УДК 517.983

БІФУРКАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов, М. П. Фомін

Житомир. Поліс. нац. ун-т
бульв. Старий, 7, Житомир, 10008, Україна
e-mail: vfz2008@ukr.net
npfomin109@gmail.com

We consider weakly perturbed boundary-value problems for integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces. We obtain conditions of bifurcation of solutions of weakly perturbed boundary-value problems for integro-differential equations in Banach spaces from the point $\varepsilon = 0$. We propose a convergent iterative procedure for determination of at least one solution in the form of the power series $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ in ε.

Розглянуто слабко збурені крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром у банахових просторах. Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабко збурених крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах. Запропоновано збіжну ітераційну процедуру знаходження принаймні одного розв'язку у вигляді ряду $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ за степенями ε.

1. Вступ. Ця робота є продовженням досліджень з вивчення умов розв'язності та побудови загальних розв'язків слабко збурених інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах, які було розпочато в [1]. При дослідженні умов біфуркації та зображення у загальному вигляді розв'язків слабко збурених інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром у банахових просторах у вигляді ряду Лорана використовувався метод Вішика – Люстерника [2].

О. А. Бойчук і Є. В. Панасенко [3], використовуючи підхід до дослідження диференціальних систем у банахових просторах [4], отримали умови виникнення розв'язків слабко збурених крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у банахових просторах.

Слабко збурені системи інтегро-диференціальних рівнянь досліджено в [5], а крайові задачі для не всюди розв'язних сингулярних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах вивчено в [6].

Розроблений у [7] загальний підхід до дослідження слабко збурених операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у лінійній частині у банахових просторах широко застосовується при аналізі різних типів слабко збурених рівнянь. Так, у [8] досліджено слабко збурені інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах, а в [1] — слабко збурені інтегро-диференціальні рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах.

Цю роботу присвячено дослідженню умов існування та побудови розв'язків слабко збурених крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром у банахових просторах із урахуванням специфіки, притаманної цим рівнянням.

2. Постановка задачі. Нехай $\mathbf{B},\ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2$ — банахові простори, $\mathcal{I} = [a,b]$ — скінченний проміжок.

Розглянемо слабко збурену крайову задачу для інтегро-диференціального рівняння

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - \int\limits_a^b \left[\sum_{i=1}^n P_i(t)W_i(s)z(s) + \sum_{i=1}^n Q_i(t)V_i(s)\dot{z}(s)\right] ds =$$

$$= f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b [K(t,s)z(s) + K_1(t,s)\dot{z}(s)]ds, \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon \ell_1 z(\cdot). \tag{2}$$

Використовуючи позначення [9, с. 1470]

$$P(t) = [P_1(t), \ldots, P_n(t)], \quad Q(s) = [Q_1(t), \ldots, Q_n(t)],$$
$$W(t) = \mathrm{col}\,[W_1(t), \ldots, W_n(t)], \quad V(s) = \mathrm{col}\,[V_1(t), \ldots, V_n(t)],$$

крайову задачу (1), (2) запишемо у вигляді

$$\dot{z}(t) - \int\limits_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)]ds =$$

$$= f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b [K(t,s)z(s) + K_1(t,s)\dot{z}(s)]ds, \tag{3}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon \ell_1 z(\cdot), \tag{4}$$

де оператор-функції $P(t)$ і $Q(t)$ діють із $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервні з нормами $|||P||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|P(t)\|_{\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2} < \infty$ і $|||Q||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|Q(t)\|_{\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_2} < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ та $V(t)$ діють із $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||W||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|W(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_1} < \infty$ і $|||V||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|V(t)\|_{\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}_1} < \infty$, вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $\mathcal{I}$ у $\mathbf{B}_2$: $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) := \{f(\cdot)\colon \mathcal{I}\to\mathbf{B}_2,\ |||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|f(t)\|\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій зі значеннями у $\mathbf{B}_2$, оператор-функції $K(t,s)$ і $K_1(t,s)$ визначені у квадраті $\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ і діють із банахового простору $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_2$ за кожною змінною, сильно неперервні за сукупністю змінних $t,\ s$ з нормами $|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}}\|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_2} < \infty$ і $|||K_1||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}}\|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_2} < \infty$, $\ell\colon \mathbf{C}^1(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\to\mathbf{B}$ — лінійний векторний функціонал, $\alpha\in\mathbf{B}$, $\varepsilon << 1$ — малий параметр.

