шкалі, як було показано в [7], де, використовуючи розроблений апарат дослідження інтегро-диференціальних рівнянь, отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язку слабко збуреної системи лінійних інтегро-динамічних рівнянь на проміжку $[a, b]$ довільної часової шкали.

* Стаття містить результати досліджень проєкту № 2020.02/0089 за грантової підтримки Національного фонду досліджень України.

Таким чином, розглянемо імпульсну крайову задачу для систем інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\big] ds =$$
$$= f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b \Big[K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)\Big] ds, \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

$$\Delta E_i x\mid_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon A_{1i} x(\tau_i - 0), \quad i = 1, \dots, p,$$
$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{R}^q. \tag{2}$$

Будемо використовувати припущення й позначення з [1, 6], де $A(t),\ B(t),\ \Phi(t),\ K(t,s),$ $K_1(t,s)$ — $(m\times n)$-, $(m\times n)$-, $(n\times m)$-, $(n\times n)$-, $(n\times n)$-вимірні, відповідно, матриці, компоненти яких визначені у просторі $L_2[a,b]$; вектор-стовпці матриці $\Phi(t)$ є лінійно незалежними на $[a,b]$; $(n\times 1)$-вимірний векторний функціонал $f(t)$ належить $L_2[a,b]$; $E_i,$ $S_i,\ A_{1i}$ — $(k_i\times n)$-вимірні матриці констант, де $\operatorname{rank}(E_i+S_i) = k_i < n$, тобто відповідні компоненти розв'язку імпульсної системи допускають однозначне продовження через точки розриву

$$\Delta E_i x\Big|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0));$$

γ_i — k_i-вимірний вектор-стовпець констант, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$;

$$a < \tau_1 < \ldots < \tau_i \ldots < \tau_p < b \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, p;$$

$\ell = \operatorname{col}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q)$ — лінійний обмежений q-вимірний векторний функціонал, $\alpha =$ $= \operatorname{col}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$.

Шуканий розв'язок $x(t)$ визначено у просторі n-вимірних абсолютно неперервних диференційовних вектор-функцій

$$x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}), \qquad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0].$$

Норми у просторах $D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}),\ L_2[a,b]$, і $C(0,\varepsilon_0]$ вводимо у стандартному вигляді [2, 8].

Спочатку розглянемо нетерову $(n \neq p)$ крайову задачу (1), (2) та отримаємо умову біфуркації розв'язку цієї задачі з точки $\varepsilon = 0$.

Паралельно з крайовою задачею (1), (2), розглянемо породжуючу задачу $(\varepsilon = 0)$:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{3}$$

$$\Delta E_i x\mid_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \quad i = 1, \dots, p,$$
$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \alpha \in \mathbb{R}^q. \tag{4}$$

Припустимо, що крайова задача (3), (4) є нерозв'язною при будь-яких неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$ і $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

Імпульсну умову можна записати як внутрішню крайову умову (“interface boundary conditions” [9]), використовуючи k-вимірний лінійний обмежений вектор-функціонал [10]:

$$\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p) : \quad D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^k,$$

$$\varphi_i : D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^{k_i},$$

$$k := k_1 + k_2 + \ldots + k_p, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

де

$$\begin{cases} \varphi_1 x := E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + S_1) x(\tau_1-), \\ \varphi_2 x := E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + S_2) x(\tau_2-), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_p x := E_p x(\tau_p+) - (E_p + S_p) x(\tau_p-) \end{cases}$$

і

$$\varphi x(\cdot, \varepsilon) = \gamma + \varepsilon A_1 x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{R}^k,$$

$\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p) \in \mathbb{R}^k$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, $A_1 = [A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1i}, \ldots, A_{1p}]$ — $(k \times np)$-вимірна блочна діагональна матриця, A_{1i} — $(k_i \times n)$-вимірна матриця.

Введемо обмежений лінійний $(k+q)$-вимірний векторний функціонал

$$\mathfrak{L} := \begin{bmatrix} \varphi \\ \ell \end{bmatrix} : \quad D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^{k+q}$$

і запишемо імпульсну умову в (1) разом з крайовою умовою (2) у вигляді

$$\mathfrak{L} x(\cdot, \varepsilon) = \delta + \varepsilon \mathfrak{L}_1 x(\cdot, \varepsilon),$$

де

$$\delta := \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+q}, \qquad \mathfrak{L}_1 := \begin{bmatrix} A_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} : \quad D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^{k+q}$$

— обмежений лінійний $(k+q)$-вимірний векторний функціонал.

