УДК 517.91

ПОТОКИ МОРСА З НЕРУХОМИМИ ТОЧКАМИ НА МЕЖІ ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

О. О. Пришляк, С. В. Білун

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4-Е, Київ, 03022, Україна
e-mail: prishlyak@knu.ua
svbilun@knu.ua

А. А. Прус

Нац. ун-т "Острозька академія"
вул. Семінарська, 2, Острог, Рівнен. обл., 35800, Україна
e-mail: asp00pr@gmail.com

We investigate topological properties, structures, and classifications of Morse flows with fixed points on the boundary of three-dimensional manifolds. We construct a complete topological invariant of a Morse flow, Pr-diagram, which is similar to the Heegaard diagram of a closed three-dimensional manifold.

Досліджено топологічні властивості, структури й класифікації потоків Морса з нерухомими точками на межі тривимірних многовидів. Побудовано повний топологічний інваріант потоку Морса — Pr-діаграму, аналогічну діаграмі Хегора для замкненого тривимірного многовида.

Вступ. На кожному замкненому многовиді векторне поле завжди породжує потік. У випадку компактного многовида з межею векторне поле буде породжувати потік тоді і тільки тоді, коли воно дотикається до межі в кожній її точці [1].

Векторне поле X на многовиді M називається *структурно стійким*, якщо у множині всіх векторних полів на многовиді M існує окіл U такий, що довільне поле $Y \in U$ топологічно еквівалентне полю X.

На замкнених поверхнях структурно стійкі векторні поля є полями Морса – Смейла. Для многовидів більшої розмірності крім векторних полів Морса – Смейла існують інші структурно стійкі векторні поля. Структурну стійкість векторних полів на замкнених многовидах досліджено в роботах [2 – 7]. Для многовидів із межею аналог полів Морса – Смейла описано у роботах [6, 8, 9].

При розмірності 2 (замкнені многовиди) потоки Морса (потоки Морса – Смейла без замкнених траєкторій) мають три типи особливостей: джерело, сідло та стік. Якщо розглядати потоки Морса з особливостями на межі ∂M, то на поверхнях можливі чотири типи особливостей: джерело, стік (рис. 1) та два типи сідел (рис. 2).

Дослідженню топологічних властивостей і побудові топологічної класифікації потоків Морса – Смейла на замкнених поверхнях та їхнім узагальненням — потокам зі скінченним числом особливих траєкторій (нерухомих точок, замкнених траєкторій і сепаратрис) присвячено багато робіт, серед яких виділимо [2, 10, 11]. Основним інваріантом при цьому є сепаратрисна діаграма потоку. Відзначимо також роботу В. В. Шарка та А. А. Ошемкова

© О. О. Пришляк, С. В. Білун, А. А. Прус, 2022

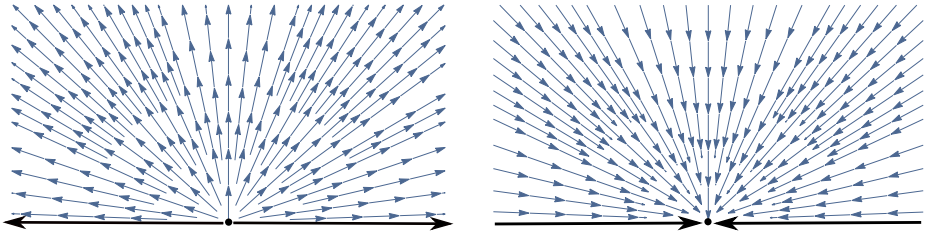

Рис. 1. Джерело та стік на межі поверхні.

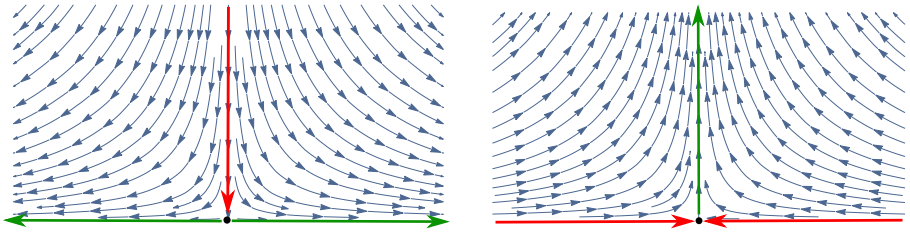

Рис. 2. Граничні сідла на межі поверхні.

