УДК 355.02

ПРО МОДЕЛЬ ЛАНЧЕСТЕРА ДЛЯ КОНФЛІКТУ НИЗЬКОЇ ІНТЕНСИВНОСТІ

В. П. Котляров, А. О. Зварич, О. А. Кузнєцов

Центр. наук.-дослід. ін-т ЗС України
Повітрофлот. просп., 28б, Київ, 03049, Україна
e-mail: info-cvni@ukr.net
zvarych_ao@ukr.net
alexkuznes1966@gmail.com

We investigate the subject domain of analytical analysis of military confrontation (as a part of military security) of the low-intensity conflict described by nonlinear Lanchester equations. The precondition for choosing this type of model is a slow decrease in the share of preserved forces (the parties act cautiously at the conflict), and the process itself with a protracted and sluggish development of the situation lasts for an "infinitely" long time, which is not provided by the linear model class. Analytical analysis is carried out in two directions. According to the first of them, it is established the formulaic relationship of the initial ratio of forces with the specified criteria. The expression is obtained in the form of a quadratic dependence in contrast to the previously derived biquadratic dependence for nonlinear systems describing the intensive type of action. The second direction concerns the analytical estimation of the time to achieve the ultimate goal of one of the parties of the conflict, where the original system by special transformation is reduced to one nonlinear differential equation of the first order, which has a solution for time with tabular integrals. All analytical statements are confirmed by numerical examples. The results of numerical integration of the nonlinear system of differential equations chosen for analysis are also presented.

Розглянуто предметну область аналітичного аналізу військового протиборства (як складової частини воєнної безпеки), в якій досліджується конфлікт низької інтенсивності, що описується нелінійними рівняннями Ланчестера. Передумовою для вибору такого типу моделі є повільне убування частки збережених сил (сторони у конфлікті діють обережно), а сам процес із затяжним і повільним розвитком ситуації триває "нескінченно" довго, що не забезпечується лінійним класом моделі. Аналітичний аналіз здійснюється у двох напрямах. Згідно з першим із них установлюється формульний взаємозв'язок вихідного співвідношення сил із заданими критеріальними величинами. Вираз отримано у вигляді квадратичної залежності, на відміну від виведеної раніше залежності біквадратного характеру для нелінійних систем, що описують інтенсивний тип дій. Другий напрям стосується аналітичної оцінки часу досягнення кінцевої мети дій однієї зі сторін у конфлікті, де вихідна система за допомогою спеціального перетворення зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку, що має розв'язок для параметра часу, за допомогою табличних інтегралів. Усі аналітичні викладки підтверджено чисельними прикладами. Наведено результати чисельного інтегрування обраної для аналізу нелінійної системи диференціальних рівнянь.

1. Вступ. Прикладні дослідження у предметній області протидії сторін, що конфліктують, досить багатогранні і стосуються широкого кола взаємозалежних процесів, де в основу аналітичних розрахунків покладено методи математичного аналізу (диференціального та інтегрального числення) з подальшим виходом у область теорії оптимального управління [1], насамперед у тій її частині, що стосується вибору однією зі сторін конфлікту найкращих (необхідних) для неї параметрів процесу або їхніх оптимальних співвідношень, наприклад, співвідношення сил протягом усього часу конфлікту. При оцінюванні цього параметра найбільш актуальним є питання щодо визначення необхідного початкового співвідношення сил для гарантованого досягнення мети дій у цілому з урахуванням заданих критеріїв. Не менш актуальним є питання стосовно визначення часу досягнення необхідних (заданих) критеріальних величин. Саме з позиції кількісного оцінювання всіх заданих величин щодо конфлікту низької інтенсивності (найменш вивченого у спеціальній літературі) і буде викладено матеріал статті.

2. Аналіз досліджень і публікацій. Серед значного арсеналу математичних моделей у прикладній області протиборства сторін особливе місце посідають аналітичні моделі Ланчестера.