Таким чином, замість задачі (1), (2) отримаємо слабко збурену крайову задачу для інтегро-диференціальної системи, в якій крайова умова містить у собі імпульсну дію на невідому шукану функцію $x(t)$:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b \Big[K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)\Big] ds, \tag{5}$$

$$\mathfrak{L} x(\cdot, \varepsilon) = \delta + \varepsilon \mathfrak{L}_1 x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{k+p}, \tag{6}$$

$$t \in [a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}, \quad \tau_i \in (a,b), \quad i = 1, \ldots, p, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_*].$$

Тоді згідно з [1] сформулюємо теорему розв’язності відповідної породжуючої крайової задачі.

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \leq \min(k+q, r_1)$. *Однорідна* $(f(t) = 0, \delta = 0)$ *крайова задача для*

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t), \tag{7}$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot, \varepsilon) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q} \tag{8}$$

має r_2 $(r_2 = r_1 - n_2)$ *лінійно незалежні розв'язки*

$$x(t, c_{r_2}) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}} c_{r_2}, \quad c_{r_2} \in \mathbb{R}^{r_2},$$

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D, \quad r_2 = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q.$$

Неоднорідна крайова задача (7), (8) є розв'язною тоді та тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in L_2[a,b]$ *і* $\delta \in \mathbb{R}^{k+q}$ *задовольняють умови*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \qquad P_{Q^*_{d_2}} (\delta - \mathfrak{L}(F(\cdot))) = 0, \tag{9}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \qquad d_2 = k + q - \operatorname{rank} Q.$$

У цьому випадку крайова задача (7), (8) має r_2*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}} c_{r_2} + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\delta - \mathfrak{L}(F(\cdot))) + F(t),$$

де $Q = \mathfrak{L} X_{r_1}(\cdot)$ — $((k+q) \times r_1)$*-вимірна матриця, матриця* Q^+ *є псевдооберненою (за Муром–Пенроузом) до матриці* Q, $F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}$, $X_{r_1}(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}}$ — $(n \times r_1)$*-вимірна матриця,*

$$D = \left[I_m - \int\limits_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)] ds, - \int\limits_a^b A(s) ds \right]$$

— $(m \times (m+n))$*-вимірна матриця.*

Тут

$$\Psi(t) = \int\limits_a^t \Phi(s) ds, \qquad \Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n], \qquad \tilde{b} = \int\limits_a^b [A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)] ds,$$

P_D, P_{D^*} — $((m+n) \times (m+n))$-, $(m \times m)$-вимірні, відповідно, матриці (ортопроєктори), які проєктують простори $\mathbb{R}^{m+n}$ і $\mathbb{R}^m$ на $N(D) = \ker D$ і $N(D^*) = \ker D^* = \operatorname{coker} D$, відповідно. Це означає, що $P_D : \mathbb{R}^{m+n} \to N(D)$, $P_D^2 = P_D = P_D^*$ і $P_{D^*} : \mathbb{R}^m \to N(D^*)$, $P_{D^*}^2 = P_{D^*} = P_{D^*}^*$. Матриця $P_{D_{r_1}}$ $(P_{D^*_{d_1}})$ складається з повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці $P_D(P_{D^*})$; P_Q, P_{Q^*} — $(r_1 \times r_1)$-, $((k+q) \times (k+q))$-вимірні, відповідно, матриці (ортопроєктори), що проєктують $\mathbb{R}^{r_1}$ і $\mathbb{R}^{k+q}$ на $N(Q) = \ker Q$ і $N(Q^*) = \ker Q^* = \operatorname{coker} Q$, відповідно, тобто, $P_Q : \mathbb{R}^{r_1} \to N(Q)$, $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$ і $P_{Q^*} : \mathbb{R}^{k+q} \to N(Q^*)$, $P_{Q^*}^2 = P_{Q^*} = P_{Q^*}^*$. Матриця $P_{Q_{r_2}}$ $(P_{Q^*_{d_2}})$ складається з повної системи r_2 (d_2) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці $P_Q(P_{Q^*})$.

