

## ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОВЕДІНКИ ТРАЄКТОРІЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ ВІД ВЕКТОРА ВЗАЄМОДІЇ\*

**О. Р. Сатур**

*Ин-т математики НАН України*

*вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна*

*e-mail: osatur@imath.kiev.ua*

We investigate several models of dynamic conflict systems the behavior of which is characterized by some quantity called an interaction vector. The interaction vector determines the dynamics of the entire system and its limiting states. The existence of limiting equilibrium states of such systems is proved and conditions for the existence of limit cycles are found. The nonlinear dynamics of the system is illustrated by specific computer examples.

Досліджується ряд моделей динамічних систем конфлікту, поведінка яких характеризується деякою величиною, яку називаємо вектором взаємодії. Вектор взаємодії визначає динаміку всієї системи та граничні стани системи. Доведено існування рівноважних граничних станів таких систем і знайдено умови існування граничних циклів. На конкретних комп'ютерних прикладах проілюстровано різноманітну нелінійну динаміку системи.

**1. Вступ.** Ідея об'єднати поняття динамічної системи з проблемою прийняття оптимального розв'язку в конкурентній боротьбі привела до виникнення терміну “динамічна система конфлікту” (див. [1, 2]). У [3] побудовано найпростішу динамічну систему конфлікту, яку задають різницевиими рівняннями. Ці рівняння по суті є узагальненням рівнянь Лотки – Вольтерри на стохастично векторний випадок довільної розмірності. Цим самим було започатковано новий підхід до побудови моделей із конкуруючими сторонами [2 – 5]. У цьому підході аналоги скалярних величин  $P$ ,  $N$ , які мали зміст кількості популяції, замінюють на векторні,  $\mathbf{p}$  та  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad n > 1.$$

Координати  $p_i$ ,  $r_i$  мають статистичний сенс. Вони відповідають ймовірностям перебування кожного з опонентів у  $i$ -му регіоні (позиції) ресурсного простору. У ще більш загальному підході замість векторів  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  використовують випадкові розподіли, задані ймовірнісними мірами  $\mu$ ,  $\nu$ . Закон динаміки записано у вигляді системи досить простих, але нелінійних, різницевих або диференціальних рівнянь. Найпростіший варіант таких рівнянь має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} p_i^t (1 - \alpha r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} r_i^t (1 - \alpha q_i^t), \quad -1 \leq \alpha \leq 1,$$

де  $z = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  — нормувальний знаменник,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярний добуток у  $\mathbb{R}^n$ .

Побудована модель описувала конфліктний перерозподіл абстрактного ресурсного простору між двома альтернативними сторонами. Згодом виникла назва — динамічна система

\* Виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, 2020.02/0089.

конфлікту зі взаємодією відштовхування. Динамічні системи конфлікту з притягальною взаємодією є не менш актуальними. Вони моделюють перерозподіл ресурсного простору та присутність конкурентів у різних регіонах у випадку, коли опоненти не відштовхуються, а в певному сенсі зближуються і тим самим деформують свою самостійну “вільну” еволюцію. У застосуваннях ці моделі описують кооперацію, пошук рівноваги, компромісу, консенсусу.

Далі розглянемо динамічні системи конфлікту в дискретному часі у термінах двох або більше стохастичних (нормованих на одиницю) векторів  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ , залежних від часу. Еволюція в часі задається відображенням, яке позначаємо символом  $*$  і яке діє у просторі  $\mathbb{R}_+^n$ .

Відображення  $*$  генерує багатокомпонентну динамічну систему в дискретному часі з траекторіями

$$\{\mathbf{p}_i^t\}_{i=1}^m \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}_{i=1}^m, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1)$$

У загальному випадку координати векторів  $\mathbf{p}_i^{t+1}$  визначаються ітеративно за координатами попередніх векторів згідно з системою різнищевих рівнянь:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \alpha \tau_j^t), \quad (2)$$

$$\alpha \in [-1; 1], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots,$$

$$z^t = \theta^t + 1 + \alpha W^t, \quad W^t = \sum_j \tau_j^t,$$

де  $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$  — деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи. Нормувальний знаменник  $z^t$  забезпечує стохастичність векторів  $\mathbf{p}_i^{t+1}$ . Набір додатних функцій  $\tau_j^t$  (певним чином залежних від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ) відповідає закону взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому  $t$  утворюють деякий нестохастичний вектор із невід’ємними координатами, який позначаємо символом  $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$  і називаємо вектором взаємодії. Вектор  $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$ , де  $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$ , є стохастичним аналогом вектора  $\mathcal{T}^t$ . Далі буде досліджено ряд моделей динамічних систем конфлікту, траекторії яких залежать від вигляду вектора  $\mathcal{T}^t$ , а також вивчено залежність поведінки системи від поведінки  $\mathcal{T}^t$  при  $t \rightarrow \infty$ .

У рівняннях (2) стала  $\alpha$  може набувати довільного значення, але при досить великих  $\alpha$  швидкість збіжності (чи розбіжності) системи буде досить великою при малих значеннях часу  $t$ . Така динаміка не відповідатиме динаміці реальних процесів, тому при побудові моделі було вибрано значення сталої  $\alpha$  з проміжку  $[-1; 1]$ . Згідно з наведеними рівняннями у випадку  $\alpha \in (0; 1]$  відстань між векторами  $\mathbf{p}_i^t$  в  $l_1$ -нормі збігається до нуля:

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \rightarrow 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m,$$

тому відображення  $*$ , задане цими рівняннями, описує взаємодію притягання. При  $\alpha \in [-1; 0)$  будемо говорити про динамічну систему з взаємодією відштовхування. Зауважимо, що при  $\alpha = 0$  початковий стан  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  є нерухомим.

**2. Існування нерухомих станів.** У цьому пункті узагальнимо деякі раніше досліджені моделі динамічних систем та дослідимо їхні граничні стани. Далі опишемо існування нерухомих точок, явний вигляд і стійкість граничного стану. Розглянемо раніше побудовані моделі динамічних систем і закони взаємодії, що генерують їхню динаміку.

У [6] описано перерозподіл конфліктного простору для пари протидіючих сторін. Ймовірнісні міри  $\mu^t, \nu^t$ , що описують динаміку системи, вибираються як абсолютно неперервні відносно міри Лебега  $\lambda$  на  $\Omega = [0, 1]$ . Додатково припускається, що щільності цих мір є неперервними функціями. Розглянуті рівняння динаміки є аналогічними до рівнянь (2) при  $\alpha = -1$ , але визначені в термінах щільностей мір  $\mu^t, \nu^t$ :

$$\begin{aligned}\rho^{t+1}(x) &= \frac{1}{z^t}(\rho^t(x)(\theta^t + 1) - \tau^t(x)), \quad x \in \Omega, \\ \sigma^{t+1}(x) &= \frac{1}{z^t}(\sigma^t(x)(\theta^t + 1) - \tau^t(x)), \quad t = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{3}$$

Основним результатом роботи є теорема про існування нерухомого граничного стану, причому якісно характеристикою граничного стану є різниця щільностей початкових значень мір  $\mu^{t=0}, \nu^{t=0}$ , а  $\tau^t$  — додатна міра, яка визначається на кожному кроці часу  $t$  як мінімальне значення щільностей мір  $\mu^t, \nu^t$  на  $\Omega$ . Така динамічна система, побудована за допомогою системи рівнянь (3), має дві множини нерухомих точок: перша складається з усіх пар мір, щільності яких є тотожними, а друга — з пар взаємно сингулярних (ортогональних) мір.

У [7] описано поведінку складної системи зі взаємодією притягання. Динаміка системи задається парою додатних ймовірнісних мір, заданих на деякому ймовірнісному просторі:

$$\mu^{t+1} = \frac{1}{z^t}(\mu^t(\theta^t + 1) + \tau^t), \quad \nu^{t+1} = \frac{1}{z^t}(\nu^t(\theta^t + 1) + \tau^t),$$

де  $\alpha = 1$ ,  $z^t$  — нормувальний знаменник,  $\theta^t = \theta(\mu^t, \nu^t)$  — додатний функціонал, величини  $\theta^t$  та  $\tau^t$  визначені в термінах мір  $\mu^t, \nu^t$ . Доведено існування нерухомої граничної точки та явно визначено значення граничних мір  $\mu^\infty, \nu^\infty$ . Розглянуто декілька прикладів вибору мір  $\mu^t, \nu^t$  та задання величини  $\tau^t$ .