[12], де запропоновано нові інваріанти та наведено огляд інших інваріантів, а також роботу [13], де досліджено траєкторну еквівалентність оптимальних потоків Морса.

На замкнених тривимірних многовидах топологічну класифікацію полів Морса та полів Морса – Смейла з деякими обмеженнями отримано Я. Л. Уманським [14] і О. О. Пришляком [15 – 18].

У роботі [19] наведено топологічну класифікацію m-полів на дво- та тривимірних многовидах із межею, що є узагальненням полів Морса та знаходяться в загальному положенні з межею, але такі поля не породжують потоків.

В останні роки активно досліджувалися топологічні властивості й будувалася топологічна класифікація для потоків Морса на поверхнях із межею. Зокрема, у роботах М. В. Лосєвої та О. О. Пришляка отримано топологічні класифікації для потоків на двовимірному диску з особливостями на межі [1]; для оптимальних потоків на компактних поверхнях із межею [20], потоків зі змішаною динамікою [21]. Повну топологічну класифікацію потоків Морса на поверхнях із межею з використанням трикольорових графів отримано в [22].

Метою даної роботи є побудова повного топологічного інваріанта потоків Морса з нерухомими точками на межі орієнтованого компактного тривимірного многовида, проведення топологічної класифікації цих потоків за допомогою побудованого інваріанта та обрахування кількості топологічно нееквівалентних потоків Морса на тривимірному диску та тілах з ручками.

Стаття складається з чотирьох пунктів. У п. 1 описано процес побудови повного топологічного інваріанта, Pr-діаграми, потоку Морса з нерухомими точками на межі тривимірного многовида й наведено приклади.

У п. 2 доведено критерій топологічної еквівалентності потоків через ізоморфізм їхніх Pr-діаграм. Далі описано властивості Pr-діаграм, доведено теорему реалізації та пояснено процедуру відновлення потоку на межі за Pr-діаграмою, а також можливість зробити глобальним локальне продовження потоку з межі на внутрішність.

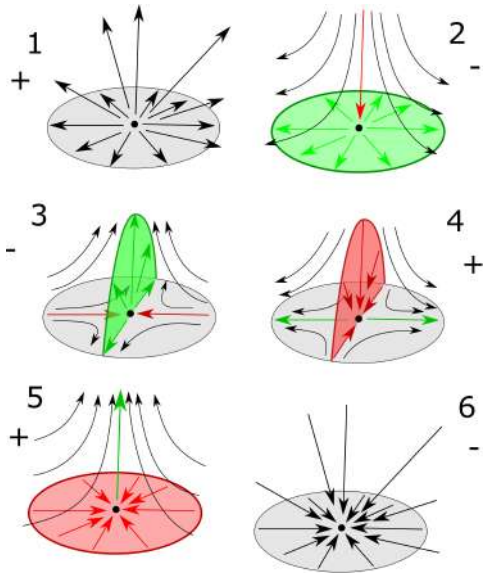

Рис. 3. Особливості на межі для розмірності 3.

У п. 3 розглянуто застосування знайденого інваріанта для обрахування кількості топологічно нееквівалентних потоків Морса на тривимірному диску з не більш ніж шістьма нерухомими точками на межі та, як приклад застосування, — гравітаційний потік системи Сонце – Земля.

У п. 4 описано всі можливі топологічні структури оптимальних потоків Морса на тілі з двома ручками й на тілі з трьома ручками, а також розглянуто застосування отриманих результатів до водяних потоків на річці з островами.

1. Pr-діаграма потоку Морса з нерухомими точками на межі тривимірного многовида.

Означення 1. *Потік X на многовиді M з межею ∂M називається потоком Морса, якщо він задовольняє такі умови:*

1) *множина неблукаючих точок $\Omega(X)$ має скінченне число точок, усі вони гіперболічного типу;*

2) *якщо $u, v \in \Omega(X)$, то нестійкий многовид $W^u(u)$ трансверсальний стійкому многовиду $W^s(v)$ в $\operatorname{Int} M$;*

3) *обмеження X на ∂M є потоком Морса (стійкі й нестійкі многовиди мають трансверсальний перетин).*

На границі тривимірних многовидів є шість типів особливостей (рис. 3). Вони визначаються своїми індексами.