Розв'язком $z(t)$ крайової задачі (1), (2) будемо називати таку вектор-функцію $z(t)$, яка задовольняє рівняння (1) і крайову умову (2). При цьому $z(t)\in\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, $\dot{z}(t)\in\mathbf{C}^1(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, де $\mathbf{C}^1(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервно-диференційовних вектор-функцій з нормою $|||z||| = \sum_{k=0}^1 \sup\limits_{t\in\mathcal{I}} \left\|z^{(k)}(t)\right\|_{\mathbf{B}_2}$, де $z^{(k)}(t)$ — k-та похідна від $z(t)$. Похідну $\dot{z}(t)$ розуміємо у сенсі [4, с. 140].

Припустимо, що породжуюча крайова задача

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - \int\limits_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)]ds = f(t), \tag{5}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \tag{6}$$

яку отримуємо з крайової задачі (3), (4), при $\varepsilon = 0$ не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$.

Мета цієї роботи: чи можна за допомогою лінійного збурення звести крайову задачу (3), (4) до розв'язної? А якщо можна, то якими повинні бути складові збурених оператор-функцій $K(t,s),\ K_1(t,s)$ в інтегро-диференціальній системі (3) та вектор-функціонала ℓ_1 у крайовій умові (4), щоб вона стала розв'язною при будь-яких неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$?

Труднощі дослідження крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь полягають у тому, що інтегро-диференціальний оператор не має оберненого, тобто лінійне рівняння з таким оператором не є завжди розв'язним [10, 11]. Тому для розв'язання цієї задачі будемо використовувати теорію узагальненого обернення операторів [12] і, зокрема, узагальненого обернення інтегральних [13] та інтегро-диференціальних [14] операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах, а також теорему про умови існування та побудови загальних розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах [9].

3. Попередні відомості. Для розв'язання поставленої задачі необхідно отримати умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків породжуючої крайової задачі (5), (6).

Умови існування та зображення загального розв'язку інтегро-диференціального рівняння (5) досліджено в [9, 14], але, враховуючи специфіку поставленої задачі, стисло наведемо необхідний матеріал.

Виконуючи заміну $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)ds + c_0, \quad c_0 \in \mathbf{B}_2,$$

зведемо інтегро-диференціальне рівняння (5) до інтегрального рівняння

$$y(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)y(s)ds = g(t), \tag{7}$$

де

$$M(t) = \big[P(t), Q(t)\big], \quad N(s) = \operatorname{col}\Big[\widetilde{W}(s), V(s)\Big],$$

$$\widetilde{W}(s) = \int\limits_s^b W(\tau)d\tau, \quad W = \widetilde{W}(a), \quad g(t) = f(t) + P(t)Wc_0. \tag{8}$$

Нехай $D = I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1} - A,\ A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds,\ D\colon \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді існують обмежені проєктори [15] $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to \to N(D)$ на нуль-простір $N(D)$ і $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to Y_D$ на підпростір $Y_D = \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \ominus R(D)$ оператора $D;\ D^-$ — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора D [12].

Надалі клас лінійних обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють із банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$ будемо позначати через $\mathbf{GI}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Відомо [13], що при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)g(s)\,ds = 0 \tag{9}$$

і лише за неї інтегральне рівняння (7) має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + g(t) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)g(s)\,ds,$$

де c_1 — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Для знаходження значення $c_0 \in \mathbf{B}_2$, при якому умова розв'язності (9) буде виконуватися, підставимо $g(t)$ з (8) у (9). У результаті отримаємо операторне рівняння

$$Sc_0 = b_0, \tag{10}$$

де

$$S = \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)P(s)W\,ds = \mathcal{P}_{Y_D}\widetilde{A}W, \quad S\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1,$$

$$\widetilde{A} = \int\limits_a^b N(s)P(s)ds, \quad \widetilde{A}\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1,$$

$$b_0 = -\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds, \quad b_0 \in \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1.$$

Нехай оператор $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1)$ узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний. Тоді існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(S)} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2,\ \mathcal{P}_{Y_S} : \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1$ і обмежений узагальнено обернений оператор $S^- : \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ до оператора S.

Рівняння (10) і, як наслідок, неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння (5) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_2)$, які задовольняють умову [9, 14]

$$\mathcal{P}_{Y_S}b_0 = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = 0,$$

і при цьому рівняння (5) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \big[X_1(t), X_2(t)\big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t), \tag{11}$$

де

$$X_1(t) = \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \quad X_2(t) = \widetilde{L}(s)\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)},$$
$$\widetilde{M}(t) = \int\limits_a^t M(t)\,ds, \quad \widetilde{L}(t) = \int\limits_a^t \Big[P(t) + M(t)D^-\widetilde{A}\Big]\,W\,ds,$$

$c \in \mathbf{B}_1,\ d \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі, $(L^- f)(t)$ — узагальнено обернений оператор до інтегро-диференціального оператора L [14].