Припустимо, що задача (7), (8) є нерозв'язною (тобто не виконується умова (9)). Питання полягає в тому, чи можна крайову задачу (7), (8) зробити розв'язною шляхом уведення лінійного збурення і, якщо можна, то якими повинні бути збурені матриці $K(t,s),\ K_1(t,s)$, щоб крайова задача (5), (6) була скрізь розв'язною. Наша мета полягає у встановленні умов існування та алгоритму побудови структури множини розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5), (6). Основний метод, який використовується для аналізу поставленого завдання ґрунтується на теорії псевдообернених матриць і методі Вішика – Люстерніка [11].

Будемо шукати розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5), (6) у вигляді частини ряду Лорана при $k \geq -2$:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t,c_k) = \frac{x_{-2}(t,c_{-2})}{\varepsilon^2} + \frac{x_{-1}(t,c_{-1})}{\varepsilon} + x_0(t,c_0) + \varepsilon x_1(t,c_1) + \ldots, \qquad (10)$$

який збігається при фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$.

2. Основний результат. Підставляючи ряд (10) у крайову задачу (5), (6) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, приходимо до *ітераційного процесу*, на першому кроці якого при ε^{-2} отримуємо однорідну крайову задачу

$$\dot{x}_{-2}(t,c_{-2}) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x_{-2}(s,c_{-2}) + B(s)\dot{x}_{-2}(s,c_{-2})]ds = 0,$$

$$\mathfrak{L}x_{-2}(\cdot,c_{-2}) = 0.$$

Згідно з теоремою 1 [1] однорідна крайова задача завжди розв'язна та має r_2-параметричну $(r_2 = r_1 - n_2)$ сім'ю розв'язків

$$x_{-2}(t,c_{-2}) = X_{r_2}(t)c_{-2}, \qquad (11)$$

де r_2-вимірний вектор констант $c_{-1} \in R^{r_2}$, який визначимо на наступному кроці, $X_{r_2}(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_{r_2}}$ — $(n \times r_2)$-вимірна матриця.

На другому кроці, при ε^{-1}, отримуємо неоднорідну крайову задачу

$$\dot{x}_{-1}(t,c_{-1}) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x_{-1}(s,c_{-1}) + B(s)\dot{x}_{-1}(s,c_{-1})]ds = f_{-1}(x_{-2}(t,c_{-2})), \qquad (12)$$

$$\mathfrak{L}x_{-1}(\cdot,c_{-1}) = \mathfrak{L}_1 x_{-2}(\cdot,c_{-2}), \qquad (13)$$

де

$$f_{-1}(x_{-2}(t,c_{-2})) = \int_a^b \big[K(t,s)x_{-2}(s,c_{-2}) + K_1(t,s)\dot{x}_{-2}(s,c_{-2})\big]ds.$$

Неоднорідна крайова задача (12), (13) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_{-1} = 0, \qquad P_{Q^*_{d_2}}\mathfrak{L}F_{-1}(\cdot) = 0,$$

де

$$\tilde{b}_{-1} = \int_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_{-1}(s) + B(s)f_{-1}(s)\Big]ds =$$

$$= \left(\int_a^b \Big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\Big]ds\right)c_{-2}, \quad c_{-2} \in R^{r_2},$$

$$L(t) = \int_a^b \Big[K(t,s)X_{r_2}(s) + K_1(t,s)\dot{X}_{r_2}(s)\Big]ds,$$

$$\tilde{L}(t) = \int_a^t L(s)ds,$$

$$F_{-1}(t) = \tilde{f}_{-1}(t) + \Psi_0(t)\bar{B}_0^+\tilde{b}_{-1} = \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t)\bar{B}_0^+\int_a^b \Big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\Big]ds\right)c_{-2},$$

$$\bar{B}_0 := P_{D_{d_1}^*}\left(\int_a^b \left[A(s)\int_a^s\int_a^b \Big[K(\tau,s)X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s)\dot{X}_{r_1}(s)\Big]dsd\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B(s)\int_a^b \Big[K(s,\tau)X_{r_1}(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{X}_{r_1}(\tau)\Big]d\tau\right]ds\right),$$

