УДК 517.929

ПРО ОДНЕ НЕЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ЛІНІЙНИМ ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: grygor@imath.kiev.ua
oiop120@gmail.com

We obtain new properties of solutions of a nonlinear functional-differential equation of the neutral type with linear deviation of the argument, which occurs in quantum mechanics in the study of self-similar potentials and coherent states. Namely, we establish the conditions under which the solution of the Cauchy problem is either given on the whole positive half-axis or exists only on a finite interval and investigate its asymptotic behavior. Under certain conditions, for a fairly smooth solution, asymptotic representations of both the solution itself and its derivatives are given to within an accuracy that depends on the smoothness of the solution.

Отримано нові властивості розв'язків нелінійного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу, що зустрічається у квантовій механіці при вивченні автомодельних потенціалів і когерентних станів. А саме, встановлено умови, за яких розв'язок задачі Коші або визначений на всій додатній півосі, або існує лише на деякому скінченному інтервалі; досліджено його асимптотичну поведінку. Також за певних умов для досить гладкого розв'язку наведено асимптотичні зображення як самого розв'язку, так і його похідних із точністю, яка залежить від гладкості розв'язку.

У цій статті розглядається рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)+qx(qt)\right)-\left(x(t)-qx(qt)\right)^2=\mu, \tag{1}$$

де $0<q<1,\ \mu\in\mathbb{R}$, що зустрічається у квантовій механіці при вивченні автомодельних потенціалів і когерентних станів [1]. Споріднене рівняння вивчалося в [2], дослідження рівняння (1) значною мірою спирається на вказану роботу.

Спочатку будемо досліджувати неперервно диференційовний розв'язок початкової задачі (1), $x(0)\in\mathbb{R}$, який визначений на деякому максимальному напівінтервалі $[0,T_{\max})$. Існування, єдиність і нескінченна диференційовність цього розв'язку випливає з леми 6 у [2]. Встановимо умови, за яких розв'язок задачі Коші або визначений на всій додатній півосі, або існує лише на деякому скінченному інтервалі, та дослідимо його асимптотичну поведінку.

Теорема 1. 1) *Якщо* $\mu<0,\ 0<q<\dfrac{1}{2}$ *і*

$$\left|x(0)-\left(-\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}\right)\right|<2\sqrt{|\mu|}\max\left\{\frac{(1-2q)(1+q^2)}{1+q},\frac{(1-q)^2}{(1+q)^3}\right\},$$

то $T_{\max}=+\infty$ *і* $\lim_{t\to+\infty}x(t)=-\dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$*;*

2) *якщо* $\mu < 0,\ \dfrac{1}{2} \le q < 1$ *і*

$$\left| x(0) - \left(-\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} \right) \right| < 2\sqrt{|\mu|}\frac{(1-q)^2}{(1+q)^3},$$

то $T_{\max} = +\infty$ *і* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$*;*

3) *якщо* $\mu < 0,\ 0 < q < \dfrac{1}{2}$ *і* $x(0) > \dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$, *то* $T_{\max} < +\infty,\ x'(t) > 0$ *для всіх* $t \in [0, T_{\max})$ *і* $\lim_{t\to T_{\max}-0} x(t) = +\infty$*;*

4) *якщо* $\mu > 0,\ 0 < q < \sqrt{2} - 1$ *і*

$$-q^{-1}\left(2q + q^2 + \frac{1}{1-q^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{1+q^2}} \le x(0) < 0,$$

то $T_{\max} < +\infty,\ x'(t) > 0$ *для всіх* $t \in [0, T_{\max})$ *і* $\lim_{t\to T_{\max}-0} x(t) = +\infty$*;*

5) *якщо* $\mu \ge 0,\ x(0) \ge 0,\ \mu + x(0) > 0$ *і* $0 < q < \dfrac{1}{2}$, *то* $T_{\max} < +\infty,\ x'(t) > 0$ *для всіх* $t \in [0, T_{\max})$ *і* $\lim_{t\to T_{\max}-0} x(t) = +\infty$.

Доведення. *Твердження 1, 2.* Зробимо в рівнянні (1) заміну змінних $x(t) = -\dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} + y(t)$:

$$y'(t) + q^2 y'(qt) = -ay(t) + aqy(qt) + \big(y(t) - qy(qt)\big)^2, \tag{2}$$

де $a \overset{\text{df}}{=} 2\sqrt{|\mu|}$, і будемо вважати, що $y(0) \ne 0$.

Оскільки

$$\frac{d}{dt}y^2(t)\Big|_{t=0} = 2\frac{(1-q)^2}{1+q^2}\left(x(0) - \frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}\right) y^2(0) < 0,$$

існує $t_0 \in (0, T_{\max})$ таке, що

$$\big|y(t)\big| < \big|y(0)\big| \tag{3}$$

для всіх $t \in (0, t_0)$.