Пара (p, q) називається індексом особливої точки, де $p + q$ дорівнює розмірності стійкого многовида X, а p — це розмірність стійкого многовида потоку, звуженого на межу. На тривимірному многовиді $p = 0, 1$ або 2 і $q = 0$ або 1. Наприклад, джерело (рис. 3.1) має індекс (0,0), а стік (рис. 3.6) має індекс (2,1). Інші особливі точки на рис. 3 мають такі індекси: 2 — $(0, 1)$, 3 — $(1, 0)$, 4 — $(1, 1)$, 5 — $(2, 0)$. Кожен потік Морса має джерело і стік.

Побудуємо Pr-діаграму потоку, що має вигляд поверхні з межею і чотирма наборами вкладених у неї кривих.

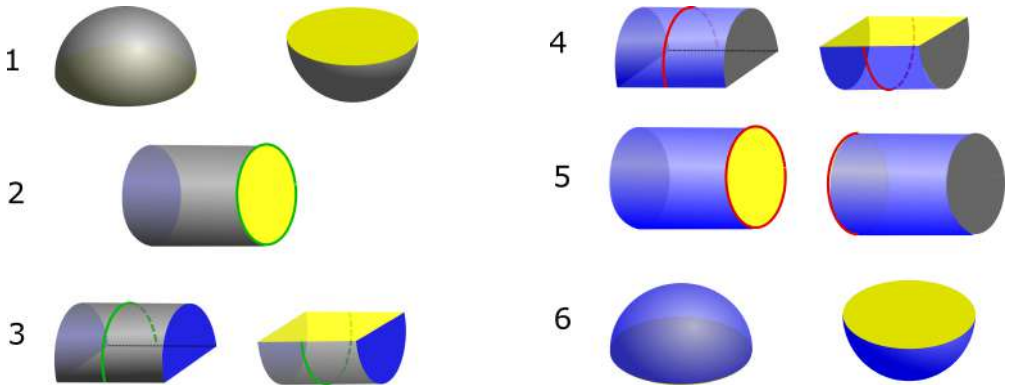

Рис. 4. m-ручки.

При цьому поверхня розбиває 3-многовид на дві частини: одна частина містить точки індексів $(0,0)$, $(0,1)$ і $(1,0)$, а друга — точки індексів, які лишилися. Крім того, кожна траєкторія трансверсально перетинається з цією поверхнею не більше ніж в одній точці. Такі діаграми узагальнюють діаграми Хегора.

Це можна зробити двома способами:

1) використовуючи осі та коосі розкладів на m-ручки;

2) з використанням межі околу одновимірного стійкого многовида і його перерізу з двовимірним стійким і нестійким многовидом.

M-ручки відповідають особливим точкам [23].

Отже, існує шість типів ручок (рис. 4).

Опишемо побудову розкладу на ручки. Щоб отримати розклад на m-ручки, ми почнемо з ручок типу один, а потім приєднаємо до них інші таким чином: уся синя частина межі приєднана до об'єднання сірої частини, а її перерізи з жовтою частиною приєднані до границі жовтої області. В результаті приєднання всіх m-ручок отримаємо 3-многовиди з жовтим краєм. Поверхня F є сірою частиною межі об'єднання m-ручок типів $1-3$. Зелені криві ручок типу 3 утворюють u-систему, а зелені криві ручок типу 2 утворюють U-систему. Рисунок червоних кривих при приєднанні ручок 4-го типу утворює v-систему і червоних кривих ручок 5-го типу — V-систему. Якщо ручка типу 3 приєднана до ручки типу 2, то ми деформуємо зелену частину її перерізу через синю область і наступну сіру область. Цього ж можна досягти, якщо стиснути половину ручки типу 3 до її середини, що містить зелену дугу:

$$D^2_+ \times [-1,1] \to D^2_+ \times [-1,0], \quad (x,t) \to (x,0), \quad t \in [0,1].$$

У результаті u стає частиною циклу U. Крім того, ми застосовуємо аналогічну процедуру до кривих v і V.