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*}\displaystyle\int_a^b \big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\big]ds \\ P_{Q_{d_2}^*}\mathfrak{L}\left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t)\bar{B}_0^+\displaystyle\int_a^b \big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\big]ds\right) \end{bmatrix},$$

$L(t),\ \bar{B}_0,\ B_0$ — $(n \times r_2)$-, $(d_1 \times r_1)$-, $((d_1 + d_2) \times r_2)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a;b]$. Тоді одержуємо систему рівнянь відносно $c_{-2} \in R^{r_2}$:

$$P_{D_{d_1}^*}\left(\int_a^b \big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\big]ds\right)c_{-2} = 0,$$

$$P_{Q_{d_2}^*}\mathfrak{L}\big(\tilde{L}(\cdot) + \Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+\int_a^b \big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\big]ds\big)c_{-2} = 0,$$

яка дозволяє записати рівнозначну алгебраїчну систему

$$B_0c_{-2} = 0,$$

що має ненульовий розв'язок $(c_{-2} \neq 0)$ тоді й тільки тоді, коли $P_{B_0} \neq 0$:

$$c_{-2}^{(0)} = P_{B_0} c_{-2}^{(0)} = P_{B_0} c_{-2} \in N(B_0).$$

На третьому кроці, при ε^0, отримуємо неоднорідну крайову задачу

$$\dot{x}_0(t, c_0) - \Phi(t) \int_a^b \big[A(s)x_0(s, c_0) + B(s)\dot{x}_0(s, c_0)\big] ds = f_{-1}(t), \tag{14}$$

$$\mathfrak{L}x_0(\cdot, c_0) = \delta + \mathfrak{L}_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}), \tag{15}$$

де

$$f_{-1}(t) = f(t) + \int_a^b \Big[K(t, s)x_{-1}(s, c_{-1}) + K_1(t, s)\dot{x}_{-1}(s, c_{-1})\Big] ds.$$

Крайова задача (14), (15) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли неоднорідності $f_{-1}(t) \in \in L_2[a; b]$ і $\alpha \in \mathbb{R}^p$ задовольняють умови

$$P_{D_{d_1}^*} \tilde{b}_{-1} = 0, \quad P_{Q_{d_2}^*} (\delta + \mathfrak{L}_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}) - \mathfrak{L}F_{-1}(\cdot)) = 0, \tag{16}$$

де

$$F_{-1}(t) = \tilde{f}_{-1}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \tilde{b}_{-1},$$

$$\tilde{b}_{-1} = \int_a^b \big[A(s)\tilde{f}_{-1}(s) + B(s) f_{-1}(s)\big] ds, \quad \tilde{f}_{-1}(t) = \int_a^t f_{-1}(s) ds.$$

Підставимо (11) у (16) і одержимо алгебраїчну систему щодо c_{-1}:

$$B_0 c_{-1} = g_{-1}, \tag{17}$$

де

$$g_{-1} := \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \tilde{b} \\ P_{Q_{d_2}^*} (\delta - \mathfrak{L}(\tilde{f}(\cdot) - \Psi_0(\cdot) \bar{B}_0^+ \tilde{b})) \end{bmatrix}.$$

Система (17) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g_{-1} = 0, \tag{18}$$

і має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків $c_{-1} = B_0^+ g_{-1} + P_{B_0} \tilde{c},\ \tilde{c} \in \mathbb{R}^{r_2}$. Виконання умови (18) перевірити важко, але якщо виконується умова

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix} = 0, \tag{19}$$

то система (17) має хоча б один розв'язок вигляду $c_{-1} = B_0^+ g_{-1},\ c_{-1} \in \mathbb{R}^{r_2}$. Тут B_0^+ — $(r_2 \times (d_1 + d_2))$-вимірна матриця, псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до B_0. Таким чином, якщо має місце рівність (19), то крайова задача (14), (15) має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_0(t,c_0) = X_{r_2}(t)c_0 + F_{-1}(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}(F_{-1}(\cdot)),$$

де c_0 — r_2-вимірний вектор констант, який визначимо на наступному кроці.