Підставивши розв'язок (11) у крайову умову (6), отримаємо операторне рівняння

$$\big[Q_1, Q_2\big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \alpha - \ell\big(L^- f\big)(\cdot),$$

відносно довільних сталих $c \in \mathbf{B}_1,\ d \in \mathbf{B}_2$, де $Q_1 = \ell X_1(\cdot),\ Q_2 = \ell X_2(\cdot)$ — лінійні обмежені оператори.

Нехай оператори $Q_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ і $\widehat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2 : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}$ узагальнено оборотні.

У цьому випадку існують обмежені проєктори [16]

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \widetilde{\mathcal{P}}_{N(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{P}}_{N(\widehat{Q}_2)} = -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \tag{12}$$

і обмежений узагальнено обернений оператор

$$Q^- = \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix}, \quad \widetilde{Q}_1^- = Q_1^- - Q_1^- Q_2 \widehat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \widetilde{Q}_2^- = \widehat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}. \tag{13}$$

Теорема 1 [9]**.** *Нехай* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$ *і* $\widehat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$. *Тоді відповідна (5), (6) однорідна* $(f(t) = 0,\ \alpha = 0)$ *крайова задача має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \big[X_1(t), X_2(t)\big]\,\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

де $c \in \mathbf{B}_1,\ d \in \mathbf{B}_2$ *— довільні сталі.*

Неоднорідна крайова задача (5), (6) має розв'язки для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_2)$ *і* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють систему умов*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \displaystyle\int_a^b N(s) f(s) ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\} = 0, \end{cases} \tag{14}$$

при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \left[X_1(t), X_2(t)\right] \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + G[f](t) + \left[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\right] \alpha, \tag{15}$$

де

$$G[f](t) = \left(L^- f\right)(t) - \left[X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-\right] \ell \left(L^- f\right)(\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна.

Враховуючи структуру проєктора $\mathcal{P}_{N(Q)}$ (12) та узагальнено оберненого оператора Q^- (13) розв'язок (15) запишемо у вигляді

$$z(t) = \left[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)\right] \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \bar{z}(t),$$

де

$$\begin{gathered} \bar{z}(t) = G[f](t) + X(t)\widetilde{Q}^- \alpha, \\ \widetilde{X}_1(t) = X_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, \quad \widetilde{X}_2(t) = X_1(t)\widetilde{\mathcal{P}}_{N(\widehat{Q}_2)} + X_2(t)\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}, \\ X(t)\widetilde{Q}^- = X_1(t)\widetilde{Q}_1^- + X_2(t)\widetilde{Q}_2^-. \end{gathered} \tag{16}$$

4. Проміжний результат. Для розв'язання поставленої задачі нам необхідно встановити умови розв'язності та зображення розв'язків рівнянь із лінійним оператором B_0, який є (2×2)-вимірною операторною матрицею.

Нехай $\mathbf{X}_1, \ \mathbf{X}_2, \ \mathbf{Y}_1, \ \mathbf{Y}_2$ — банахові простори.

Розглянемо рівняння

$$B_0 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

де $B_{11} : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{Y}_1, \ B_{12} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{Y}_1, \ B_{21} : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{Y}_2 \ B_{22} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{Y}_2$ — лінійні обмежені оператори. Таким чином, оператор B_0 діє з банахового простору $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ у банаховий простір $\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2$.

Запишемо рівняння (17) у вигляді системи операторних рівнянь

$$\begin{cases} B_{11}c + B_{12}d = y_1, \\ B_{21}c + B_{22}d = y_2. \end{cases} \tag{18}$$

Нехай оператор B_{11} належить $\mathbf{GI}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$. Позначимо через $\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}$ обмежений проєктор на підпростір $Y_{B_{11}} = \mathbf{Y}_1 \ominus R(B_{11}), \ \mathcal{P}_{N(B_{11})}$ — обмежений проєктор на нуль-простір $N(B_{11})$ оператора $B_{11}, \ B_{11}^-$ — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора B_{11}.

Тоді перше рівняння системи (18) має розв'язок відносно $c \in \mathbf{X}_1$ тоді й лише тоді, коли виконується умова [12]

$$\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}[y_1 - B_{12}d] = 0, \tag{19}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} + B_{11}^{-}[y_1 - B_{12}d], \tag{20}$$

де $\bar{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{X}_1$.

Підставимо знайдене c з (20) у друге рівняння системи (18):

$$B_{21}\left\{\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} + B_{11}^{-}[y_1 - B_{12}d]\right\} + B_{22}d = y_2$$

або

$$\widetilde{B}_{22}d = y_2 - B_{21}B_{11}^{-}y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}, \tag{21}$$

де $\widetilde{B}_{22} = B_{22} - B_{21}B_{11}^{-}B_{12}$ — лінійний обмежений оператор.