Дослідження таких моделей, розпочате в роботах їхнього автора, знайшло подальший розвиток у вигляді узагальненої моделі Ланчестера [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= P - aB(t) - cA(t) - kA(t)B(t), \\ \frac{dB(t)}{dt} &= Q - bA(t) - gB(t) - lB(t)A(t), \end{aligned} \tag{1}$$

де $A(t),\ B(t)$ — кількість одиниць угруповань сторін (або їхня чисельність); $\dfrac{dA(t)}{dt}$, $\dfrac{dB(t)}{dt}$ — динаміка зміни кількості одиниць сторін у часі; $a,\ b$ — інтенсивності ефективного вражаючого впливу кожної одиниці сторін відповідно (у загальному випадку функції величин $A(t),\ B(t)$); $P,\ Q$ — швидкості відновлення втрат за рахунок введення резервів; $c,\ g,\ k,\ l$ — невід'ємні параметри.

Аналіз (1) при $k = l = 0$ проведено у [2]. Для $k \neq 0,\ l \neq 0$, але при $c = g = 0$ його було продовжено у монографії [3], а також у низці інших робіт.

Наступним етапом розвитку методу динаміки середніх у формі рівнянь Ланчестера стала подальша деталізація процесу протидії для різнотипних засобів (див. наприклад, [4]) зі збільшенням (за кількістю цих засобів) порядку системи диференціальних рівнянь, що значно ускладнювало її дослідження. Для пониження розмірності задачі у [5] та в низці інших робіт було запропоновано підхід із використанням коефіцієнтів співрозмірності різнотипних засобів. У результаті початкова багатовимірна система перетворювалася на систему диференціальних рівнянь у вигляді (1).

Отже, дослідження системи диференціальних рівнянь у формі запису Ланчестера й досі не втратило своєї значущості, особливо у плані розв'язання двох актуальних питань, які висвітлено у вступній частині статті і не відображено у спеціальній літературі, присвяченій конфлікту низької інтенсивності.

Частково ці питання розглянуто для конфліктів із високою інтенсивністю подій [6], які описуються системою (1), при дотриманні умов, що резерви не вводяться $P = Q = 0$, а коефіцієнти $c = g = k = l = 0$. Тут параметри a і b пропорційні поточним величинам співвідношень сил сторін і апроксимуються нелінійними залежностями вигляду:

$$a = \gamma \frac{B(t)}{A(t)}, \quad \gamma = \text{const},$$
$$b = \nu \frac{A(t)}{B(t)}, \quad \nu = \text{const}. \tag{2}$$

У діапазоні співвідношення величин $A(t)$ і $B(t)$ у (2), що найчастіше трапляються у практиці, рівняння (1) з урахуванням прийнятих у [6] обмежень описують процес зі швидкою зміною параметрів, що якраз і характерно для конфлікту з високою інтенсивністю дій сторін.

Для такого класу систем у [6] знаходяться аналітичні залежності, які встановлюють взаємозв'язок вихідного співвідношення сил сторін, беручи до уваги кінцеві критеріальні величини. Однак за межами цієї роботи залишилися питання щодо аналітичного розрахунку часу досягнення цих критеріальних величин.

Формулювання мети статті. Метою цієї статті є дослідження нелінійного класу динамічних систем, що описують перебіг процесів у збройних конфліктах низької інтенсивності, для отримання аналітичних оцінок у вигляді встановлення формульного взаємозв'язку вихідного (початкового) співвідношення сил сторін із заданими критеріальними величинами на момент завершення процесу (перший результат) із виведенням алгоритму розрахунку його тривалості за часом (другий результат).

Вибір моделі та критеріальних залежностей. Залишаючись у рамках нелінійного підходу, будемо шукати загальний вигляд моделі як нелінійної динамічної системи і для конфлікту з низькою інтенсивністю дій сторін. Передумовою для цього є повільне убування частки збережених сил (сторони у конфлікті діють обережно), а сам процес із затяжним і повільним розвитком ситуації триває "нескінченно" довго.