Доведемо від протилежного, що $T_{\max} = +\infty$ і нерівність (3) виконується для всіх $t > 0$. Якщо це не так, то існує $t_1 \ge t_0$ таке, що нерівність $\big|y(t)\big| < \big|y(0)\big|$ виконується для всіх $t \in (0, t_1)$ і $|y(t_1)| = \big|y(0)\big|$, оскільки згідно з лемою 6 у [2] з умови $T_{\max} < +\infty$ отримуємо властивість $\limsup_{t\to T_{\max}-0} \big|y(t)\big| = +\infty$. З леми 5 у [2] випливає, що в початковій задачі (2), $y(0) \in \mathbb{R}$, рівняння (2) можна замінити еквівалентним рівнянням

$$y'(t) = -ay(t) + aq(1+q)\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-q^2\right)^n y\left(q^{n+1}t\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n}t\big) - qy\big(q^{2n+1}t\big)\right)^2 - q^2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n+1}t\big) - qy\big(q^{2n+2}t\big)\right)^2.$$

Визначимо функцію Ляпунова $U(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{2}y^2(t)$ та оцінимо похідну цієї функції у точці t_1:

$$U'(t_1) = -ay^2(t_1) + aq(1+q)y(t_1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^n y\left(q^{n+1}t_1\right) +$$

$$+\, y(t_1)\left[\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n}t_1\big) - qy\big(q^{2n+1}t_1\big)\right)^2 -\right.$$

$$\left. -q^2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n+1}t_1\big) - qy\big(q^{2n+2}t_1\big)\right)^2\right] \le$$

$$\le -ay^2(0) + a\frac{q(1+q)}{1-q^2}y^2(0) +$$

$$+\, \big|y(0)\big|\max\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n}t_1\big) - qy\big(q^{2n+1}t_1\big)\right)^2,\right.$$

$$\left. q^2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n+1}t_1\big) - qy\big(q^{2n+2}t_1\big)\right)^2\right\}.$$

Оцінимо суми під знаком максимуму:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n}t_1\big) - qy\big(q^{2n+1}t_1\big)\right)^2 \le \frac{(1+q)^2}{1-q^4}\big|y(0)\big|^2,$$

$$q^2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n+1}t_1\big) - qy\big(q^{2n+2}t_1\big)\right)^2 \le q^2\frac{(1+q)^2}{1-q^4}\big|y(0)\big|^2.$$

Отже, при $0 < q < \dfrac{1}{2}$ оцінку похідної функції Ляпунова можна продовжити таким чином:

$$U'(t_1) \le -\left[a\frac{1-2q}{1-q} - \big|y(0)\big|\frac{1+q}{(1-q)(1+q^2)}\right]\big|y(0)\big|^2 < 0.$$

Отримана суперечність доводить, що $T_{\max} = +\infty$ і нерівність (3) виконується для всіх $t > 0$.

Доведемо рівність $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ також від протилежного. Припустимо, що

$$M_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \limsup_{t\to+\infty}\big|y(t)\big| > 0.$$

Тоді існує послідовність $t_k,\ k = 0, 1\ldots$, така, що $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ і $\lim_{k\to+\infty}|y(t_k)| = M_0$. Оскільки $M_0 \le \big|y(0)\big|$, існує число $\varepsilon > 0$ таке, що виконується нерівність

$$M_1 \overset{\mathrm{df}}{=} a\left(M_0 - \varepsilon\right)^2 - a\frac{q}{1-q}\left(M_0^2 + \varepsilon\right) - \frac{1+q}{(1-q)(1+q^2)}\left(M_0^3 + \varepsilon\right) > 0.$$

Оскільки розв'язок $y(t)$ обмежений, то обмежена й похідна $y'(t)$, тому існують k_0 і $\delta > 0$ такі, що $\big|y(t)\big| \ge M_0 - \varepsilon$ для $t \in (t_k - \delta, t_k + \delta),\ k \ge k_0$. Тоді при $t \ge T_0$, де T_0 — досить велике число, отримуємо оцінки

$$\left|y(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^n y\left(q^{n+1}t\right)\right| \le \frac{M_0^2+\varepsilon}{1-q^2},$$

$$\left|y(t)\left[\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n}t\big)-qy\big(q^{2n+1}t\big)\right)^2 - q^2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n+1}t\big)-qy\big(q^{2n+2}t\big)\right)^2\right]\right| \le$$
$$\le \frac{1+q}{(1-q)(1+q^2)}\left(M_0^3+\varepsilon\right).$$

Звідси для деякого $k_1 \ge k_0$ випливає нерівність $U'(t) \le -M_1,\ t \in (t_k-\delta, t_k+\delta),\ k \ge k_1$. Тобто $U(t_k-\delta) \ge U(t_k)+M_1\delta,\ k \ge k_1$. Отримана суперечність доводить, що $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Тепер розглянемо функцію $z(t) \overset{\text{df}}{=} y(t)+qy(qt)$ при $0<q<1$. Оскільки

$$\frac{d}{dt}z^2(t)\bigg|_{t=0} = 2(1+q)(1-q)^2\left(x(0)-\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}\right)y^2(0) < 0,$$

існує $t_0 \in (0, T_{\max})$ таке, що

$$|z(t)| < \big|z(0)\big| \tag{4}$$

для всіх $t \in (0, t_0)$.