Означення 2. *Pr-діаграмою потоку X називається п'ятірка (F,u,U,v,V), в якій F — сіра частина межі об'єднання ручок 1, 2 та 3 типів, а криві u, U, v та V — такі, як визначено вище.*

Опишемо інший спосіб побудови діаграм.

Поверхня F — це замикання перетину $\operatorname{Int} M$ з межею регулярного околу об'єднання таких інтегральних многовидів:

1) джерела, одновимірні стійкі многовиди й особливі точки індексу $(1,0)$ в ∂M;

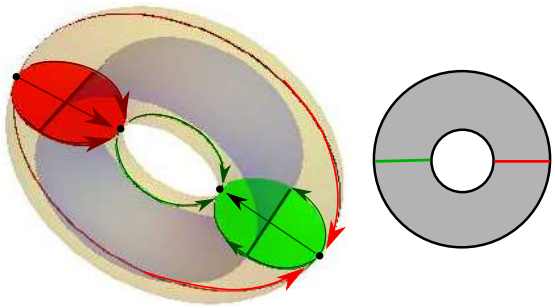

Рис. 5. Оптимальний потік Морса на повному торі.

2) одновимірні стійкі многовиди й особливі точки індексу $(0,1)$ в $\operatorname{Int} M$;

Виділимо такі набори дуг і кіл на поверхні F:

1) дуги u, які є перетином нестійких многовидів, особливих точок індексу $(1,0)$ і поверхні F;

2) дуги й кола U, які є перетином стійких многовидів, особливих точок індексу $(0,1)$ і поверхні F;

3) дуги v, які є перетином стійких многовидів, особливих точок індексу $(1,0)$ і поверхні F;

4) дуги й кола U, які є перетином стійких многовидів, особливих точок індексу $(2,0)$ і поверхні F.

Множина (F,u,U,v,V), яка складається з поверхні з краєм, множини кіл і дуг, буде Pr-діаграмою потоку Морса на тривимірному многовиді з межею.

Приклад. Наведемо приклад Pr-діаграми потоку Морса. Градієнтний потік функції висоти на повному торі (рис. 5).

Функція висоти на повному торі має чотири критичні точки при обмеженні її на межу. Відповідні особливі точки будуть мати 1, 3, 4 та 6 типи.

Такі потоки виникають під час накачування пробитого колеса як потоки повітря всередині колеса.

На рис. 6 наведено процес побудови Pr-діаграм для трьох потоків на тривимірному диску з 6 нерухомими точками.

Залежно від перетину стійких та нестійких многовидів розмірності 2 всередині тривимірного диска остання Pr-діаграма могла б мати три та більше точок перетину між червоною та зеленою кривими.

2. Класифікація потоків Морса за Pr-діаграмами. Для класифікації потоків Морса за Pr-діаграмою доведемо критерій топологічної еквівалентності потоків, опишемо топологічні властивості діаграм і визначимо, які з діаграм можуть бути реалізовані потоками Морса. Крім того, якщо Pr-діаграма задає потік на тривимірному многовиді, то вона визначає і потік, що є його обмеженням на межу. Встановимо топологічний тип цього потоку. Також розглянемо обернену задачу: чи можна локальне продовження потоку з межі зробити глобальним?

2.1. Критерій топологічної еквівалентності потоків. Дві Pr-діаграми потоку Морса є ізоморфними, якщо існує гомеоморфізм поверхні, що відображає множини дуг і кіл у множини дуг і кіл того ж типу.

Теорема 1. *Два потоки Морса – Смейла на тривимірному многовиді з краєм є топологічно траєкторно еквівалентними тоді й тільки тоді, коли їхні Pr-діаграми ізоморфні.*