При ε^1 одержимо крайову задачу

$$\dot{x}_1(t,c_1) - \Phi(t)\int\limits_a^b [A(s)x_1(s,c_1) + B(s)\dot{x}_1(s,c_1)]ds = f_0(t), \tag{20}$$

$$\mathfrak{L}x_1(\cdot,c_1) = \mathfrak{L}_1 x_0(\cdot,c_0), \tag{21}$$

де

$$f_0(t) = \int\limits_a^b \Big[K(t,s)x_0(s,c_0) + K_1(t,s)\dot{x}_0(s,c_0)\Big]ds.$$

Умова розв'язності задачі (20), (21) має вигляд

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_0 = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}}(\mathfrak{L}_1 x_0(\cdot,c_0) - \mathfrak{L}F_0(\cdot)) = 0, \tag{22}$$

де

$$F_0(t) = \tilde{f}_0(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b}_0,$$

$$\tilde{b}_0 = \int\limits_a^b [A(s)\tilde{f}_0(s) + B(s)f_0(s)]ds, \quad \tilde{f}_0(t) = \int\limits_a^t f_0(s)ds.$$

Підставимо у рівність (22) вираз для породжуючого розв'язку $x_0(t,c_0)$:

$$x_0(t,c_0) = X_{r_2}(t)c_0 + F_{-1}(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}F_{-1}(\cdot)$$

і отримаємо схожу до (17) алгебраїчну систему

$$B_0 c_0 = g_0, \tag{23}$$

яка є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$P_{B_0^*}g_0 = 0.$$

Тут

$$g_0 := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}}\displaystyle\int_a^b [A(s)\tilde{M}_{-1}(s) + B(s)M_{-1}(s)]ds \\ P_{Q^*_{d_2}}\mathfrak{L}\Big(\Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+\displaystyle\int_a^b [A(s)\tilde{M}_{-1}(s) + B(s)M_{-1}(s)]ds - \tilde{M}_{-1}(\cdot)\Big) \end{bmatrix},$$

$$M_{-1}(t) = \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\Big(F_{-1}(s) - \Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}F_{-1}(\cdot)\Big) +$$

$$+ K_1(t,s)\Big(\dot F_{-1}(s) - \dot\Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}\dot F_{-1}(\cdot)\Big)\Big]ds,$$

$$\tilde M_{-1}(t) = \int\limits_a^t M_{-1}(s)ds.$$

Таким чином, система (23) є розв'язною, якщо виконується умова (19). Тоді один із розв'язків системи (23) має вигляд $c_0 = B_0^+ g_0,\ c_0 \in \mathbb{R}^{r_2}$. Якщо виконується умова (19), то крайова задача (20), (21) має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_1(t,c_1) = X_{r_2}(t)c_1 + F_0(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}F_0(\cdot),$$

де c_1 — r_2-вимірний вектор констант, який буде визначений на наступному кроці цього ітераційного процесу.

Легко показати, що за допомогою індукції рівняння (19) є умовою розв'язності та крайової задачі, яку отримуємо на k-му кроці ітераційного процесу:

$$\dot x_k(t,c_k) - \Phi(t)\int\limits_a^b [A(s)x_k(s,c_k) + B(s)\dot x_k(s,c_k)]ds = f_{k-1}(t), \tag{24}$$

$$\mathfrak{L}x_k(\cdot,c_k) = \mathfrak{L}_1 x_{k-1}(\cdot,c_{k-1}), \tag{25}$$

де

$$f_{k-1}(t) = \int\limits_a^b \Big[K(t,s)x_{k-1}(s,c_{k-1}) + K_1(t,s)\dot x_{k-1}(s,c_{k-1})\Big]ds.$$

Нехай

$$\tilde b_{k-1} = \int\limits_a^b [A(s)\tilde f_{k-1}(s) + B(s)f_{k-1}(s)]ds, \qquad \tilde f_{k-1}(t) = \int\limits_a^t f_{k-1}(s)ds.$$

Тоді крайова задача (24), (25) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{Q^*_{d_1}}\tilde b_{k-1} = 0, \quad P_{D^*_{d_2}}(\mathfrak{L}_1 x_{k-1}(\cdot,c_{k-1}) - \mathfrak{L}F_{k-1}(\cdot)) = 0,$$