Доведемо від протилежного, що $T_{\max} = +\infty$ і остання нерівність виконується для всіх $t>0$. Якщо це не так, то існує $t_1 \in [t_0, T_{\max})$ таке, що нерівність (4) виконується для всіх $t \in (0, t_1)$ і $\big|z(t_1)\big| = \big|z(0)\big|$. Визначимо функціонал Ляпунова

$$V(t) = \frac{1}{2}z^2(t) + a\theta\int\limits_{qt}^{t} y^2(s)ds,$$

де $\theta = \dfrac{2q}{1+q}$. Використовуючи (2), отримуємо

$$V'(t) = -a(1-\theta)y^2(t) - aq(\theta-q)y^2(qt) + \big(y(t)-qy(qt)\big)\big(y^2(t)-q^2y^2(qt)\big).$$

Оцінимо різницю $y(t)-qy(qt)$. Для цього припустимо, що $\big|y(t)\big|$ на відрізку $[0,t_1]$ досягає свого максимуму в точці t_2. Тоді з (4) отримуємо нерівність

$$|y(t_2)| \le \big|z(t_2)\big| + q\big|y(qt_2)\big| \le \big|z(0)\big| + q|y(t_2)|,$$

тобто

$$\max_{0\le t\le t_1}\big|y(t)\big| \le \frac{1+q}{1-q}\left|x(0)-\left(-\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}\right)\right|$$

і

$$|y(t)-qy(qt)| \le \frac{(1+q)^2}{1-q}\left|x(0)-\left(-\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}\right)\right| \overset{\text{df}}{=} M_2, \quad t \in [0,t_1].$$

Таким чином, виконується нерівність

$$V'(t) \le -\left(a(1-\theta)-M_2\right)y^2(t) - \big(aq(\theta-q)-q^2M_2\big)\,y^2(qt).$$

Зауважимо, що

$$M_2 < \sup_{q \le \theta \le 1} \min\left\{a(1-\theta), a\frac{\theta - q}{q}\right\} = \min\left\{a(1-\theta), a\frac{\theta - q}{q}\right\}\Big|_{\theta = \frac{2q}{1+q}} = a\frac{1-q}{1+q},$$

і запишемо останню нерівність для $V'(t)$ у вигляді

$$V'(t) \le -\left(a\frac{1-q}{1+q} - M_2\right)\left(y^2(t) + q^2 y^2(qt)\right) \le 0. \tag{5}$$

Тобто функціонал $V(t)$ не зростає на відрізку $[0, t_1]$ і $V'(0) < 0$, оскільки це суперечить умові $\left|z(t_1)\right| = \left|z(0)\right|$. Тому $T_{\max} = +\infty$ і нерівність (4) виконується для всіх $t > 0$.

Обмеженість функції $z(t)$ тягне за собою обмеженість розв'язку $y(t)$, а отже, й обмеженість похідної $y'(t)$.

Доведемо від супротивного, що $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Припустимо, що

$$M_0 = \limsup_{t\to+\infty} \left|y(t)\right| > 0.$$

Тоді існує послідовність t_n така, що

$$t_{n+1} - t_n \ge \frac{M_0}{2M_3}, \qquad |y(t_n)| \ge \frac{M_0}{2}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

де $M_3 = \max\left\{1, \sup_{t\ge 0} |y'(t)|\right\}$. Не існує перетинів між інтервалами

$$I_n = \left(t_n - \frac{M_0}{4M_3}, t_n + \frac{M_0}{4M_3}\right), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки

$$\left|y(t)\right| \ge |y(t_n)| - \frac{M_0}{4M_3} \sup_{t\ge 0} |y'(t)| \ge \frac{M_0}{4}, \quad t \in I_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

і нерівність (5) виконується для всіх $t \ge 0$, то

$$V'(t) \le -\left(a\frac{1-q}{1+q} - \frac{(1+q)^2}{1-q}\left|y(0)\right|\right)\frac{M_0^2}{16} < 0, \quad t \in I_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Проте монотонно незростаючий функціонал $V(t) \ge 0$. Знайдена суперечність доводить рівність $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Твердження 3. Тепер зробимо в рівнянні (1) іншу заміну змінних $x(t) = \dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} + y(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + qy(qt)\right) = ay(t) - aqy(qt) + \left(y(t) - qy(qt)\right)^2, \tag{6}$$

де $a \overset{\mathrm{df}}{=} 2\sqrt{|\mu|}$. Обчислимо похідну у початковій точці

$$y'(0) = \frac{(1-q)^2}{1+q^2}\left(\frac{a}{1-q} + y(0)\right)y(0) > 0.$$

Доведемо від протилежного, що $y'(t) > 0$ для всіх $t \in [0, T_{\max})$. Інакше існує $t_1 \in (0, T_{\max})$ таке, що $y'(t) > 0$ для всіх $t \in [0, t_1)$ і $y'(t_1) = 0$. Застосовуючи лему 5 з [2] до рівняння (6), отримуємо

$$y'(t) = a\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left[y\left(q^{2n}t\right) - q(1+q)y\left(q^{2n+1}t\right) + q^3 y\left(q^{2n+2}t\right)\right] +$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n}t\big)-q^2y\big(q^{2n+2}t\big)\right)\left(y\big(q^{2n}t\big)-2qy\big(q^{2n+1}t\big)+q^2y\big(q^{2n+2}t\big)\right). \qquad (7)$$

Оскільки $y(t)>0$ і $y'(t)>0$ для всіх $t\in[0,t_1)$, то з (7) випливає нерівність $y'(t_1)>0$. Одержали суперечність.