Оберемо для дослідження динамічну систему у формі запису (1) зі збереженням у правих частинах рівнянь тільки крайніх складових при $k = \beta A(0)^{-1}$ і $l = \alpha(B(0))^{-1}$, де α і β — сталі величини, а $A(0)$ і $B(0)$ — початкові чисельності сторін [3]. Для зручності подальшого аналізу зобразимо (1) у вигляді

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\beta \frac{A(t)}{A(0)} B(t);$$
$$\frac{dB(t)}{dt} = -\alpha \frac{B(t)}{B(0)} A(t). \tag{3}$$

Дотримуючись [3], саме така модель описує процеси з зазначеними раніше особливостями тривалого за часом характеру (координати процесу взагалі не перетинають вісь абсцис і тільки при $t \to \infty$ наближаються до неї).

Уведемо до розгляду критеріальні величини, які характерні для оцінювання параметрів у предметній області протиборства сторін. До таких показників, насамперед, належить величина співвідношення сил сторін

$$K(t) = \frac{A(t)}{B(t)},$$

оцінювання якої має важливе значення як на початковій стадії конфлікту $t = 0$, так і на завершальному його етапі при $t = T$. Формалізуємо це такими залежностями:

$$K(0) = \frac{A(0)}{B(0)}, \qquad K(T) = \frac{A(T)}{B(T)}. \tag{4}$$

Уведемо до розгляду також показник

$$R(T) = \frac{B(0) - B(T)}{B(0)}, \tag{5}$$

який характеризує відносні втрати сторони B на момент часу $t = T$.

Значення наведених показників $K(T)$ і $R(T)$ на завершальному етапі дій розглядаються як критеріальні обмеження (відповідно $K(T)_{\text{необх.}}$ і $R(T)_{\text{доп.}}$), при яких мета дій у цьому випадку для сторони B у конфлікті досягається.

Підкреслимо, що аналітичне дослідження системи (3) для встановлення однозначного взаємозв'язку критеріальних обмежень із вихідними значеннями співвідношення сил сторін не має логічного завершення. Це стосується і фактора розвитку ситуації у часі.

3. Виведення формульного взаємозв'язку вихідного співвідношення сил із заданими критеріальними величинами (перший результат). Скористаємося способами знаходження загальних інтегралів системи диференціальних рівнянь [7]. Тоді запис рівнянь у вигляді (3) дозволяє знайти один із таких інтегралів. Дійсно, виконуючи необхідні математичні викладки, отримуємо

$$A(t) = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{B(0)}{A(0)}\,B(t) + C, \tag{6}$$

де C — довільна стала інтегрування.

Вираз (6) справедливий для будь-якого моменту часу. Тоді для $t = 0$ і $t = T$ перепишемо його у вигляді

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{(B(0))^2}{A(0)} + C, \\ A(T) &= \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{B(0)}{A(0)}\,B(T) + C. \end{aligned} \tag{7}$$

Вилучаючи з системи (7) сталу інтегрування C і враховуючи співвідношення (4), а також (5), записуємо

$$(K(0))^2 - K(T)(1 - R(T))K(0) - \frac{\beta}{\alpha}\,R(T) = 0. \tag{8}$$

Квадратне рівняння (8) відносно невідомої величини $K(0)$ має два корені, один із яких вилучається з фізичних міркувань (величина його від'ємна). Замінюючи у (8) величини $K(T)$ і $R(T)$ необхідними, наприклад, для сторони B значеннями $K(T)_{\text{необх.}}$ і $R(T)_{\text{доп.}}$, завжди можна за допомогою параметра $K(0)$ з першого рівняння (4) знайти таке початкове значення чисельності $B(0)$ сторони B, яке забезпечить їй досягнення необхідної мети у конфлікті. Тут потрібно взяти до уваги, що початкова чисельність $A(0)$ сторони A відома.

Зазначимо, що вираз (8) має квадратичний вигляд зміни величини $K(0)$, на відміну від аналогічної величини з біквадратною формою зміни для конфлікту із високою інтенсивністю дій.

Отже, формула (8) є першим результатом роботи.