і має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_k(t,c_k) = X_{r_2}(t)c_k + F_{k-1}(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}F_{k-1}(\cdot), \tag{26}$$

$$F_{k-1}(t) = \tilde f_{k-1}(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde b_{k-1},$$

де c_k — r_2-вимірний вектор констант, який визначимо на наступному кроці. Отримуємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_k = g_k, \tag{27}$$

яка є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g_k = 0,$$

де

$$g_k := \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \tilde{W}_{k-1} \\ P_{Q_{d_2}^*} \mathfrak{L}\Big(\Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+ \tilde{W}_{k-1} - \tilde{M}_{k-1}(\cdot)\Big) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{W}_{k-1} = \int\limits_a^b \big[A(s)\tilde{M}_{k-1}(s) + B(s)M_{k-1}(s)\big]ds,$$

$$M_{k-1}(t) = \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\big(F_{k-1}(s) - \Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}F_{k-1}(\cdot)\big) +$$
$$+ K_1(t,s)\big(\dot{F}_{k-1}(s) - \dot{\Psi}_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\mathfrak{L}\dot{F}_{k-1}(\cdot)\big)\Big]ds,$$

$$\tilde{M}_{k-1}(t) = \int\limits_a^t M_{k-1}(s)ds.$$

Тоді при виконанні умови (19) один із розв'язків системи (27) має вигляд

$$c_k = B_0^+ g_k, \qquad c_k \in \mathbb{R}^{r_2}, \quad k = -2.$$

Таким чином, крайова задача (24), (25) є розв'язною, якщо виконується умова (19), і має розв'язок (26).

Справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що слабко збурена імпульсна крайова задача (1), (2) задовольняє вказані вище умови таким чином, що породжуюча крайова задача (5), (6) є нерозв'язною при будь-яких* $f(t) \in L_2[a,b],\ \alpha \in \mathbb{R}^p$.

Якщо виконуються умови

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix} = 0,$$

то крайова задача (1), (2) буде мати хоча б один розв'язок у вигляді ряду (10), який збігається при фіксованому $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*]$.

Зауваження. Якщо $P_{B_0} = 0$, то операторні рівняння типу (27) на кожному кроці ітераційного процесу будуть n-нормальними та однозначно розв'язними [12]. Тоді при виконанні умови $P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix} = 0$ крайова задача (1), (2) буде мати єдиний розв'язок у вигляді ряду (10).

Література

1. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).
2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, VSP, Utrecht, Boston (2004); 2 nd ed., Walter de Gruyter GmbH & Co KG, (2016).
3. I. Golovatska, *Weakly perturbed boundary-value problems of integro-differential equations*, Tatra Mt. Math. Publ., **54**, 61 – 71 (2013).
4. I. Bondar, *Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action*, Tatra Mt. Math. Publ., **63**, 73 – 87 (2015); DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.
5. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465 – 476 (2017); ***English translation:*** *J. Math. Sci.*, **238**, № 3, 224 – 235 (2019).
6. І. А. Бондар, *Слабконелінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь із імпульсним впливом. Критичний випадок другого порядку*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 147 – 164 (2019); ***English translation:*** *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **249**, № 4, 553 – 572 (2020); DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-04958-z.
7. І. А. Бондар, О. Б. Нестеренко, О. П. Страх, *Слабкозбурені системи лінійних інтегро-динамічних рівнянь на часовій шкалі*, Нелін. коливання, **24**, № 1, 3 – 16 (2021).
8. N. V. Azbelev, N. P. Maksimov, L. F. Rahmatullina, *Introduction to theory of functional differential equations* [in Russian], Moscow, Nauka (1991).
9. A. Zettl, *Adjoint and self-adjoint BVP's with interface conditions*, SIAM J. Appl. Math., **16**, № 4 (1968).
10. I. Bondar, *Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action*, Tatra Mt. Math. Publ., **63**, 73 – 87 (2015); DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.
11. M. I. Vishik, I. A. Lyusternik, *Solution of some perturbation problems for matrices, self-adjoint and nonself-adjoint differential equations*, Uspekhi Mat. Nauk, **15**, № 3, 3 – 80 (1960).
12. В. П. Журавльов, М. П. Фомін, *Слабкозбурені інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 184 – 199 (2020).

Одержано 30.11.21,
після доопрацювання — 29.03.22