Отже, $y'(t)>0$ для всіх $t\in[0,T_{\max})$. Тоді з (7) отримуємо

$$y'(t)>\left(y(t)-q^2y(q^2t)\right)\left(y(t)-2qy(qt)+q^2y(q^2t)\right)>$$
$$>(1-q^2)(1-2q)y^2(t)$$

для $t\in(0,T_{\max})$. Визначимо для стислості $c\overset{\mathrm{df}}{=}(1-q^2)(1-2q)>0$ і на основі останньої нерівності оцінимо розв'язок $y(t)$ знизу:

$$y(t)>-\frac{1}{c\left(t-\dfrac{1}{cy(0)}\right)}.$$

Тобто $T_{\max}\le(cy(0))^{-1}$, $x'(t)>0$ для всіх $t\in[0,T_{\max})$ і $\lim_{t\to T_{\max}-0}x(t)=+\infty$.

Твердження 4. Доведемо від протилежного, що $x'(t)>0$ для всіх $t\in[0,T_{\max})$. В іншому випадку існує $t_1\in(0,T_{\max})$ таке, що $x'(t)>0$ для всіх $t\in[0,t_1)$ і $x'(t_1)=0$. Якщо $x(qt_1)\le 0$, то

$$x(0)<x\big(q^{2n+2}t_1\big)<x\big(q^{2n+1}t_1\big)\le 0,$$
$$\left|x\big(q^{2n+1}t_1\big)-qx\big(q^{2n+2}t_1\big)\right|<\left|x(0)\right|,\quad n=0,1,\ldots,$$

і, застосовуючи лему 5 з [2] до рівняння (1), отримуємо

$$x'(t_1)=\frac{\mu}{1+q^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^n\left(x(q^nt_1)-qx\left(q^{n+1}t_1\right)\right)^2\ge$$
$$\ge\frac{\mu}{1+q^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^{2n+1}\left(x\big(q^{2n+1}t_1\big)-qx\big(q^{2n+2}t_1\big)\right)^2>$$
$$>\frac{\mu}{1+q^2}-x^2(0)q^2\frac{1}{1-q^4}>0.$$

Це суперечність. Отже, $x(qt_1)>0$. Тоді для деякого $n\ge 2$ виконується нерівність $x(q^nt_1)\le$ $\le 0<x\left(q^{n-1}t_1\right)$. Спочатку розглянемо випадок $n=2m+2$, $m\ge 0$, для цього запишемо рівняння (1) у такому вигляді:

$$x'(t_1)=\frac{\mu}{1+q^2}+\sum_{n=0}^{m-1}q^{4n}\left(x\big(q^{2n}t_1\big)-q^2x\big(q^{2n+2}t_1\big)\right)\times$$
$$\times\left(x\big(q^{2n}t_1\big)-2qx\big(q^{2n+1}t_1\big)+q^2x\big(q^{2n+2}t_1\big)\right)+$$
$$+\sum_{n=2m}^{+\infty}\left(-q^2\right)^n\left(x(q^nt_1)-qx\left(q^{n+1}t_1\right)\right)^2\ge$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\mu}{1+q^2} + \left(-q^2\right)^{2m} \left(x(q^{2m}t_1) - qx\left(q^{2m+1}t_1\right)\right)^2 + \\
&\quad + \left(-q^2\right)^{2m+1} \left(x\left(q^{2m+1}t_1\right) - qx\left(q^{2m+2}t_1\right)\right)^2 + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-q^2\right)^{2m+3+2n} \left(x\left(q^{2m+3+2n}t_1\right) - qx\left(q^{2m+3+2n+1}t_1\right)\right)^2 > \\
&> \frac{\mu}{1+q^2} + \left(-q^2\right)^{2m} (1-q)^2 x^2(q^{2m}t_1) + \\
&\quad + \left(-q^2\right)^{2m+1} (1+q)^2 \left(\max\left\{x\left(q^{2m+1}t_1\right), \left|x(0)\right|\right\}\right)^2 + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-q^2\right)^{2m+3+2n} \left(x\left(q^{2m+3+2n}t_1\right) - qx\left(q^{2m+3+2n+1}t_1\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Якщо $x\left(q^{2m+1}t_1\right) \leq \left|x(0)\right|$, то

$$\begin{aligned}
x'(t_1) &> \frac{\mu}{1+q^2} + q^{4m}(1-q)^2 x^2(q^{2m}t_1) - q^{4m+2}\left(2q + q^2 + \frac{1}{1-q^4}\right) x^2(0) \geq \\
&\geq q^{4m}(1-q)^2 x^2(q^{2m}t_1) > 0.
\end{aligned}$$