У роботі [8] досліджено багатокомпонентну динамічну систему з притягальною взаємодією, що описує модель поведінки довільної скінченної кількості сторін. Динаміку системи задано рівняннями (2) для  $\alpha = 1$ . Основним результатом роботи [8] є теорема 1, яку можна узагальнити для довільного  $\alpha \in (0; 1]$ . Доведення наступної теореми є аналогічним до доведення теореми 1 у [8].

**Теорема 1.** *Нехай всі координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної). Тоді існує граничний вектор  $\mathbf{w}^\infty$  і кожна траєкторія динамічної системи (1) із початковим станом  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  при  $\alpha \in (0; 1]$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$ :*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому всі граничні вектори  $\mathbf{p}_i^\infty$  мають однакові координати

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^\infty}{W_\infty} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

які співпадають з координатами вектора  $\mathbf{w}^\infty$ .

Також у [8] розглянуто поведінку динамічної системи (1) у випадку, коли координати вектора  $\mathcal{T}^t$  задані явно за допомогою координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$  однією з таких рівностей:

$$\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t = \min_i \{p_{ij}^t\}, \quad (4)$$

$$\tau_j^t := \tau_{j,\max}^t = \max_i \{p_{ij}^t\},$$

$$\tau_j^t := \bar{\tau}_j^t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_{ij}^t,$$

$$\tau_{j_1}^t = \tau_{j_2}^t > 0, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Задання координат вектора  $\mathcal{T}^t$  за допомогою однієї з формул (4), (5) забезпечує виконання рівності

$$\frac{\tau_j}{W} = \frac{\tau_j^t}{W^t}. \quad (6)$$

Завдяки рівності (6) у всіх таких випадках виконується теорема 1, причому всі граничні вектори  $\mathbf{p}_i^\infty$  співпадають із початковим вектором  $\mathbf{w}^{t=0}$ , тобто

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^{t=0}}{W^{t=0}} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

На рис. 1 продемонстровано виконання описаних вище фактів для випадку, коли координати  $\tau_j^t$  вибираються як мінімальне значення  $j$ -х координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$  на кожному кроці часу  $t$  при  $\alpha = 1$  та  $\alpha = 0,05$ . Із аналізу графіків випливає, що швидкість збіжності до граничного стану залежить від значення  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  вона є значно більшою, ніж при  $\alpha = 0,05$ . Наступна теорема стосується випадку  $\alpha = [-1; 0)$ . Монотонність послідовності  $w_j^t$  забезпечує існування граничних координат  $w_j^\infty \in \mathbb{R}^1$ .

**Теорема 2.** Нехай всі координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  спадають. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (1) із початковим станом  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  при  $\alpha = [-1; 0)$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$ :

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, якщо  $w_j^\infty < 0$  для всіх  $j = 1, \dots, n$ , то

$$p_{ij}^\infty = w_j^\infty \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Доведення.** Доведемо існування граничних векторів  $\mathbf{p}_i^\infty$ . Для деякого фіксованого  $j = 1, \dots, n$  маємо

$$p_{ij}^{t+1} - p_{ij}^t = \frac{p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \alpha \tau_j^t}{z^t} - p_{ij}^t = \frac{\alpha W^t}{z^t} \left( \frac{\tau_j^t}{W^t} - p_{ij}^t \right).$$

Якщо  $p_{ij}^t > \frac{\tau_j^t}{W^t}$ , то  $p_{ij}^{t+1} > p_{ij}^t$ . Послідовність  $\left\{ \frac{\tau_j^t}{W^t} \right\}_{t=0}^\infty$  є монотонно спадною, тому для довільного  $t$  буде справедливою така нерівність:

$$p_{ij}^{t+1} > p_{ij}^t > \frac{\tau_j^t}{W^t} > \frac{\tau_j^{t+1}}{W^{t+1}}.$$

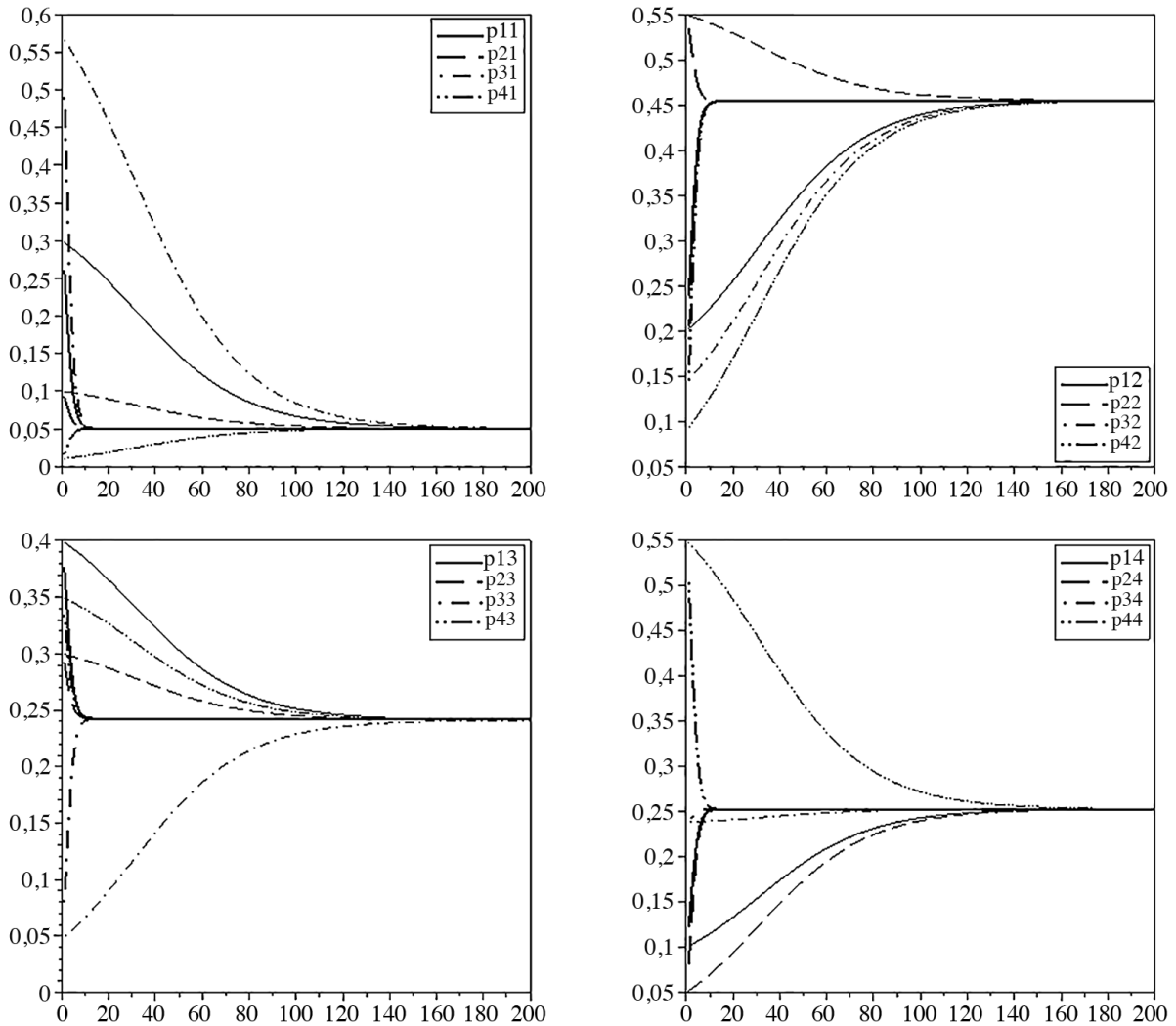


Рис. 1. На графіках відображено динаміку системи, задану початковим станом  $\{\mathbf{p}_1^{t=0}, \mathbf{p}_2^{t=0}, \mathbf{p}_3^{t=0}, \mathbf{p}_4^{t=0}\}$  при  $\alpha = 1$  (напівжирні лінії) та  $\alpha = 0,05$  (тонкі лінії), де  $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$ ,  $\mathbf{p}_1^{t=0} = (0,3; 0,2; 0,4; 0,1)$ ,  $\mathbf{p}_2^{t=0} = (0,1; 0,55; 0,3; 0,05)$ ,  $\mathbf{p}_3^{t=0} = (0,1; 0,55; 0,3; 0,05)$ ,  $\mathbf{p}_4^{t=0} = (0,6; 0,15; 0,05; 0,25)$ ,  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}_4^\infty = (0,0509; 0,4584; 0,2359; 0,2548)$ .