4. Визначення часу досягнення заданих критеріальних величин (другий результат). Визначимо час досягнення мети стороною B. Насамперед, за початковими умовами знайдемо величину сталої інтегрування у виразі (7):

$$C = \frac{(A(0))^2\alpha - (B(0))^2\beta}{\alpha A(0)}. \tag{9}$$

Підставимо (6) з урахуванням (9) у друге рівняння (3). Тоді отримаємо

$$\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{\beta}{A(0)}\,(B(t))^2 + DB(t), \tag{10}$$

де

$$D = \beta\,\frac{B(0)}{A(0)} - \alpha\,\frac{A(0)}{B(0)}.$$

Перепишемо (10) у вигляді

$$dt = \frac{dB(t)}{-\dfrac{\beta}{A(0)}(B(t))^2 + DB(t)}, \tag{11}$$

де праву частину подано у формі табличного інтеграла [8].

Інтегруючи вираз (11), знаходимо залежність

$$t = \frac{1}{D}\ln\frac{B(t)}{-\beta\,\dfrac{B(t)}{A(0)} + D} + C_1. \tag{12}$$

У (12) стала інтегрування C_1 визначається з початкових умов. Остаточно для t вираз (12) записуємо у вигляді

$$t = \frac{1}{D}\ln\frac{B(t)\left(-\beta\,\dfrac{B(0)}{A(0)} + D\right)}{B(0)\left(-\beta\,\dfrac{B(t)}{A(0)} + D\right)}. \tag{13}$$

Якщо в (13) замість величини $B(t)$ підставити її значення $B(T)$ з (5) з урахуванням відомого значення $R(T) = R(T)_{\text{доп.}}$ та знайденої раніше величини $B(0)$, то можна отримати час $t = T$ досягнення заданих критеріальних обмежень.

До речі, аналогічним алгоритмом можна скористатися для знаходження T і для випадку швидкого розвитку конфліктної ситуації. Аналітичний розрахунок цього параметра в [6] не розглядався.

Отже, формула (13) є другим результатом роботи.

Виведенням (8) і (13) досягаємо мету цієї статті.

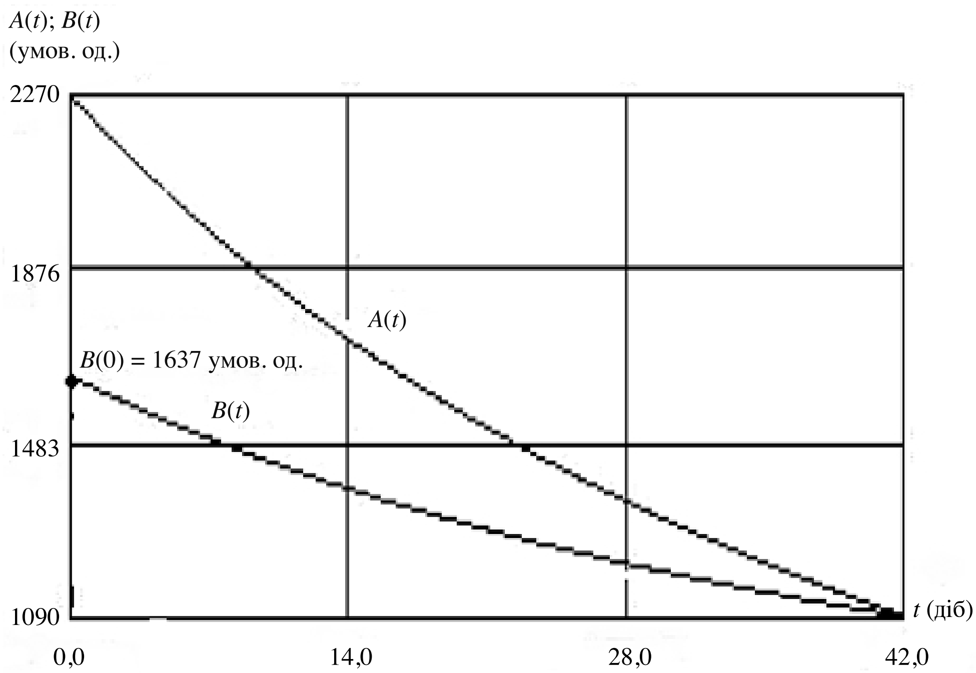

Рис. 1. Зміна кількості одиниць сторін.