Суперечність. Отже, $x\left(q^{2m+1}t_1\right) > \left|x(0)\right|$. Тоді

$$\begin{aligned}
x'(t_1) &> \frac{\mu}{1+q^2} + \left(-q^2\right)^{2m} (1-q)^2 x^2(q^{2m}t_1) + \left(-q^2\right)^{2m+1} (1+q)^2 x^2\left(q^{2m+1}t_1\right) + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-q^2\right)^{2m+3+2n} \left(x\left(q^{2m+3+2n}t_1\right) - qx\left(q^{2m+3+2n+1}t_1\right)\right)^2 > \\
&> \frac{\mu}{1+q^2} + \left(-q^2\right)^{2m} (1-q)^2 x^2(q^{2m}t_1) + \left(-q^2\right)^{2m+1} (1+q)^2 x^2(q^{2m}t_1) - \\
&\quad - q^{4m+6} x^2(0) \frac{1}{1-q^4} > \\
&\quad > q^{4m}\left((1-q)^2 - q^2(1+q)^2\right) x^2(q^{2m}t_1) > 0.
\end{aligned}$$

Знову отримали суперечність. Тому $n = 2m+1,\ m \geq 1$. Знову запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\begin{aligned}
x'(t_1) &= \frac{\mu}{1+q^2} + \sum_{n=0}^{m-1} q^{4n} \left(x\left(q^{2n}t_1\right) - q^2 x\left(q^{2n+2}t_1\right)\right) \times \\
&\quad \times \left(x\left(q^{2n}t_1\right) - 2qx\left(q^{2n+1}t_1\right) + q^2 x\left(q^{2n+2}t_1\right)\right) + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-q^2\right)^{2m+n} \left(x\left(q^{2m+n}t_1\right) - qx\left(q^{2m+n+1}t_1\right)\right)^2 > \\
&> \frac{\mu}{1+q^2} + \left(x(t_1) - q^2 x\left(q^2 t_1\right)\right)\left(x(t_1) - 2qx(qt_1) + q^2 x\left(q^2 t_1\right)\right) +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^{2m+1+2n}\left(x\left(q^{2m+1+2n}t_1\right)-qx\left(q^{2m+1+2n+1}t_1\right)\right)^2>$$

$$>\frac{\mu}{1+q^2}+\left(x(t_1)-q^2x\left(q^2t_1\right)\right)\left(x(t_1)-2qx(qt_1)\right)-q^{4m+2}x^2(0)\frac{1}{1-q^4}>$$

$$>(1-q^2)(1-2q)x^2(t_1)>0.$$

Суперечність. Таким чином, $x'(t)>0$ для всіх $t\in[0,T_{\max})$.

Покажемо, що розв'язок набуває додатних значень. Припустимо, що це не так, тоді монотонно зростаючий і обмежений зверху розв'язок, по-перше, існує на всій півосі, тобто $T_{\max}=+\infty$, оскільки інакше згідно з лемою 6 у [2]: $\limsup_{t\to T_{\max}-0}|x(t)|=+\infty$; а по-друге, існує скінченна границя $\lim_{t\to+\infty}x(t)$. Оскільки

$$\lim_{t\to+\infty}x'(t)=\frac{1}{1+q^2}\left(\mu+(1-q)^2\left(\lim_{t\to+\infty}x(t)\right)^2\right)>0,$$

одержуємо суперечність. Таким чином, існує точка $t_2\in(0,T_{\max})$, у якій $x(t_2)>0$.

Нехай $t\in(t_2,T_{\max})$. Якщо $x(qt)\le 0$, то

$$x(0)<x\big(q^{2n+2}t\big)<x\big(q^{2n+1}t\big)\le 0,$$

$$\big|x\big(q^{2n+1}t\big)-qx\big(q^{2n+2}t\big)\big|<\big|x(0)\big|,\quad n=0,1,\ldots,$$

і

$$x'(t)=\frac{\mu}{1+q^2}+(x(t)-qx(qt))^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-q^2\right)^n\left(x\left(q^nt\right)-qx\left(q^{n+1}t\right)\right)^2\ge$$

$$\ge\frac{\mu}{1+q^2}+x^2(t)+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^{2n+1}\left(x\big(q^{2n+1}t\big)-qx\big(q^{2n+2}t\big)\right)^2>$$

$$>\frac{\mu}{1+q^2}+x^2(t)-x^2(0)q^2\frac{1}{1-q^4}>x^2(t).$$

У випадку $x(qt)>0$ для деякого $n\ge 2$ виконується нерівність $x\left(q^nt\right)\le 0<x\left(q^{n-1}t\right)$. Припустимо, що $n=2m+2,\ m\ge 1$, і запишемо рівняння у вигляді

$$x'(t)=\frac{\mu}{1+q^2}+\sum_{n=0}^{m-1}q^{4n}\left(x\big(q^{2n}t\big)-q^2x\big(q^{2n+2}t\big)\right)\times$$