Це означає монотонне зростання координати  $p_{ij}^t$  з часом  $t$ . А тому, оскільки  $0 \leq p_{ij}^t \leq 1$ , існує

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t.$$

Якщо  $p_{ij}^t < \frac{\tau_j^t}{W^t}$ , то можливі випадки:  $p_{ij}^{t+1} < \frac{\tau_j^{t+1}}{W^{t+1}}$  або  $p_{ij}^{t+1} > \frac{\tau_j^{t+1}}{W^{t+1}}$ . Координата  $p_{ij}^t$  спадає при  $p_{ij}^{t+1} < \frac{\tau_j^{t+1}}{W^{t+1}}$  для довільного моменту часу  $t$ , тому існує

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t.$$

При  $p_{ij}^{t+1} > \frac{\tau_j^{t+1}}{W^{t+1}}$  отримуємо описаний вище випадок.  
У випадку

$$w_j^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_j^t}{W^t} = a < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

добуток  $\alpha w_j^\infty$  стає додатним. Далі доведення впливає з теореми 1.

Наступна теорема фактично узагальнює результати роботи [6] для випадку скінченної кількості протидіючих сторін, але динаміка відповідної системи задається системою різницевих рівнянь у термінах дискретних ймовірнісних мір  $\mu_i \in M_1^+(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , на просторі існування  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . Поклавиши

$$p_{ij} = \mu_i(\omega_j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

одержимо набір стохастичних векторів  $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Теорема 3.** Нехай  $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тоді кожна траекторія динамічної системи (1) із початковим станом  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  при  $\alpha = [-1; 0)$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$ :

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, якщо  $\tau_j^{t=0} = p_{ij}^{t=0}$ , то

$$p_{ij}^\infty = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

**Доведення.** Якщо координати  $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$ , то  $\tau_j^t$  співпадає з  $j$ -ю координатою деякого вектора  $\mathbf{p}_i^t$ . Звідси випливає, що координати  $\tau_j^t$  змінюються згідно з рівняннями (2):

$$\tau_j^{t+1} = \tau_j^t \cdot \frac{\theta^t + 1 + \alpha}{\theta^t + 1 + \alpha W^t}.$$

Очевидно, що  $W^t = \sum_j \tau_j^t \leq 1$ . Враховуючи, що  $\alpha < 0$ , маємо монотонно спадну послідовність  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$ . Це доводить існування нерухомого граничного стану відповідно до теореми 2.

Легко переконатися, що в цьому випадку нерівність

$$p_{ij}^t \leq p_{ik}^t \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

справедлива для довільного моменту часу  $t$ . Не порушуючи загальності, припустимо, що  $p_{ij}^{t=0}$  є мінімальною координатою вектора  $\mathbf{p}_i^{t=0}$ . Тоді на такому кроці часу маємо:

$$p_{ij}^1 = \frac{p_{ij}(\theta + 1) + \alpha p_{ij}}{\theta + 1 + \alpha W} = p_{ij} \cdot \frac{\theta + 1 + \alpha}{\theta + 1 + \alpha W} = p_{ij} \cdot s.$$

Оскільки  $s \leq 1$ , то  $p_{ij}^1 \leq p_{ij}$ . За індукцією одержуємо  $p_{ij}^{t+1} = p_{ij}^t \cdot s^t$ ,  $s^t \leq 1$ , а тому для довільного  $t$  справедлива нерівність

$$p_{ij}^{t+1} \leq p_{ij}^t.$$

Враховуючи, що  $0 \leq p_{ij}^t < 1$ ,  $p_{ij}^t = \tau_j^t$  і  $\{p_{ij}^t\}_{t=0}^{\infty}$  є монотонно спадною послідовністю, маємо

$$p_{ij}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t = 0.$$

Зауважимо, що в такому випадку  $\tau_j^t = 0$  для довільного  $j = 1, \dots, n$ , а для всіх  $k \neq j$  справедливе співвідношення

$$p_{kj}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{kj}^t > 0.$$

Розглянемо випадок  $m = 2$ . Нехай задано два стохастичні вектори  $\mathbf{p}_1^t$  та  $\mathbf{p}_2^t$ ,  $\tau_j = \min\{p_{1j}^t, p_{2j}^t\}$  для всіх  $j = 1, \dots, n$ . Якщо початкові вектори співпадають:  $\mathbf{p}_1^t = \mathbf{p}_2^t$ , то з рівнянь (2) випливає, що й граничні вектори також будуть рівними:  $\mathbf{p}_1^{\infty} = \mathbf{p}_2^{\infty}$ .

Розглянемо різницю  $j$ -х координат векторів  $\mathbf{p}_1^t$  та  $\mathbf{p}_2^t$ :

$$d_j^t = |p_{1j}^t - p_{2j}^t|.$$

На такому кроці ітерації маємо:

$$d_j^{t+1} = |p_{1j}^{t+1} - p_{2j}^{t+1}| = \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + \alpha W^t} \cdot |p_{1j}^t - p_{2j}^t|,$$

тому подальше відношення не залежить від часу  $t$ :

$$\frac{d_j^t}{d_k^t} = \frac{d_j}{d_k} \quad \forall j, k = 1, \dots, n.$$

Розглянемо випадок  $p_{1j} > p_{2j}$ . Вище показано, що  $p_{1j}^t > p_{2j}^t$ . Згідно з теоремою 3 маємо  $p_{2j}^{\infty} = 0$ . Тоді  $d_j^{\infty} = p_{1j}^{\infty}$ . Аналогічно для випадку  $p_{1j} < p_{2j}$ .

Виділивши дві множини індексів  $\{l : p_{1l}^t > p_{2l}^t\}$  і  $\{k : p_{1k}^t < p_{2k}^t\}$ , маємо

$$\begin{aligned} p_{1l}^{\infty} &= d_l^{\infty}, & p_{1k}^{\infty} &= 0, \\ p_{2l}^{\infty} &= 0, & p_{2k}^{\infty} &= d_k^{\infty}. \end{aligned}$$

Зі стохастичності граничних векторів випливає, що  $\sum_l d_l^{\infty} = \sum_k d_k^{\infty} = 1$ . Розглянемо відношення

$$d_{1l_0}^{\infty} = \frac{d_{1l_0}^{\infty}}{\sum_l d_{1l}^{\infty}} = \frac{1}{\sum_l \frac{d_{1l}^{\infty}}{d_{1l_0}^{\infty}}} = \frac{1}{\sum_l \frac{d_{1l}}{d_{1l_0}}} = \frac{d_{1l_0}}{\sum_l d_{1l}},$$

аналогічно

$$d_{2k_0}^{\infty} = \frac{d_{2k_0}}{\sum_k d_{2k}}.$$

Зауважимо, що  $\sum_l d_{1l} \neq 1$ ,  $\sum_k d_{2k} \neq 1$  і покажемо, що  $\sum_l d_{1l} = \sum_k d_{2k}$ :

$$\sum_l d_{1l} - \sum_k d_{2k} = \sum_l |p_{1l} - p_{2l}| - \sum_k |p_{1k} - p_{2k}| =$$

$$= \sum_l (p_{1l} - p_{2l}) + \sum_k (p_{1k} - p_{2k}) = \sum_{j=1}^n p_{1j} - \sum_{j=1}^n p_{2j} = 0.$$

Введемо позначення

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j,$$

де  $\sum_{j=1}^n d_j = \sum_l d_{1l} + \sum_k d_{2k}$ . Тоді

$$\begin{aligned} p_{1l}^\infty &= \frac{d_l}{D}, & p_{1k}^\infty &= 0, \\ p_{2l}^\infty &= 0, & p_{2k}^\infty &= \frac{d_k}{D}. \end{aligned}$$

Таким чином, довели таку теорему.

**Теорема 4.** Нехай  $m = 2$ . Координати граничних векторів  $\mathbf{p}_1^\infty$  і  $\mathbf{p}_2^\infty$  кожної траєкторії динамічної системи (1) при  $\alpha \in [-1; 0)$ ,  $\tau_j = \min_i \{p_{ij}^t\}$  для всіх  $j = 1, \dots, n$  мають такий явний опис. Якщо початкові вектори однакові:  $\mathbf{p}_1^t = \mathbf{p}_2^t$ , то й граничні вектори будуть рівними:  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty$ . Якщо  $\mathbf{p}_1^t \neq \mathbf{p}_2^t$ , то граничні вектори ортогональні:  $\mathbf{p}_1^\infty \perp \mathbf{p}_2^\infty$ , причому

$$p_{1j}^\infty = \begin{cases} \frac{d_j}{D}, & \text{якщо } p_{1j} > p_{2j}, \\ 0, & \text{якщо } p_{1j} < p_{2j}, \end{cases} \quad p_{2j}^\infty = \begin{cases} \frac{d_j}{D}, & \text{якщо } p_{2j} > p_{1j}, \\ 0, & \text{якщо } p_{2j} < p_{1j}. \end{cases}$$

Результати, отримані в теоремах 3 і 4 можуть бути застосовані до опису перерозподілу простору існування між двома та багатьма альтернативними сторонами (аналогічно до [6]). Лише у випадку двох альтернативних сторін ( $m = 2$ ) простір існування розпадається на дві окремі множини. Для випадку  $m > 2$ , тобто взаємодії більше ніж двох альтернативних сторін, теорему 3 можна трактувати таким чином: взаємодія триватиме до повного витіснення однієї з  $m$  сторін із кожного регіону простору існування, тобто з кожного регіону простору існування буде витіснено найслабшу сторону (див. рис. 2).