Нехай оператор $\widetilde{B}_{22}$ належить $\mathbf{GI}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$. Тоді рівняння (21) має розв'язок відносно $d \in \mathbf{X}_2$ тоді і лише тоді, коли виконується умова [12]

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}\left[y_2 - B_{21}B_{11}^{-}y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}\right] = 0, \tag{22}$$

при якій воно має сім'ю розв'язків

$$d = \mathcal{P}_{N\left(\widetilde{B}_{22}\right)}\bar{d} + \widetilde{B}_{22}^{-}\left[y_2 - B_{21}B_{11}^{-}y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}\right], \tag{23}$$

де $\bar{d}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{X}_2$, $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}$ — обмежений проєктор на підпростір $Y_{\widetilde{B}_{22}} = \mathbf{Y}_2 \ominus R(\widetilde{B}_{22})$, $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}$ — обмежений проєктор на нуль-простір $N(\widetilde{B}_{22})$ оператора $\widetilde{B}_{22}$, $\widetilde{B}_{22}^{-}$ — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора $\widetilde{B}_{22}$.

Тоді, підставивши (23) у (19), отримаємо умови розв'язку першого рівняння системи (18):

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N\left(\widetilde{B}_{22}\right)}\bar{d} + \\ &\quad + \left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-}\right)y_1 - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}y_2 = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Позначимо $\widehat{B}_{22}^{-} = B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}$.

Підставляючи (23) у (20), маємо

$$\begin{aligned} c = &\left[\mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\right]\bar{c} - B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N\left(\widetilde{B}_{22}\right)}\bar{d} + \\ &+ \left[B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right]y_1 - B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}y_2. \end{aligned} \tag{25}$$

З умов (24) і (22) одержуємо умови розв'язності матричного операторного рівняння (18):

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N\left(\widetilde{B}_{22}\right)} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{c}\\ \bar{d}\end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Тоді, враховуючи (23) та (25), отримуємо загальний розв'язок операторної системи (18):

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^- \mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11}^- + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^- B_{11}^- & -B_{11}^- B_{12} \widetilde{B}_{22}^- \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} B_{11}^- & \widetilde{B}_{22}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

де $\bar{c} \in \mathbf{X}_1,\ \bar{d} \in \mathbf{X}_2$ — елементи, які задовольняють умову (26).

Позначимо через $\widetilde{B}_0 = B_0 - K$ звуження оператора B_0 на підпростір $R\big(\widetilde{B}_0\big) \subseteq R(B_0)$, де

$$K = \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} \widehat{B}_{22}^- \mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix}.$$

По аналогії з [16] можна показати, що оператор

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} \widehat{B}_{22}^- B_{11}^- & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} B_{12} \widetilde{B}_{22}^- \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} B_{21} B_{11}^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} \tag{27}$$

є обмеженим проєктором на підпростір $Y_{\widetilde{B}_0} = \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2 \ominus R\big(\widetilde{B}_0\big),$ а оператор

$$\widetilde{B}_0^- = \begin{bmatrix} B_{11}^- + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^- B_{11}^- & -B_{11}^- B_{12} \widetilde{B}_{22}^- \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} B_{11}^- & \widetilde{B}_{22}^- \end{bmatrix} \tag{28}$$

— обмеженим узагальнено оборотним оператором до оператора B_0 на підпросторі $R\big(\widetilde{B}_0\big)$, де $R\big(\widetilde{B}_0\big)$ — підпростір області значень $R(B_0)$ оператора B_0.

Теорема 2. *Нехай оператори* $B_{11} \in \mathbf{GI}\,(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$ *і* $\widetilde{B}_{22} = B_{21} B_{11}^- B_{12} \in \mathbf{GI}\,(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$. *Тоді при виконанні умови*

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{29}$$

операторне рівняння (17) має принаймні один розв'язок

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \widetilde{B}_0^- \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

де $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ *— обмежений проєктор на підпростір* $Y_{\widetilde{B}_0} = \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2 \ominus R\big(\widetilde{B}_0\big),\ Y_{\widetilde{B}_0} \supseteq Y_{B_0},\ \widetilde{B}_0^-$ *— обмежений узагальнено обернений оператор до оператора* B_0 *на підпросторі* $R\big(\widetilde{B}_0\big) \subseteq R(B_0)$.

Доведення. Покажемо, що оператор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ — обмежений проєктор, тобто $\mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$;

$$\mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} \widehat{B}_{22}^- B_{11}^- & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} B_{12} \widetilde{B}_{22}^- \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} B_{21} B_{11}^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right)^2 + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-}\left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right) + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} \end{bmatrix.$$

$$\left. - \left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right)\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \atop \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} + \mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}},$$

оскільки $B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} = 0,\ \widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} = 0.$

Таким чином, оператор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ є проєктором. Його обмеженість є наслідком обмеженості компонент, з яких він складається.