$$\times\left(x\big(q^{2n}t\big)-2qx\big(q^{2n+1}t\big)+q^2x\big(q^{2n+2}t\big)\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^{2m+n}\left(x\left(q^{2m+n}t\right)-qx\left(q^{2m+n+1}t\right)\right)^2\ge$$

$$\ge\frac{\mu}{1+q^2}+\left(x(t)-q^2x(q^2t)\right)\left(x(t)-2qx(qt)+q^2x(q^2t)\right)+$$

$$+\left(-q^2\right)^{2m}\left(x\big(q^{2m}t\big)-qx\big(q^{2m+1}t\big)\right)^2+\left(-q^2\right)^{2m+1}\left(x\big(q^{2m+1}t\big)-qx\left(q^{2m+2}t\big)\right)^2+$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^{2m+3+2n}\left(x\left(q^{2m+3+2n}t\right)-qx\left(q^{2m+3+2n+1}t\right)\right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{\mu}{1+q^2}+\left(x(t)-q^2x(q^2t)\right)\left(x(t)-2qx(qt)+q^2x(q^2t)\right)+$$

$$+\left(-q^2\right)^{2m}(1-q)^2x^2\left(q^{2m}t\right)+\left(-q^2\right)^{2m+1}(1+q)^2\left(\max\left\{x\left(q^{2m+1}t\right),\left|x(0)\right|\right\}\right)^2+$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-q^2\right)^{2m+3+2n}\left(x\left(q^{2m+3+2n}t\right)-qx\left(q^{2m+3+2n+1}t\right)\right)^2.$$

Знову розглянемо два випадки. Якщо $x\left(q^{2m+1}t\right)\leq\left|x(0)\right|$, то

$$x'(t)>\frac{\mu}{1+q^2}+\left(x(t)-q^2x(q^2t)\right)\left(x(t)-2qx(qt)+q^2x(q^2t)\right)+$$

$$+q^{4m}(1-q)^2x^2\left(q^{2m}t\right)-q^{4m+2}\left(2q+q^2+\frac{1}{1-q^4}\right)x^2(0)>$$

$$>(1-q^2)(1-2q)x^2(t).$$

Розглянемо другий випадок $x\left(q^{2m+1}t\right)>\left|x(0)\right|$. Тоді

$$x'(t)>\frac{\mu}{1+q^2}+\left(x(t)-q^2x(q^2t)\right)\left(x(t)-2qx(qt)+q^2x(q^2t)\right)+$$

$$+\left(-q^2\right)^{2m}(1-q)^2x^2\left(q^{2m}t\right)+\left(-q^2\right)^{2m+1}(1+q)^2x^2\left(q^{2m+1}t\right)-$$

$$-q^{4m+6}x^2(0)\frac{1}{1-q^4}>$$

$$>\frac{\mu}{1+q^2}+\left(x(t)-q^2x(q^2t)\right)\left(x(t)-2qx(qt)+q^2x(q^2t)\right)+$$

$$+q^{4m}\left((1-q)^2-q^2(1+q)^2\right)x^2\left(q^{2m}t\right)-q^{4m+6}x^2(0)\frac{1}{1-q^4}>$$

$$>(1-q^2)(1-2q)x^2(t).$$

Якщо $n=2$, то, замінивши в попередніх міркуваннях для точки $t=t_1$ величину t_1 довільною точкою $t\in(t_2,T_{\max})$, отримуємо у випадку $x(qt)\leq\left|x(0)\right|$ нерівність

$$x'(t)>(1-q)^2x^2(t),$$

а у випадку $x(qt)>\left|x(0)\right|$ — нерівність

$$x'(t)>\left((1-q)^2-q^2(1+q)^2\right)x^2(t).$$

Аналогічно при $n=2m+1,\ m\geq1$, замінюючи в попередніх міркуваннях для точки $t=t_1$ величину t_1 довільною точкою $t\in(t_2,T_{\max})$, отримуємо оцінку

$$x'(t)>(1-q^2)(1-2q)x^2(t).$$

Таким чином, для $t\in(t_2,T_{\max})$ в усіх можливих випадках виконується нерівність

$$x'(t)>cx^2(t),$$

де

$$c = \min\left\{\big((1-q)^2 - q^2(1+q)^2\big), (1-q^2)(1-2q)\right\} > 0.$$

Тоді

$$x(t) > -\frac{1}{c\left(t - t_2 - \dfrac{1}{cx(t_2)}\right)}, \quad t \in (t_2, T_{\max}),$$

отже,

$$T_{\max} \le t_2 + \frac{1}{cx(t_2)} < +\infty,$$

$x'(t) > 0$ для всіх $t \in [0, T_{\max})$ і $\lim_{t\to T_{\max}-0} x(t) = +\infty$.