Результати теореми 1 можна застосувати при дослідженні виникнення достовірної події (детальніше див. [9]). За означенням, достовірна подія відповідає граничному вектору з одиничною координатою. При  $\alpha \in (0; -1]$  можна знайти умови, що забезпечать рівність одиниці однієї з граничних координат вектора  $\mathbf{w}^\infty$ , тобто  $w_j^\infty = 1$  для довільного  $j = 1, \dots, n$ . Цим можна стверджувати, що в фіксованому  $j$ -му регіоні одночасно буде виникати достовірна подія для  $m$  альтернативних сторін. Така модель узагальнює модель, досліджену в [9], із двох сторін на скінченну кількість альтернативних сторін.

**3. Існування граничних циклів.** У цьому пункті розглянемо декілька варіантів описаної вище моделі динамічних систем конфлікту та умови, при яких динаміка системи є циклічною.

Нехай координати кожного вектора  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , змінюються згідно з рівняннями (2). Припустимо, що координати вектора взаємодії  $\tau_j^t = \tau_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , де  $\tau_j(t)$  — довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Тоді за властивістю періодичних функцій  $W(t) \equiv W^t$  координати  $w_j^t = w_j(t) = \frac{\tau_j(t)}{W(t)}$  стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  будуть також періодичними з головним періодом, який позначимо через  $T$ .



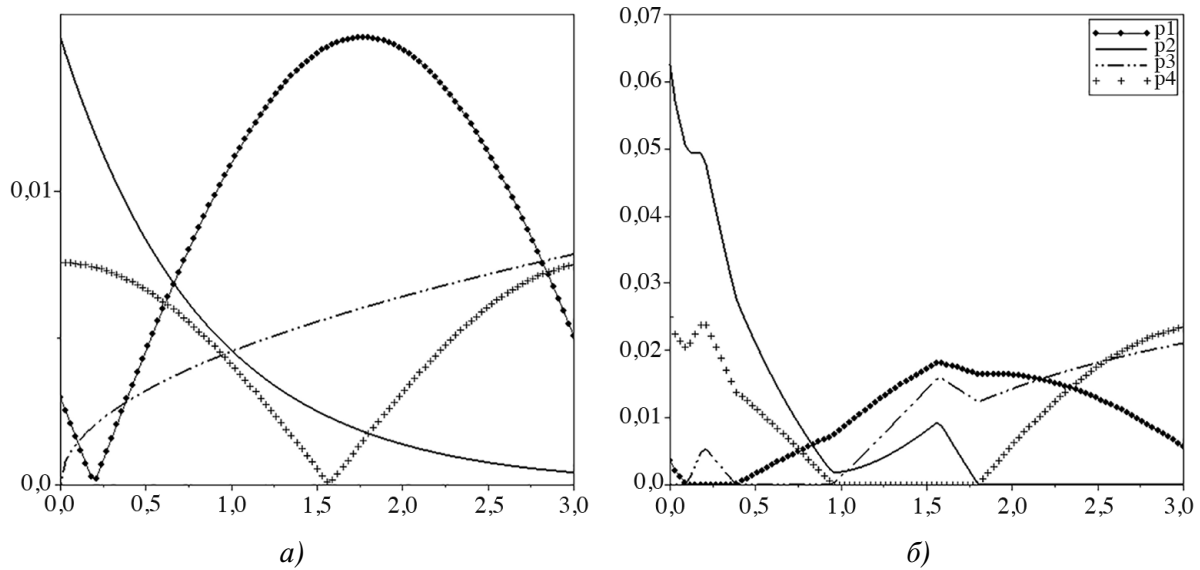


Рис. 2.  $\alpha = -1$ ,  $m = 4$ ,  $n = 100$ ,  $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$ ; а) початковий стан  $\{\mathbf{p}_1^{t=0}, \mathbf{p}_2^{t=0}, \mathbf{p}_3^{t=0}, \mathbf{p}_4^{t=0}\}$ , б) граничний стан  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}$ . Координати векторів  $\mathbf{p}_i^{t=0}$  задано за допомогою значень набору невід’ємних функцій  $f_i(x)$  на відрізку  $[a, b]$ :  $p_{ik} = \frac{f_i(x_k)}{D}$ , де  $D = \sum_{k=1}^n f_i(x_k)$ ,  $x_k$  належить розбиттю відрізка  $[a, b]$ ,  $f_1(x) = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{16}\right) \right|$ ,  $f_2(x) = 0,3^x$ ,  $f_3(x) = 0,3\sqrt{x}$ ,  $f_4(x) = 0,5|\cos x|$ ,  $x \in [0; 3]$ .

**Теорема 5.** Припустимо, що головний період функцій  $w_j(t)$  є додатним цілим числом  $T > 1$ , а координати вектора  $\mathbf{w}^t$  не є константами. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (1), заданої системою різницевих рівнянь (2), збігається до  $\omega$ -граничної множини  $\Gamma^\infty$ , яка є циклічною орбітою. Тобто множина  $\Gamma^\infty$  є інваріантною відносно перетворення  $*$  і складається з  $T$  впорядкованих векторів  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, T$ :

$$\Gamma_1 \xrightarrow{*} \Gamma_2 \xrightarrow{*} \Gamma_3 \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \Gamma_T \xrightarrow{*} \Gamma_1.$$

Гранична множина  $\Gamma^\infty$  залежить від початкового вектора  $\mathbf{w}^{t=0}$ .

**Доведення.** Покажемо, що

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_i^t\|_1 \rightarrow 0 \quad \forall i, l = 1, \dots, m.$$

Позначимо  $d_{il,j}^t = |p_{ij}^t - p_{lj}^t|$ . Нехай  $p_{ij}^t \neq p_{lj}^t$ , тоді

$$d_{il,j}^{t+1} = |p_{ij}^{t+1} - p_{lj}^{t+1}| = |p_{ij}^t - p_{lj}^t| \cdot \frac{\theta^t + 1}{z^t} = d_{il,j}^t \cdot \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t},$$

тобто

$$d_{il,j}^{t+1} = d_{il,j}^t \cdot k^t, \quad k^t = \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t}.$$

Далі,

$$d_{il,j}^{t+1} = d_{il,j}^t \cdot k^t = d_{il,j}^{t-1} \cdot k^{t-1} \cdot k^t = \dots = d_{il,j} \cdot k \cdot k^1 \dots k^t, \quad d_{il,j} = d_{il,j}^{t=0}.$$

Оскільки  $\theta^t$  обмежена, а  $W^t > 0$  для довільного  $t$ , то  $0 < k^t \leq c < 1$ , де  $c$  — деяка стала. Звідси випливає

$$0 < \underbrace{k \cdot k^1 \cdot \dots \cdot k^t}_{t+1} \leq (c)^{t+1}.$$

Враховуючи, що  $c < 1$ , маємо  $\lim_{t \rightarrow \infty} (c)^{t+1} = 0$ , а тому при  $t \rightarrow \infty$  добуток  $k \cdot k^1 \cdot \dots \cdot k^t$  прямує до нуля.

Отже,

$$d_{il,j}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} d_{il,j}^t = 0.$$

З доведеного вище випливає, що для всіх  $i = 1, \dots, m$  вектори  $\mathbf{p}_i^{\infty}$  співпадають між собою та дорівнюють деякому вектору  $\Gamma_l^t = (\gamma_{lj}^t)_{j=1}^n$ .

Оскільки  $\gamma_{lj}^t \in \mathbb{R}_+^1$  для довільного  $j$ , функція  $\theta^t$  залежить від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$  і набуває деякого числового значення, а значення координати  $\gamma_{lj}^t$  змінюється згідно з рівняннями (2), тобто визначається за допомогою елементарних дій над періодичними функціями з сумірними періодами, які дорівнюють цілому числу  $T$ . А тому за властивостями періодичних функцій значення координат вектора  $\Gamma_l^t$  будуть повторюватися з мінімальним періодом  $T$ , тобто  $\gamma_{lj}^t = \gamma_{lj}^{t+T}$ . Звідси випливає, що  $\omega$ -гранична множина  $\Gamma^{\infty}$  складається з  $T$  векторів  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, T$ , а кожен вектор  $\Gamma_l$ ,  $l > 1$ , визначається зсувом координат вектора  $\Gamma_{l=1}$ . Отже,  $\omega$ -гранична множина є циклічною орбітою.