Приклади розрахунків. Оберемо для розрахунку такий набір вихідних даних. Відомо початковий склад сторони A, який становить величину $A(0) = 2270$ умовних одиниць (умов. од.). Відомі також параметри $\alpha = 0{,}01$ умов. од./добу і $\beta = 0{,}03$ умов. од./добу.

Необхідно знайти таку початкову величину кількості одиниць сторони B (з урахуванням того, що $B(0) < A(0)$, а $\beta > \alpha$, при якій з часом можливе досягнення рівності сил сторін $A(T) = B(T)$, $K(T)_{\text{необх.}} = 1$, із дотриманням умови щодо припустимої величини відносних втрат сторони B при значенні показника $R(T)_{\text{доп.}} = 0{,}333$ од. Потрібно також знайти час тривалості конфлікту T для досягнення заданих критеріальних обмежень.

Насамперед, підставляючи у (8) замість $K(T)$ і $R(T)$, відповідно, їхні необхідні значення $K(T)_{\text{необх.}}$ і $R(T)_{\text{доп.}}$, знаходимо $K(0) = 1{,}387$ од. Із фізичних міркувань, другий корінь (8), що має від'ємне значення, не розглядається. Тепер за отриманим значенням $K(0)$ з першої формули (4) знаходимо значення $B(0) = 1637$ умов. од., за яким досягається мета дій сторони B у конфлікті, а саме: вирівнюється співвідношення сил, але задана величина відносних втрат цієї сторони не перевищується. Час конфлікту розраховується за формулою (13) і становить $T \approx 42$ діб. При цьому у (13) необхідно замість $B(t)$ підставити значення $B(T) = 1092$ умов. од., отримане з формули (5), з урахуванням того, що $B(0) = 1637$ умов. од., а $R(T) = R(T)_{\text{доп.}} = 0{,}333$ од.

Для підтвердження отриманих результатів на рис. 1 наведено результати чисельного інтегрування системи (3) для координат $A(t)$ і $B(t)$, а на рис. 2 — залежності за часом критеріальних величин $K(t)$ і $R(t) = 1 - B(t)(B(0))^{-1}$.

Результати чисельного інтегрування збігаються з результатами аналітичного розрахунку. Так, при тривалості процесу $t \approx 42$ діб величина $K(t) \approx 1$ од., а значення $R(t) \approx 0{,}33$ од.