Твердження 5. Знову доведемо від протилежного, що $x'(t) > 0$ для всіх $t \in [0, T_{\max})$. В іншому випадку існує $t_1 \in (0, T_{\max})$ таке, що $x'(t) > 0$ для всіх $t \in [0, t_1)$ і $x'(t_1) = 0$. Тоді достатньо записати рівняння у вигляді

$$x'(t) = \frac{\mu}{1+q^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(x\big(q^{2n}t\big) - q^2x\big(q^{2n+2}t\big)\right) \times$$
$$\times \left(x\big(q^{2n}t\big) - 2qx\big(q^{2n+1}t\big) + q^2x\big(q^{2n+2}t\big)\right),$$

щоб отримати протиріччя $x'(t_1) > 0$.

З цього ж запису та додатності похідної отримуємо нерівність

$$x'(t) > (1-q^2)(1-2q)x^2(t), \quad t \in (0, T_{\max}).$$

Визначимо для стислості $c \overset{\text{df}}{=} (1-q^2)(1-2q) > 0$ і виберемо довільне $t_2 \in (0, T_{\max})$, тоді $x(t_2) > 0$ і

$$x(t) > -\frac{1}{c\left(t - t_2 - \dfrac{1}{cx(t_2)}\right)}, \quad t \in (t_2, T_{\max}).$$

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що використовуючи ще одну формулу для рівняння (6):

$$y'(t) = ay(t) - aq(1+q)\sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n}\left(y\big(q^{2n+1}t\big) - q^2y\big(q^{2n+2}t\big)\right) +$$
$$+ \big(y(t) - qy(qt)\big)^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} q^{4n+2}\left(y\big(q^{2n+1}t\big) - 2qy\big(q^{2n+2}t\big) + \right.$$
$$\left. + q^2y\big(q^{2n+3}t\big)\right)\left(y\big(q^{2n+1}t\big) - q^2y\big(q^{2n+3}t\big)\right),$$

таке подання для рівняння (1):

$$x'(t) = \frac{\mu}{1+q^2} + (x(t) - qx(qt))^2 -$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}(q^2)^{2n+1}\left(x\big(q^{2n+1}t\big)-q^2x\big(q^{2n+3}t\big)\right)\times$$
$$\times\left(x\big(q^{2n+1}t\big)-2qx\big(q^{2n+2}t\big)+q^2x\big(q^{2n+3}t\big)\right)$$

і міркування з доведення теореми 1, можна оцінити величину $T_{\max}$ знизу та зверху через параметри рівняння та початкове значення розв'язку. У загальному випадку для оцінки величини $T_{\max}$ знизу можна застосувати лему 7 з [2] (див. теорему 9 [2]).

Надалі асимптотичні символи O слід розуміти при $t\to+\infty$, а розв'язок рівняння (1) визначено на деякій півосі $(t_0,+\infty),\ t_0\geq 0.$

За певних умов для досить гладкого розв'язку знайдемо асимптотичні зображення як самого розв'язку, так і його похідних із точністю, яка залежить від гладкості розв'язку.

Теорема 2. *Якщо $\mu<0$ і $0<q<1$, то для $l+1$ разів неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ рівняння (1) такого, що $\lim_{t\to+\infty}x(t)=-\dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$ і $(l+1)$-ша похідна функції $x(t)$ є неперервним розв'язком диференціального рівняння*

$$\frac{d}{dt}\left(x^{(l+1)}(t)+q^{l+2}x^{(l+1)}(qt)\right)-\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}\left(x(t)-qx(qt)\right)^2=0,$$

де $l\geq 2$, мають місце такі асимптотичні зображення:

$$x(t)=-\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}+t^{-1}h_0(\ln t)+\ldots+t^{-l}h_{l-1}(\ln t)+O\big(t^{-(l+1)}\big),$$

$$x^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-1}h_0(\ln t)\right]+\ldots+\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-(l-n)}h_{l-n-1}(\ln t)\right]+O\big(t^{-(l+1)}\big),\quad 1\leq n\leq l-1,$$

де $h_m\in C^{l-1-m}$ — періодичні функції з періодом $\ln q$, які визначаються рекурентною формулою

$$h_m(t)=\frac{1}{2\sqrt{|\mu|}\big(1-q^{-m}\big)}\left[\sum_{k=1}^{m-2}\left(1-q^{-k}\right)\left(1-q^{-(m-k-1)}\right)h_k(t)h_{m-k-1}(t)-\right.$$
$$\left.-\left(1+q^{-(m-1)}\right)h'_{m-1}(t)+m\left(1+q^{-(m-1)}\right)h_{m-1}(t)\right],\quad m=\overline{1,l-1}.$$

Доведення. Запишемо рівняння (2) у такій формі:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)-(-q)y(qt)\right)=-\big(a+2\big(qy(qt)-y(t)\big)\big)y(t)+$$
$$+\left(aq+2q\big(qy(qt)-y(t)\big)\right)y(qt).$$

Застосовуючи лему 8 з [2] до останнього рівняння, отримуємо оцінку $y(t)=O\big(t^{\alpha_0}\big),\ \alpha_0>-\dfrac{1}{2}.$

Розглянемо рівняння для похідної шуканої функції

$$\frac{d}{dt}\left(y'(t)-\big(-q^2\big)y'(qt)\right)=-\big(a+2\big(qy(qt)-y(t)\big)\big)y'(t)+$$
$$+\left(aq^2+2q^2\big(qy(qt)-y(t)\big)\right)y'(qt).$$

Знову застосовуючи до нього лему 8 з [2], отримуємо оцінку $y'(t) = O\left(t^{\alpha_1}\right),\ \alpha_1 > -\dfrac{3}{2}$.