Граничний вектор  $\Gamma^{\infty}$  залежить від початкового стану  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\}$ . Тоді для довільної точки з  $\varepsilon$ -околу  $\Gamma^{\infty}$  вектор  $\Gamma_{l=1}$  буде іншим, а тому  $\omega$ -гранична множина є нестійкою.

Варто зауважити, що координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  можуть бути сталими, незважаючи на залежність від часу координат показника атрактора  $\tau_j^t$ . У такому випадку граничний стан буде нерухомою точкою, яка є нестійкою.

У теоремі 5 головний період функцій  $w_j(t)$  припускається додатним цілим числом, що узгоджується з постановкою задачі, а саме вибором дискретного часу  $t$  (див. рис. 3).

Можна записати динамічну систему для неперервного часу, аналогічну до систем (1) у термінах диференціальних рівнянь:

$$\dot{p}_{ij}(t) = -\frac{p_{ij}(t) \cdot W(t) - \alpha \tau_j(t)}{\theta(t) + 1 + \alpha W(t)}, \quad (7)$$

де

$$W(t) = \sum_{j=1}^n \tau_j(t),$$

$\theta(t) = \theta(\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots, \mathbf{p}_m(t))$  — деяка обмежена додатна функція,  $\tau_j(t)$  — довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Для динамічної системи такого сорту з неперервним часом також справедлива теорема 5, тобто існуватиме  $\omega$ -гранична множина, яка є циклічною орбітою (див. рис. 4).

**4. Комп'ютерні приклади.** У цьому пункті розглянуто декілька прикладів із різним способом задання координат вектора  $\mathcal{T}^t$ . Для наочності більшість прикладів розглянуто у тривимірному просторі  $\mathbb{R}_+^3$ .

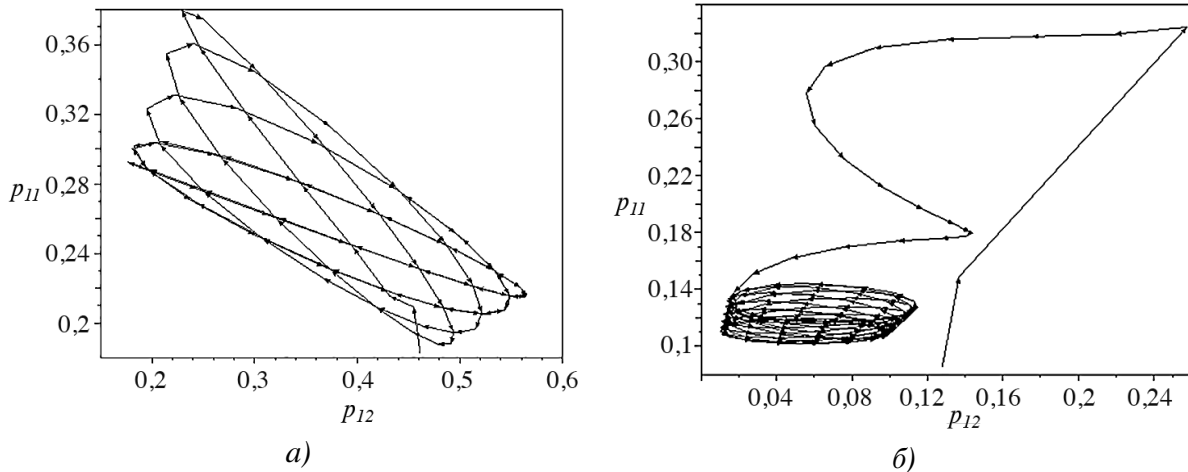


Рис. 3.  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, 3000$ ,  $\tau_j^t$  — набір періодичних функцій,  $p_1^{t=0} = (0,08, 0,02, 0,9)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,1, 0,55, 0,35)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,08, 0,02, 0,9)$ ; а)  $\alpha = 1$ ,  $\tau_1^t = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) + 8$ ,  $\tau_2(t) = 3 \sin(\pi t) + 5$ ,  $\tau_3(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{9}\right) + 7$ ,  $T = 144$ ; б)  $\alpha = 0,05$ ,  $\tau_1^t = \cos\left(\frac{\pi t}{7}\right) + 1$ ,  $\tau_2(t) = \sin(\pi t) + 2$ ,  $\tau_3(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{13}\right) + 3$ ,  $T = 182$ . На рис. 3а і 3б зображено проекцію траєкторії динамічної системи (1), заданої системою різницьових рівнянь (2) із початковим станом  $\{p_1^{t=0}, p_2^{t=0}, p_3^{t=0}\}$ ;  $\omega$ -гранична множина складається з  $T$  векторів.

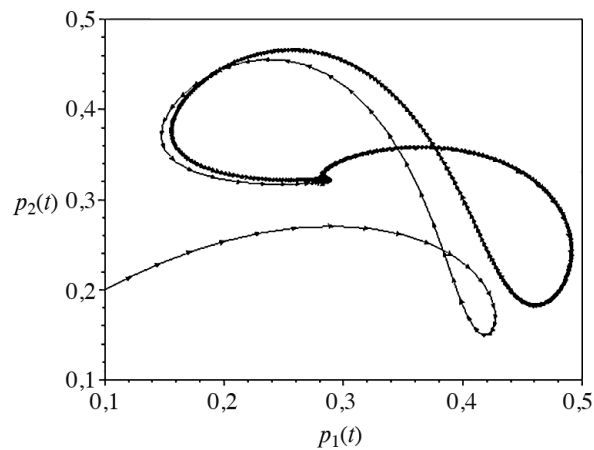


Рис. 4.  $\alpha = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $\tau(t)_j = \sin(jt) + 1$ . Зображено проекції траєкторій динамічної системи (1), заданої системою диференціальних рівнянь (7) із початковим станом  $p_1(0) = (0,1, 0,2, 0,7)$ ,  $p_2(0) = (0,5, 0,35, 0,15)$ ,  $p_3(0) = (0,1, 0,5, 0,4)$ .

Для довільного початкового стану  $\{p_1^{t=0}, p_2^{t=0}, p_3^{t=0}\}$  задамо зміну координат вектора  $\mathcal{T}^t$  таким чином: координати  $\tau_1(t)$  та  $\tau_2(t)$  визначаються як мінімальне значення відповідних координат векторів  $p_i^t$ ,  $i = 1, 2, 3$ , що забезпечує монотонність послідовностей координат  $\tau_1(t)$  та  $\tau_2(t)$  при зміні  $t$ ;  $\tau_3(t)$  визначаються як деяка додатна періодична функція з головним періодом  $T$ . Завдяки закону динаміки (2) з  $\alpha = 1$  при  $t \rightarrow \infty$  отримуємо рівність  $p_1^\infty = p_2^\infty = p_3^\infty$ . Рисунок 5 демонструє, що при  $\tau_3(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{16}\right) + 1$  із головним періодом  $T = 32$  значення всіх координат векторів  $p_i^t$ ,  $i = 1, 2, 3$ , повторюються кожні

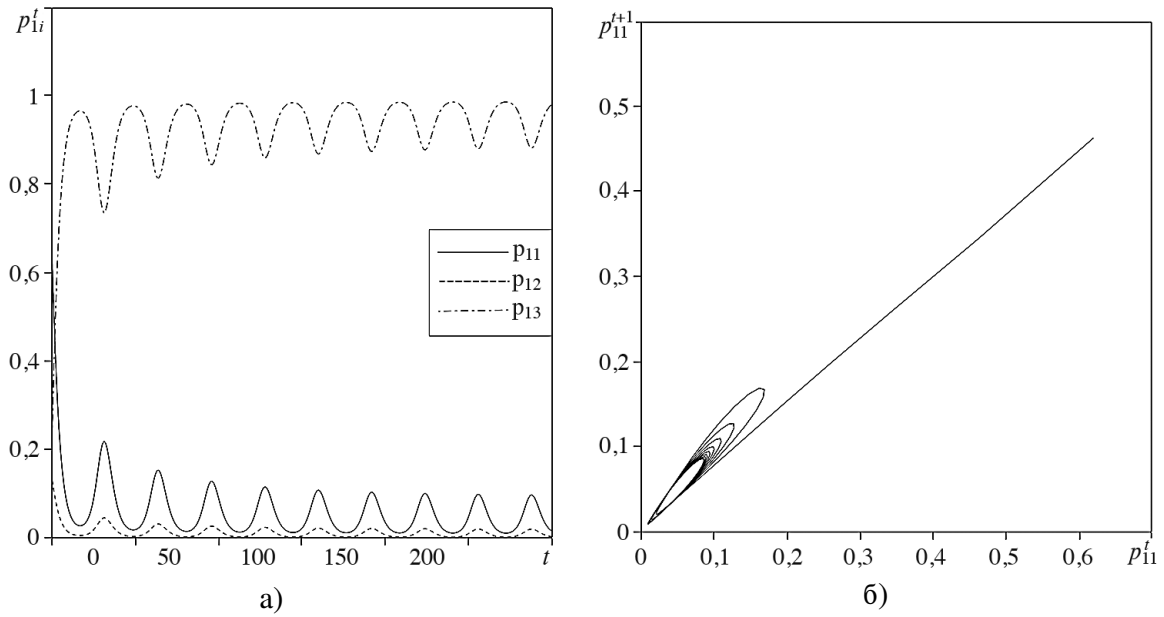


Рис. 5.  $\alpha = 1, m = 3, n = 3, \tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t, \tau_2(t) = \min_j p_{i2}^t, \tau_3(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{16}\right) + 1, p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25), p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2), p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33).$