Очевидно, що проектор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ є розширенням проектора $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}$ на підпростір $Y_{B_0} \oplus R(K)$. Тому умова розв'язності (29) є більш жорсткою, ніж умова (26).

Далі знайдемо суперпозицію операторів B_0 та $\widetilde{B}_0^{-}$:

$$B_0\widetilde{B}_0^{-} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11}B_{11}^{-} + B_{11}B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} + \widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & B_{11}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} + B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ B_{21}B_{11}^{-} + B_{21}B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} + B_{22}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & -B_{21}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} + B_{22}\widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{Y}_1} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\left(I_{\mathbf{X}_2} + \widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right) & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & I_{\mathbf{Y}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{Y}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{Y}_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\left(I_{\mathbf{X}_2} + \widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right) & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} = I_{\mathbf{Y}_1\times\mathbf{Y}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}. \quad (31)$$

Підставивши розв'язок (30) у рівняння (17), з урахуванням (31) отримаємо

$$B_0\widetilde{B}_0^{-}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left(I_{\mathbf{Y}_1\times\mathbf{Y}_2} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\right)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

оскільки виконується умова (29).

5. Основний результат. Нехай породжуюча крайова задача (5), (6) не має розв'язків, тобто система умов (14) не виконується.

Знайдемо умови, за яких за допомогою лінійного збурення крайову задачу (3), (4) можна звести до розв'язної. Для розв'язання цієї проблеми застосуємо метод Вішика – Люстерника [2].

Розв'язки крайової задачі (3), (4) будемо шукати у вигляді ряду за степенями малого параметра ε, який містить від'ємну степінь ε:

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \quad (32)$$

Підставимо ряд (32) у крайову задачу (3), (4) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} отримаємо однорідну крайову задачу для інтегро-диференціального рівняння

$$\dot{z}_{-1}(t) - M(t)\int\limits_a^b \big[W(s)z_{-1}(s) + V(s)\dot{z}_{-1}(s)\big]ds = 0, \tag{33}$$

$$\ell z_{-1}(\cdot) = 0 \tag{34}$$

для знаходження коефіцієнта $z_{-1}(t)$ ряду (32).

За теоремою 1 однорідна крайова задача (33), (34) має сім'ю розв'язків

$$z_{-1}(t) = \Big[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)\Big]\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix}, \tag{35}$$

де $c_{-1} \in \mathbf{B}_1,\ d_{-1} \in \mathbf{B}_2$ — довільні елементи, які визначимо на наступному кроці.

Позначимо через $\big(\widetilde{K}\varphi\big)(t)$ оператор, який діє на функцію $\varphi(t) \in \mathbf{C}\left(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2\right),\ \dot{\varphi}(t) \in \in \mathbf{C}^1\left(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2\right)$, за правилом

$$\big(\widetilde{K}\varphi\big)(t) = \int\limits_a^b \left(K(t,s)\varphi(s) + K_1(t,s)\dot{\varphi}(s)\right)ds. \tag{36}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, одержуємо крайову задачу

$$\dot{z}_0(t) - M(t)\int\limits_a^b [W(s)z_0(s) + V(s)\dot{z}_0(s)]ds = f(t) + \big(\widetilde{K}z_{-1}\big)(t), \tag{37}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot) \tag{38}$$

для визначення коефіцієнта $z_0(t)$ ряду (32).

За теоремою 1 лінійна неоднорорідна крайова задача (33), (34) має розв'язки тоді і лише тоді, коли виконується система умов

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left[f(s) + \big(\widetilde{K}z_{-1}\big)(s)\right]ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot) - \ell L^-\left[f + \big(\widetilde{K}z_{-1}\big)\right](\cdot)\right\} = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Підставивши $z_{-1}(t)$ з (35) у (39), отримаємо систему операторних рівнянь відносно невідомого вектора $\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\left[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right]\right)(s)\,ds \begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix} = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds, \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\left[\widetilde{X}_1(\cdot), \widetilde{X}_2(\cdot)\right] - \ell L^-\left(\widetilde{K}\left[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right]\right)(\cdot)\right\}\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix} = \\ \qquad = -\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left[\alpha - \ell L^- f(\cdot)\right], \end{cases} \tag{40}$$

де дія оператора $\widetilde{K}$ (36) та функціонала ℓ_1 на операторну матрицю $\left[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right]$ відбувається за правилами

$$\left(\widetilde{K}\left[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right]\right)(t) = \left[\big(\widetilde{K}\widetilde{X}_1\big)(t), \big(\widetilde{K}\widetilde{X}_2\big)(t)\right],$$
$$\ell_1\left[\widetilde{X}_1(\cdot), \widetilde{X}_2(\cdot)\right] = \left[\ell_1\widetilde{X}_1(\cdot), \ell_1\widetilde{X}_2(\cdot)\right].$$