Запишемо рівняння (2) як функціональне рівняння:

$$y(t) - \frac{aq + 2q\big(qy(qt) - y(t)\big)}{a + 2\big(qy(qt) - y(t)\big)} y(qt) = -\frac{\dfrac{d}{dt}\left(y(t) + qy(qt)\right)}{a + 2\big(qy(qt) - y(t)\big)}.$$

Застосувавши лему 4 з [2] до останнього рівняння, отримаємо більш точну оцінку $y(t) = O\big(t^{\alpha_0}\big),\ \alpha_0 > -1$.

Ще раз запишемо рівняння (2) як функціональне рівняння:

$$y(t) - qy(qt) = h(t),$$

де

$$h(t) = \frac{1}{a}\left(-y'(t) - q^2 y'(qt) + \big(qy(qt) - y(t)\big)^2\right) = O\left(t^{\alpha}\right), \quad \alpha > -\frac{3}{2}.$$

Застосовуючи лему 3 з [2] до останнього рівняння, отримуємо оцінку $y(t) = O\left(t^{-1}\right)$.

Використовуючи метод математичної індукції та повторюючи викладені вище міркування, можна довести оцінку $y^{(n)}(t) = O\left(t^{-(n+1)}\right)$ для $0 \le n \le l$.

Застосовуючи лему 3 з [2] до рівняння

$$y^{(n)}(t) - q^{n+1} y^{(n)}(qt) = h(t), \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{1}{a}\Bigg(&-y^{(n+1)}(t) - q^{n+2} y^{(n+1)}(qt) + \\ &+ \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(q^{m+1} y^{(m)}(qt) - y^{(m)}(t)\right) \times \\ &\times \left(q^{n-m+1} y^{(n-m)}(qt) - y^{(n-m)}(t)\right)\Bigg) = \\ = O\big(t^{-(n+2)}\big), &\quad 0 \le n \le l-1, \end{aligned}$$

отримуємо асимптотичне зображення

$$y^{(n)}(t) = t^{-(n+1)} H_{n,0}(\ln t) + O\big(t^{-(n+2)}\big),$$

де $H_{n,0}(t)$ — неперервна періодична функція з періодом $\ln q$. Звідси, з урахуванням леми 12 з [2], випливає, що $H_{n,0} \in C^1$ і

$$H'_{n,0}(t) = H_{n+1,0}(t) + (n+1) H_{n,0}(t), \quad 0 \le n \le l-2,$$

або (еквівалентно)

$$t^{-(n+2)} H_{n+1,0}(\ln t) = \frac{d}{dt}\big[t^{-(n+1)} H_{n,0}(\ln t)\big].$$

Таким чином, $H_{0,0} \in C^{l-1}$ і

$$t^{-(n+1)} H_{n,0}(\ln t) = \frac{d^n}{dt^n}\big[t^{-1} H_{0,0}(\ln t)\big], \quad 0 \le n \le l-1.$$

Позначимо для стислості $h_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} H_{0,0}$ і запишемо отримані асимптотичні розклади у вигляді

$$x(t) = -\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} + t^{-1} h_0(\ln t) + O\big(t^{-2}\big),$$

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-1} h_0(\ln t)\right] + O\big(t^{-(n+2)}\big), \quad 1 \le n \le l-1.$$

За допомогою рівняння (8), а також лем 3 і 12 з [2] можна вивести такі асимптотичні формули:

$$x(t) = -\frac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} + t^{-1} h_0(\ln t) + \ldots + t^{-l} h_{l-1}(\ln t) + O\big(t^{-(l+1)}\big),$$

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-1} h_0(\ln t)\right] + \ldots + \frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-(l-n)} h_{l-n-1}(\ln t)\right] + O\big(t^{-(l+1)}\big), \quad 1 \le n \le l-1,$$

де $h_m \in C^{l-1-m}$ — періодичні функції з періодом $\ln q$.

Підставляючи знайдені асимптотичні зображення для $x(t)$ та $x'(t)$ у рівняння (1), отримуємо рекурентну формулу для коефіцієнтів h_m.

Теорему 2 доведено.

Зазначимо, що розвинутий у [2] підхід можна частково розповсюдити до дослідження асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з декількома лінійними та постійними запізненнями, які вивчалися в [3].

Література

1. V. P. Spiridonov, *Self-similar potentials in quantum mechanics and coherent states*, Phys. Particles Nuclei, **52**, 274 – 289 (2021).
2. Y. Liu, *Regular solutions of the Shabat equation*, J. Differential Equations, **154**, 1 – 41 (1999).
3. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский, *Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений*, Нелін. коливання, **19**, № 3, 311 – 348 (2016).

Одержано 14.01.22,
після доопрацювання — 03.02.22