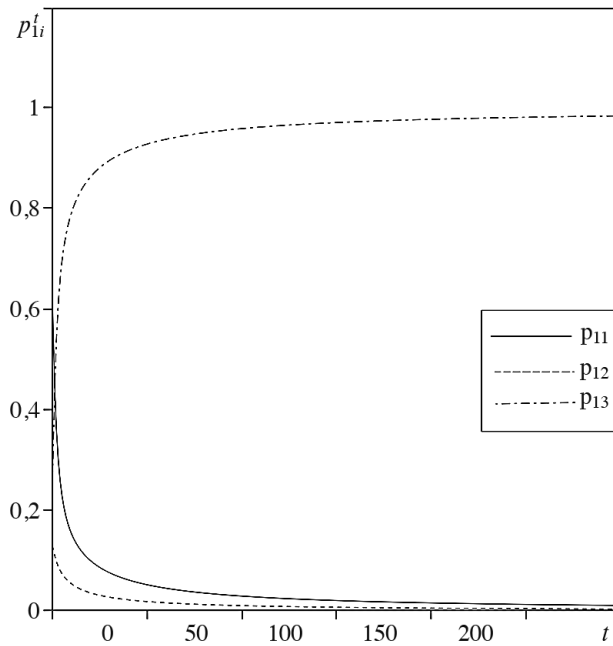


Рис. 6.  $\alpha = 1, m = 3, n = 3, \tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t, \tau_2(t) = \min_j p_{i2}^t, \tau_3(t) = \sin \pi t + 1, p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25), p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2), p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33), p_1^\infty = p_2^\infty = p_3^\infty = (0, 0, 1).$

32 кроки часу, тобто поведінка системи буде циклічною. На рис. 6 відображено динаміку при  $\tau_3(t) = \sin \pi t + 1$  з періодом  $T = 2$ . Однак  $\tau_3(t)$  набуває сталого значення, оскільки  $\sin \pi t + 1 = 1$  для довільного  $t = 0, 1, 2, \dots$ , що забезпечує нерухомість граничного стану.

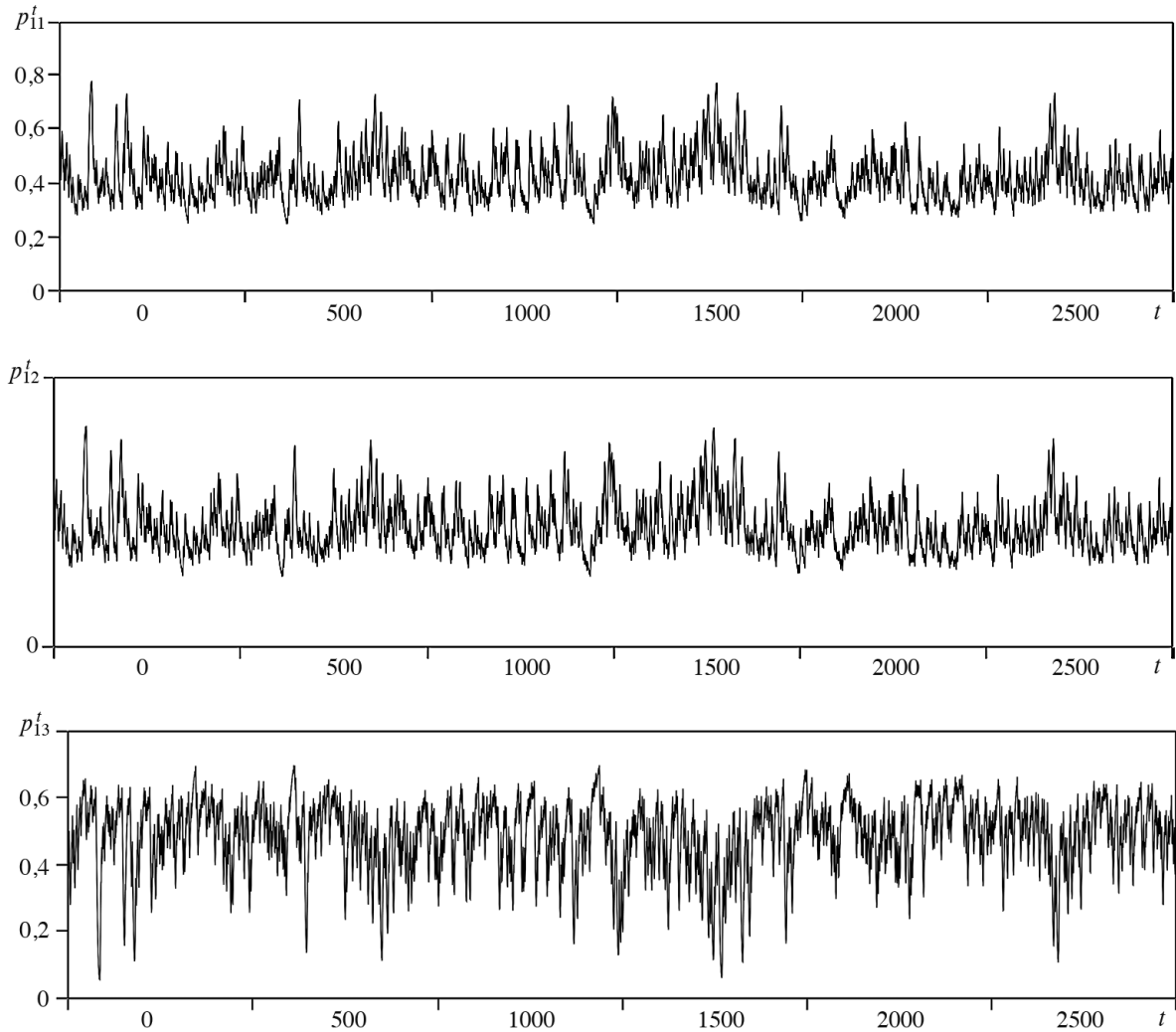


Рис. 7.  $\alpha = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $\tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t$ ,  $\tau_2(t) = \min_j p_{i2}^t$ ,  $\tau_3(t+1) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$ ,  $r = 4$ ,  $\tau_3(0) = 0,6$ ,  $p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33)$ .

Розглянемо випадок, коли одна з координат вектора  $\mathcal{T}^t$  змінюється за законом логістичного відображення, а інші координати змінюються монотонно. Нехай  $\tau_3(t+1) = r\tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$ , а  $\tau_1(t)$  і  $\tau_2(t)$  визначаються як мінімальне значення відповідних координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,  $i = 1, 2, 3$ . На рис. 7 відображено хаотичну динаміку зміни координат вектора  $\mathbf{p}_1^t$  при  $r = 4$ , координати векторів  $\mathbf{p}_2^t$  і  $\mathbf{p}_3^t$  змінюються аналогічно. На рис. 8а та 8б зображено ітераційну діаграму для координати  $p_{11}^t$  для двох випадків  $r = 3,56$  і  $r = 4$  відповідно. Так, рис. 8б відповідає циклу періоду 8, а рис. 8а демонструє хаотичну поведінку  $p_{11}^t$  при  $t \rightarrow \infty$ . Можна зробити висновок, що в такому прикладі хаотичність однієї величини  $\tau_3(t)$  приводить до хаотичної поведінки всієї системи.