Позначивши

$$\begin{aligned}
&B_{11} = \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\big(\widetilde{K}\widetilde{X}_1\big)(s)\,ds, \quad B_{11}\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1,\\
&B_{12} = \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\big(\widetilde{K}\widetilde{X}_2\big)(s)\,ds, \quad B_{12}\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1,\\
&B_{21} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left[\ell_1\widetilde{X}_1(\cdot) - \ell L^-\big(\widetilde{K}\widetilde{X}_1\big)(\cdot)\right], \quad B_{21}\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B},\\
&B_{22} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left[\ell_1\widetilde{X}_2(\cdot) - \ell L^-\big(\widetilde{K}\widetilde{X}_2\big)(\cdot)\right], \quad B_{22}\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B},\\
&f_1 = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds, \quad f_2 = -\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left[\alpha - \ell L^- f(\cdot)\right],
\end{aligned} \tag{41}$$

з (40) отримаємо рівняння

$$B_0\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2\end{bmatrix}, \tag{42}$$

для визначення елементів $c_{-1} \in \mathbf{B}_1$ і $d_{-1} \in \mathbf{B}_2$, де

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}, \quad B_0\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B} \tag{43}$$

— операторна матриця, елементи якої $B_{ij},\ i = 1,2,\ j = 1,2,$ визначені співвідношеннями (41).

Нехай $B_{11} \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ і $\widetilde{B}_{22} = B_{21}B_{11}^{-}B_{12} \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$. За теоремою 2 операторне рівняння (42) при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2\end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\{\alpha - \ell L^- f(\cdot)\}\end{bmatrix} = 0 \tag{44}$$

має принаймні один розв'язок

$$\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1}\end{bmatrix} = -\widetilde{B}_0^{-}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\{\alpha - \ell L^- f(\cdot)\}\end{bmatrix},$$

де обмежений проєктор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ визначено рівністю (27), а обмежений узагальнено оберний оператор $\widetilde{B}_0^-$ — рівністю (28).

Підставивши $\operatorname{col}(c_{-1}, d_{-1})$ у (35), отримаємо розв'язок однорідної крайової задачі (33), (34)

$$z_{-1}(t) = -\left[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)\right] \widetilde{B}_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{\alpha - \ell L^- f(\cdot)\} \end{bmatrix},$$

який є коефіцієнтом при ε^{-1} ряду (32).

Умова (44) буде завжди виконуватися, якщо виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} = 0. \tag{45}$$

При виконанні умови (45) і, як наслідок, умов (44) та (40) за теоремою 1 неоднорідна крайова задача (37), (38) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = \left[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)\right] \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} + \bar{z}_0(t), \tag{46}$$

де вектор $\operatorname{col}(c_0, d_0) \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ буде визначено на наступному кроці, а частинний розв'язок $\bar{z}_0(t)$ обчислюється за формулою (16):

$$\bar{z}_0 = G\left[f(\cdot) + \int\limits_a^b [K(\cdot,s)z_{-1}(s) + K_1(\cdot,s)\dot{z}_{-1}(s)]ds\right](t) +$$
$$+ X(t)\widetilde{Q}^- [\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot)] = G[f](t) + G\left[\widetilde{K}\bar{z}_{-1}\right](t) + X(t)\widetilde{Q}^- [\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot)],$$

дію оператора $\widetilde{K}$ визначено рівністю (36).

Для визначення коефіцієнта $z_1(t)$ ряду (32) отримаємо крайову задачу

$$\dot{z}_1(t) - M(t)\int\limits_a^b [W(s)z_1(s) + V(s)\dot{z}_1(s)]ds = \big(\widetilde{K}z_0\big)(t), \tag{47}$$

$$\ell z_1(\cdot) = \ell_1 z_0(\cdot). \tag{48}$$

За теоремою 1 з умов розв'язності крайової задачі (47), (48)

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)\big(\widetilde{K}z_0\big)(s)ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left\{\ell_1 z_0(\cdot) - \ell L^-\big(\widetilde{K}z_0\big)(\cdot)\right\} = 0 \end{cases}$$