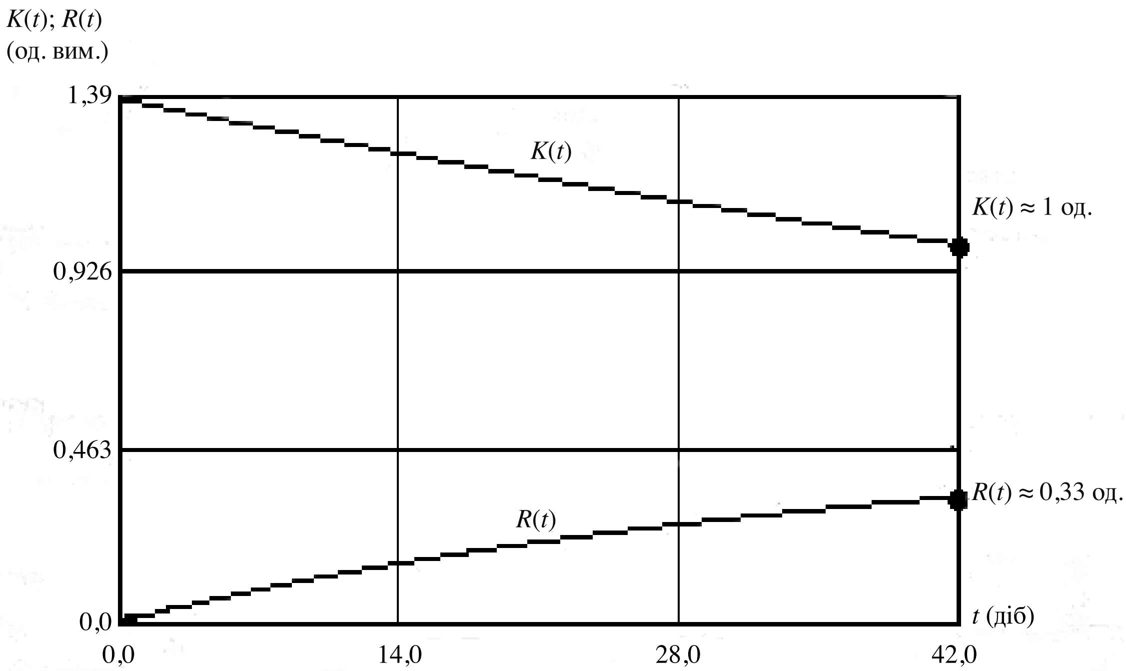

Рис. 2. Графіки зміни значень критеріальних коефіцієнтів.

(рис. 2), що свідчить про коректність аналітичних оцінок, отриманих під час дослідження нелінійної системи (3).

Варто зауважити, що опис дій сторін у конфлікті за допомогою рівнянь Ланчестера є деякою мірою певним спрощенням ситуації. Однак навіть у такому випадку (маючи “еталонні” (“опорні”) траєкторії у вигляді графіків (рис. 1 і рис. 2)) вдається отримати наближені оцінкові значення макропоказників процесу, які можна використати при прогнозуванні ресурсного забезпечення військ, а також при підготовці необхідних резервів. Крім того, ступінь деталізації процесу завжди може бути уточнено на підставі результатів імітаційного моделювання та даних протистояння в реальних умовах. Це стосується і показників, що враховують внесок систем управління та забезпечення, а також рівень підготовки особового складу, які прийнято рівними одиниці, що відповідає максимальним їхнім значенням для ідеального випадку. З цієї причини в рівняннях (3) їх не наведено.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті розвинено аналітичний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь Ланчестера у вигляді системи (3) для конфлікту низької інтенсивності. Виведено формули (8) — перший результат роботи, а також формули (13) — другий результат. У (8) встановлено зв’язок між початковими і кінцевими характеристиками конфліктуючих сторін, а формула (13) визначає тривалість часу для досягнення наперед заданої мети у співвідношеннях таких сторін.

Напрямом подальших досліджень можна вважати застосування розглянутого алгоритму розрахунку часу досягнення заданих критеріальних величин для конфлікту з великою інтенсивністю дій сторін.

Література

1. В. Котляров, О. Кузнєцов, *Оптимальний розподіл ресурсів за мінімаксним принципом у конфліктній ситуації, яка описується нелінійною динамічною системою*, The scientific Heritage, № 57, 27 – 31 (2020); DOI: 10.24412/9215-0365-2020-57-4-27-31.
2. Ф. М. Морз, Д. К. Кимбелл, *Методы исследования операций*, Сов. радио, Москва (1956).
3. Е. Вентцель, *Исследование операций*, Сов. радио, Москва (1972).
4. Б. Горевич, *Выработка способа противовоздушной обороны объекта на основе комплексного использования разнотипных математических моделей боевых действий*, Воен. мысль, Москва, № 9, 60 – 66 (2008).
5. В. С. Брезгин, А. И. Буравлев, *Уравнение динамики боевых потенциалов противоборствующих группировок*, Электрон. науч. журн. “Вооружение и экономика”, **13**, № 1, 59 – 65 (2011); http://www.mil.ru/info/1070/51205/index.shtml.
6. І. Романченко, В. Котляров, О. Павлюк, *Визначення аналітичної залежності для початкового співвідношення сил сторін з урахуванням критеріальних обмежень*, Сучас. інформ. технології у сфері безпеки та оборони, **33**, № 3, 139 – 142 (2018).
7. И. Бронштейн, *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*, Наука, Москва (1981).
8. Г. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Наука, Москва (1977).

Одержано 18.12.21,

після доопрацювання — 26.01.22