Як приклад розглянемо випадок, у якому  $\tau_1(t)$  визначається як мінімальне значення перших координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,  $\tau_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{16}\right) + 1$  визначаються як деяка додатна пе-

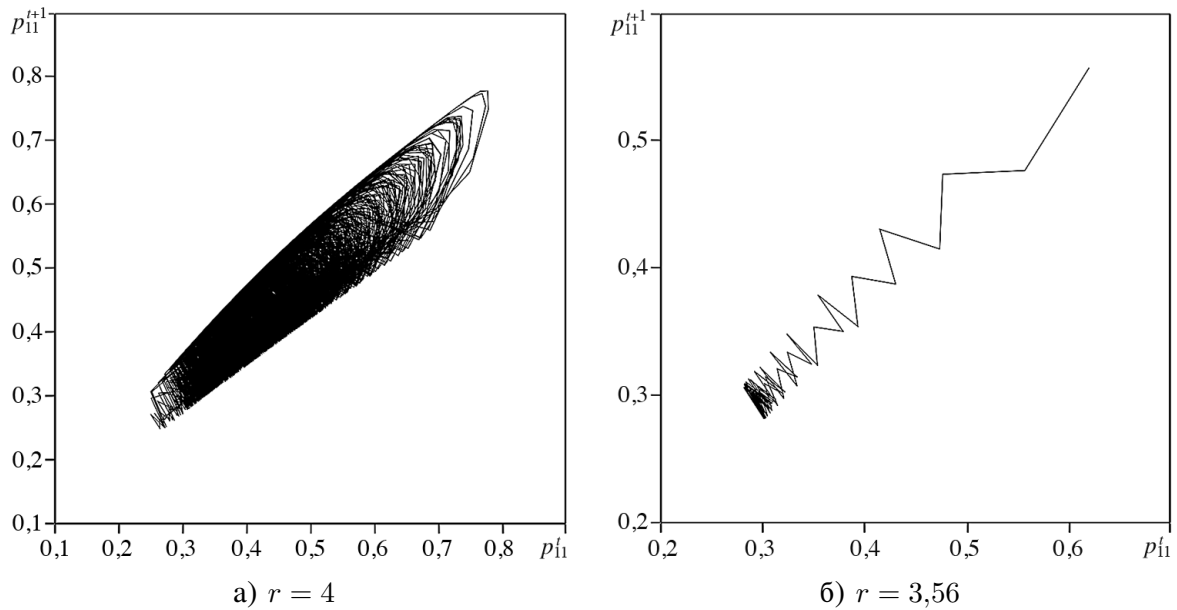


Рис. 8.  $t = 3000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $\tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t$ ,  $\tau_2(t) = \min_j p_{i2}^t$ ,  $\tau_3(t+1) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$ ,  $\tau_3(0) = 0,6$ ,  $p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33)$ .

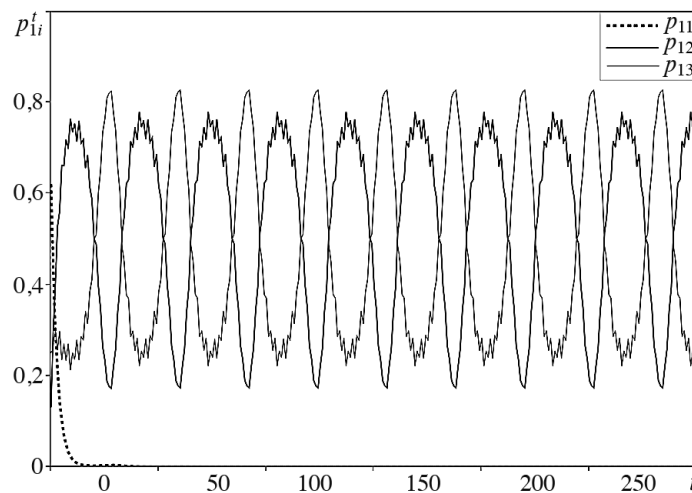


Рис. 9.  $t = 3000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $\tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t$ ,  $\tau_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{16}\right) + 1$ ,  $\tau_3(t+1) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$ ,  $r = 3,56$ ,  $\tau_3(0) = 0,6$ ,  $p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33)$ .

ріодична функція з головним періодом  $T = 32$ , а  $\tau_3(t) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$  змінюється за законом логістичного відображення. У такому випадку  $p_{i1}(t) = 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (див. рис. 9, 11). Залежно від значення параметра  $r$  поведінка системи може бути циклічною або хаотичною. Так, при  $r = 3,56$  існує цикл періоду  $T = 32$ , тобто значення координат  $p_{i2}(t)$  і  $p_{i3}(t)$  будуть повторюватися кожні 32 кроки часу (див. рис. 9, 10б). Динаміка, проілюстрована на рис. 10а, 11, демонструє, що при  $r = 4$  значення координат  $p_{i2}(t)$  і  $p_{i3}(t)$  змінюються хаотично.

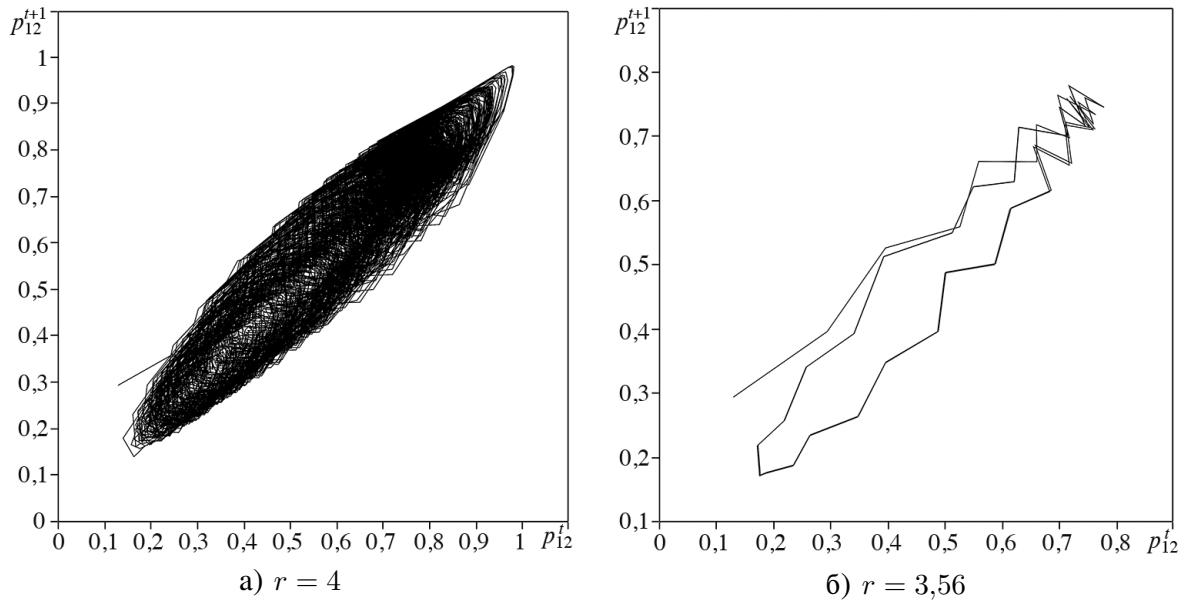


Рис. 10.  $t = 3000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $\tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t$ ,  $\tau_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{16}\right) + 1$ ,  $\tau_3(t+1) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$ ,  $\tau_3(0) = 0,6$ ,  $p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33)$ .

Наведені вище приклади демонструють наявність нетривіальної нелінійної динаміки. У кожному конкретному випадку визначення координат вектора  $\mathcal{T}^t$  поведінка системи істотно різна, значення координат і спосіб їхнього задання впливають на стійкість граничного стану системи.

**5. Висновки.** У різних постановках такого типу задача досліджувалася в багатьох роботах (див., наприклад, [5, 10–12]). Зокрема, поведінку динамічної системи з притягальною взаємодією, задану рівняннями (2) можна інтерпретувати як ефект синхронізації в моделях фазових осциляторів [13–17]. Аналогічно до моделей, що розглянуті в роботах [18–22], можна розглядати вище досліджену модель динамічної системи як модель формування поглядів та досягнення консенсусу. Також такого сорту динамічні системи можуть мати пряме застосування при прогностичному аналізі статистичних даних. В якості значень вектора взаємодії  $\mathcal{T}^t$  можна приймати деякий ряд статистичних даних за певний проміжок часу, котрі необов'язково змінюються за строгим математичним законом, однак володіють деякими відстежуваними закономірностями (наприклад, коливаються в деяких межах, періодично повторюються і т. ін.).