з урахуванням (46) отримаємо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\left[\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2\right]\right)(s)\,ds\begin{bmatrix}c_0\\ d_0\end{bmatrix}= \\ \qquad = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)G\left[\widetilde{K}\bar{z}_0\right](s)\,ds, \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\left[\widetilde{X}_1(\cdot),\widetilde{X}_2(\cdot)\right]-\ell L^-\widetilde{K}\left[\widetilde{X}_1(\cdot),\widetilde{X}_2(\cdot)\right]\right\}\begin{bmatrix}c_0\\ d_0\end{bmatrix}= \\ \qquad = -\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1 G\left[\widetilde{K}\bar{z}_{-1}\right](\cdot)-\ell\left(L^-G\left[\widetilde{K}\bar{z}_{-1}\right]\right)(\cdot)\right\}. \end{cases} \tag{49}$$

Використовуючи позначення (41), з системи (49) одержуємо операторне рівняння для визначення сталої $\operatorname{col}(c_0,d_0)\in\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$:

$$B_0\begin{bmatrix}c_0\\ d_0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\bar{z}_0\right)(s)\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot)-\ell\left(L^-\left(\widetilde{K}\bar{z}_0\right)\right)(\cdot)\right\}\end{bmatrix}, \tag{50}$$

де B_0 — операторна матриця (43).

Операторне рівняння (50) при виконанні умови (45) має принаймні один розв'язок

$$\begin{bmatrix}c_0\\ d_0\end{bmatrix}=-\widetilde{B}_0^-\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\bar{z}_0\right)(s)\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot)-\ell\left(L^-\left(\widetilde{K}\bar{z}_0\right)\right)(\cdot)\right\}\end{bmatrix}. \tag{51}$$

Підставивши (51) у (46), одержимо коефіцієнт ряду (32) при ε^0:

$$z_0(t)=\left[\widetilde{X}_1(t),\widetilde{X}_2(t)\right]\widetilde{B}_0^-\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\bar{z}_0\right)(s)\,ds\\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\bar{z}_0(\cdot)-\ell\left(L^-\left(\widetilde{K}\bar{z}_0\right)\right)(\cdot)\right\}\end{bmatrix}+$$

$$+G[f](t)+G\left[\widetilde{K}z_{-1}\right](t)+\widetilde{X}(t)\widetilde{Q}^-\left[\alpha+\ell_1 z_{-1}(\cdot)\right].$$

При виконанні умови (45) крайова задача (47), (48) має сім'ю розв'язків

$$z_1(t,c_1)=\left[\widetilde{X}_1(t),\widetilde{X}_2(t)\right]\begin{bmatrix}c_1\\ d_1\end{bmatrix}+\bar{z}_1(t),$$

де вектор $\operatorname{col}[c_1,d_1]\in\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$ знайдемо на наступному кроці ітераційного процесу,

$$\bar{z}_1(t)=G\left[\widetilde{K}z_0\right](t)+\widetilde{X}(t)\widetilde{Q}^-\ell_1 z_0(\cdot).$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнтів $z_i(t)$ при ε^i ряду (32) отримуємо крайові задачі

$$\dot{z}_i(t)-M(t)\int\limits_a^b[W(s)z_i(s)+V(s)\dot{z}_i(s)]ds=\left(\widetilde{K}z_{i-1}\right)(t), \tag{52}$$

$$\ell z_i(\cdot) = \ell_1 z_{i-1}(\cdot), \quad i = 2, 3, \ldots . \tag{53}$$

З критеріїв розв'язності крайових задач (52), (53)

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\big(\widetilde{K}z_{i-1}\big)(s)\,ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\Big[\ell_1 z_{i-1}(\cdot) - \ell L^-\big(\widetilde{K}z_{i-1}\big)(\cdot)\Big] = 0 \end{cases} \tag{54}$$

отримаємо операторні рівняння

$$B_0\begin{bmatrix} c_{i-1} \\ d_{i-1}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\bar{z}_{i-1}\right)(s)\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\bar{z}_{i-1}(\cdot) - \ell\left(L^-\left(\widetilde{K}\bar{z}_{i-1}\right)\right)(\cdot)\right\}\end{bmatrix} \tag{55}$$

для визначення сталих $\begin{bmatrix} c_{i-1} \\ d_{i-1}\end{bmatrix}$, $i = 2, 3, \ldots .$

Операторні рівняння (55) для кожного $i = 2, 3, \ldots$ при виконанні умови (45) мають принаймні один розв'язок

$$\begin{bmatrix} c_{i-1} \\ d_{i-1}\end{bmatrix} = -\widetilde{B}_0^-\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\bar{z}_{i-1}\right)(s)\,ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\ell_1\bar{z}_{i-1}(\cdot) - \ell\left(L^-\left(\widetilde{K}\bar{z}_{i-1}\right)\right)(\cdot)\right\}\end{bmatrix}.$$

Отже, при виконанні умови (45) і, як наслідок, умов (54), крайові задачі (52), (53) для кожного $i = 2, 3, \ldots$ мають розв'язки

$$z_i(t) = \left[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)\right]\begin{bmatrix} c_i \\ d_i\end{bmatrix} + \bar{z}_i(t),$$