В цій статті при побудові моделі припускалося, що координати  $\tau_j^t$  вектора  $\mathcal{T}^t$  залежать лише від  $j$ -го індексу координат  $p_{ij}^t$  та не залежать від індексу вектора  $\mathbf{p}_i^t$ . У подальших дослідженнях планується дослідити ускладнення, якщо для всіх координат  $p_{ij}^t$  задати різні значення  $\tau_{ij}^t$ , тобто якщо координати  $\tau_{ij}^t$  будуть залежні від  $j$ -того індексу координат  $p_{ij}^t$  та індексу вектора  $\mathbf{p}_i^t$ . В такій постановці модель динамічної системи можна інтерпретувати як деяку модель соціуму (наприклад, [10, 12, 19, 20], де кількість векторів відповідає загальній кількості груп в суспільстві, кількість координат описує кількість індивідів у кожній групі, а відповідно кожна координата  $p_{ij}^t$  може описувати поведінку конкретного індивіда. При такій постановці вектор  $\mathcal{T}^t$  може задавати взаємодію між групами суспільства чи індивідами в середині кожної з груп.

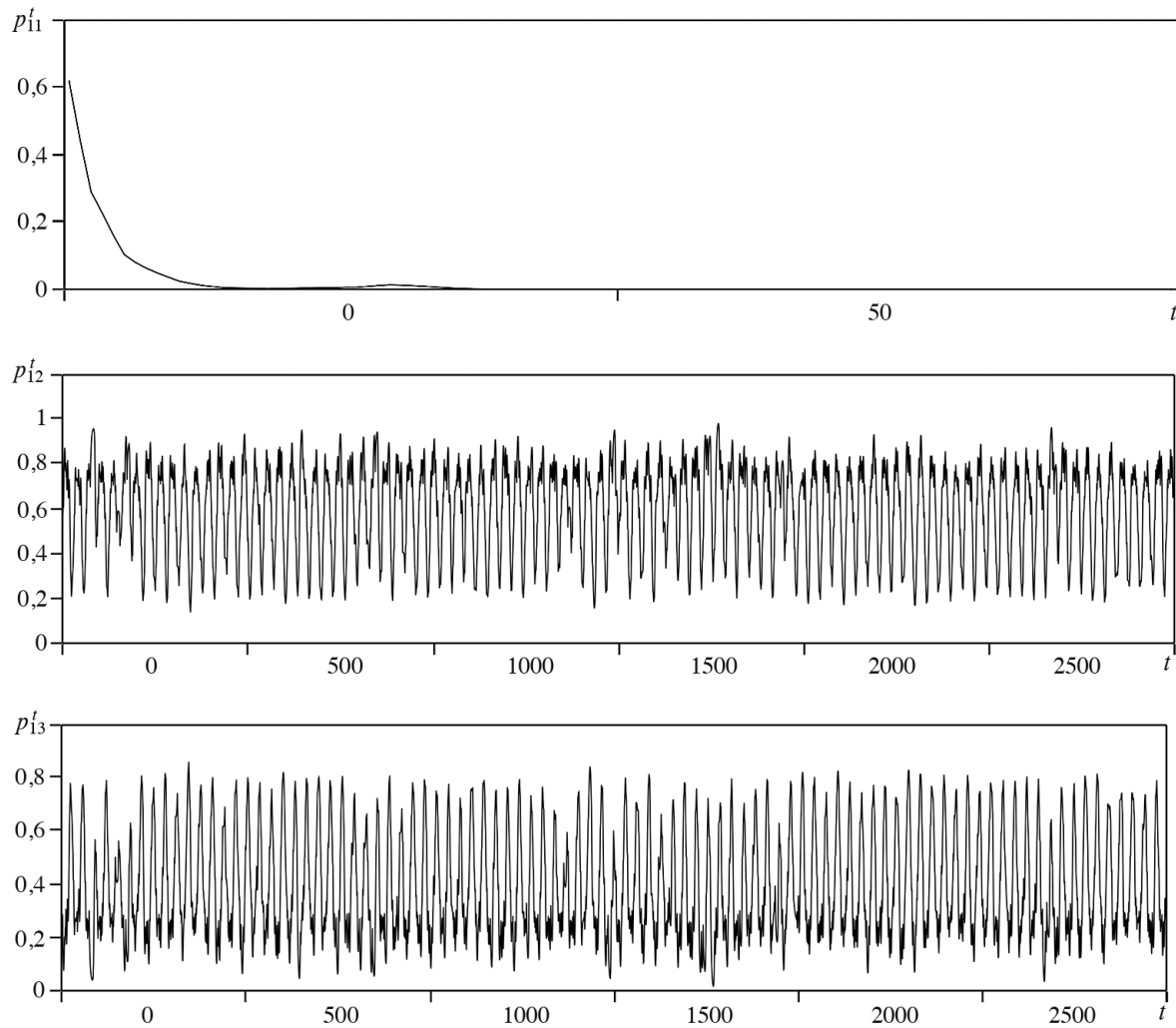


Рис. 11.  $t = 3000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $\tau_1(t) = \min_j p_{i1}^t$ ,  $\tau_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{16}\right) + 1$ ,  $\tau_3(t+1) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$ ,  
 $r = 4$ ,  $\tau_3(0) = 0,6$ ,  $p_1^{t=0} = (0,62, 0,13, 0,25)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,54, 0,26, 0,2)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,36, 0,31, 0,33)$ .

### Література

1. В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко, *Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір*, Укр. мат. журн., **56**, № 7, 927–938 (2004).
2. V. Koshmanenko, *Theorem of conflicts for a pair of probability measures*, Math. Methods Oper. Res., **59**, № 2, 303–313 (2004).
3. В. Д. Кошманенко, *Теорема про конфлікт для пари стохастических векторов*, Укр. мат. журн., **55**, № 4, 555–560 (2003).
4. В. Д. Кошманенко, *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*, Наук. думка, Київ (2016).
5. V. D. Koshmanenko, *Existence theorems of the  $\omega$ -limit states for conflict dynamical systems*, Methods Funct. Anal. Topology, **20**, № 4, 379–390 (2014).
6. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко, *Явно розв'язувані моделі перерозподілу конфліктного простору*, Нелін. коливання, **20**, № 1, 98–112 (2017).
7. V. Koshmanenko, N. Kharchenko, *Fixed points of complex system with atarrachtive interaction*, Methods Funct. Anal. Topology, **23**, № 2, 164–176 (2017).



8. O. R. Satur, *Limit states of multicomponent discrete dynamical systems*, J. Math. Sci., **256**, 648–662 (2021); DOI: 10.1007/s10958-021-05451-x.
9. V. D. Koshmanenko, O. R. Satur, *Sure event problem in multicomponent dynamical systems with attractive interaction*, J. Math. Sci., **249**, № 4, 629–646 (2020); DOI: 10.1007/s10958-020-04962-3.
10. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту*, Нелін. коливання, **22**, № 1, 66–85 (2019).
11. В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко, *Розклад Гана–Жордана як рівноважний стан системи конфлікту*, Укр. мат. журн., **67**, № 1, 64–77 (2016).
12. T. Karataieva, V. Koshmanenko, M. Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*, Phys. A, **525**, 535–547 (2019).
13. P. Ashwin, C. Bick, O. Burylko, *Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling*, Front. Appl. Math. Stat., **2**, № 7, 17 p. (2016).
14. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk, *Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction*, Phys. Review E, **90**, № 2, 022911-1-022911-18 (2014).
15. O. Burylko, Y. Kazanovich, R. Borisyuk, *Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation*, Sci. Rep., **8**, № 416, 24 (2018).
16. S. Majhi, S. Nag Chowdhury, D. Ghosh, *Perspective on attractive-repulsive interactions in dynamical networks: progress and future*, Europhys. Lett., **132**, 20001 (2020); DOI: 10.1209/0295-5075/132/20001.
17. A. Sharma, B. Rakshit, *Dynamical robustness in presence of attractive-repulsive interactions*, Chaos, Solitons and Fractals, **156**, 111823 (2022); DOI: 10.1016/j.chaos.2022.111823.
18. G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch, *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. Complex Syst., **3**, 87–98 (2000).
19. R. Hegselmann, U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulations*, J. Artif. Soc. Soc. Simul., **5**, № 3, 33 p. (2002).
20. H. Hu, *Competing opinion diffusion on social networks*, R. Soc. Open Sci., **4**, 171160 (2017).
21. L. Li, A. Scaglione, A. Swami, Q. Zhao, *Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks*, IEEE J. Sel. Areas in Commun., **31**, № 6, 1072–1083 (2013).
22. L. Li, A. Scaglione, A. Swami, Q. Zhao, *Trust, opinion diffusion and radicalization in social networks*, Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 691–695 (2011).

Одержано 19.03.22