де

$$\bar{z}_i(t) = G\left[\widetilde{K}z_{i-1}\right](t) + \widetilde{X}(t)\widetilde{Q}^-\ell_1 z_{i-1}(\cdot), \quad i = 2, 3, \ldots .$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай оператори* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$ *і* $\widehat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$, *породжуюча крайова задача (5), (6) при довільних неоднорідностях* $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *та* $\alpha \in \mathbf{B}$ *не має розв'язків.*

Тоді якщо оператори $B_{11} \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$, $\widetilde{B}_{22} \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ *і*

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\end{bmatrix} = 0,$$

то слабко збурена крайова задача (3), (4) при довільних неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *і* $\alpha \in \mathbf{B}$ *має принаймні один розв'язок у вигляді абсолютно збіжного при довільних фіксованих* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ряду (32), коефіцієнти якого визначаються за допомогою ітераційного алгоритму*

$$z_i(t) = \left[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t)\right]\begin{bmatrix} c_i \\ d_i\end{bmatrix} + \bar{z}_i(t), \quad i = -1, 0, 1, \ldots ,$$

$$\begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{cases} -\widetilde{B}_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \displaystyle\int_a^b N(s) f(s)\, ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left\{ \alpha - \ell L^- f(\cdot) \right\} \end{bmatrix}, & \textit{якщо} \quad i = -1, \\ -\widetilde{B}_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \displaystyle\int_a^b N(s) \left(\widetilde{K} \bar{z}_{i-1} \right)(s)\, ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left\{ \ell_1 \bar{z}_{i-1}(\cdot) - \ell \left(L^- \left(\widetilde{K} \bar{z}_{i-1} \right) \right)(\cdot) \right\} \end{bmatrix}, & \textit{якщо} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases}$$

$$\bar{z}_i(t) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad i = -1, \\ G[f](t) + G\left[\widetilde{K} \bar{z}_{-1} \right](t) + X(t) \widetilde{Q}^- \left[\alpha + \ell_1 z_{-1}(\cdot) \right], & \textit{якщо} \quad i = 0, \\ G\left[\widetilde{K} z_{i-1} \right](t) + \widetilde{X}(t) \widetilde{Q}^- \ell_1 z_{i-1}(\cdot), & \textit{якщо} \quad i = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Отже, при виконанні умови (45) слабко збурена крайова задача (3), (4) при довільних неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$ має принаймні один розв'язок у вигляді ряду

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \left[\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t) \right] \begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} + \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t). \tag{56}$$

Враховуючи той факт, що всі оператори, за допомогою яких визначаються коефіцієнти ряду (56), обмежені, можна показати, що існує ε_* таке, що для фіксованого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряд (56) рівномірно збіжний.

Доведення рівномірної збіжності ряду (56) проводиться аналогічно наведеному у [7, 8].

Зауваження. Якщо крайова задача (3), (4) розглядається у скінченновимірних або нескінченновимірних гільбертових просторах, то теорема 3 значно спрощується, оскільки у цих просторах нормально розв'язні оператори завжди узагальнено оборотні.

Література

1. V. P. Zhuravl'ov, M. P. Fomin, *Weakly perturbed integrodifferential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, J Math. Sci., **258**, 618 – 635 (2021).
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений*, Успехи мат. наук, **15**, вып. 3, 3 – 80 (1960).
3. О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко, *Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі*, Нелін. коливання, **13**, № 3, 291 – 304 (2010).
4. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
5. І. А. Головацька, *Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **15**, № 2, 151 – 164 (2012).
6. A. A. Boichuk, L. M. Shegda, *Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary-value problems*, Differ. Equ., **47**, № 4, 453 – 461 (2011).
7. V. F. Zhuravl'ov, *Weakly perturbed operator equations in Banach spaces*, Ukr. Math. Zh., **69**, № 6, 876 – 891 (2017).
8. V. F. Zhuravlev, N. P. Fomin, *Weakly perturbed Fredholm integral equations with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **229**, № 4, 85 – 97 (2018).
9. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, *Критерій розв'язності лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1469 – 1486 (2020).

10. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
11. Ю. К. Ландо, *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1112 – 1126 (1968).
12. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019)
13. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **212**, № 3, 275 – 289 (2016).
14. В. Ф. Журавлев, *Обобщенно обратный оператор к интегро-дифференциальному в банаховом пространстве*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 202 – 219 (2019).
15. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, Вип. 13, 78 – 116 (2007).
16. В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, П. Н. Забродский, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами в банаховых пространствах*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471 – 485 (2019).
17. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 4, 331 – 341 (2018).

Одержано 03.06.22