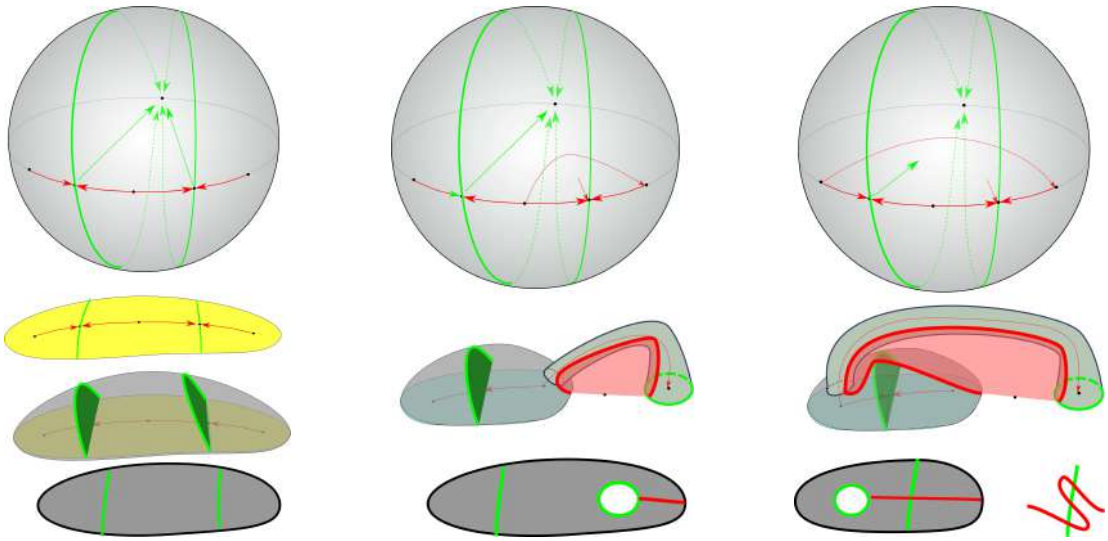

Рис. 6. Потоки на D^3.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\varphi\colon M \to M$ — топологічна еквівалентність потоку, породженого полем X, на потік, породжений полем X'. Побудуємо гомеоморфізм $h\colon F \to F'$ між поверхнями їхніх Pr-діаграм. Якщо γ_x — траєкторія, що проходить через точку $x \in F$, то шуканий гомеоморфізм задається формулою $h(x) = f(\gamma_x) \cap F'$.

Достатність. Доведення аналогічне доведенням для замкнених многовидів у розмірності 2 і 3, тому наведемо лише його схему. Якщо задано ізоморфізм $h\colon F \to F'$ Pr-діаграм, то він встановлює бієкцію між траєкторіями векторного поля: траєкторіям, що перетинають поверхню F ставляться у відповідність траєкторії, що проходять через образи перетинів, а траєкторіям, що належать одновимірним стійким або нестійким многовидам, ставляться у відповідність траєкторії, які визначаються відображенням околів кривих u, U, v, V. Поверхня F розбиває многовид M на дві частини: перша частина M_1 містить ті напівтраєкторії, які входять у точки з F, а друга частина M_2 містить напівтраєкторії, які виходять із F. Побудуємо топологічну еквівалентність, що відображає M_1 на M'_1. Оберемо на цих многовидах такі ріманові метрики, щоб відповідні траєкторії і напівтраєкторії, які належать одновимірним і двовимірним стійким і нестійким многовидам, мали однакову довжину. Побудуємо гомеоморфізм відповідних траєкторій і напівтраєкторій, який зберігає відношення довжин дуг кривих. У сукупності ці гомеоморфізми будуть задавати шуканий гомеоморфізм M_1 на M'_1. Аналогічно будуємо гомеоморфізм M_2 на M'_2. Оскільки ці два гомеоморфізми збігаються на спільній границі, то вони задають шуканий гомеоморфізм M на M'.

2.2. Топологічні властивості Pr-діаграм потоків Морса.

Теорема 2. *Pr-діаграми потоків Морса мають такі властивості:*

1) $U_i, V_i \subset \partial M$, $\operatorname{Int} u_i$, $\operatorname{Int} v_i \subset \operatorname{Int} M$, $\partial u_i, \partial v_i \subset \partial M$*;*

2) $\partial U_j \subset \cup_i \partial u_i$, $\partial V_j \subset \cup_i \partial v_i$*;*

3) $U_i \cap U_j = \varnothing$, *якщо* $i \neq j$, $u_i \cap u_j = \varnothing$, *якщо* $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \varnothing$, *якщо* $i \neq j$, $v_i \cap v_j = \varnothing$, *якщо* $i \neq j$, $\operatorname{Int} u_i \cap \operatorname{Int} U_j = \varnothing$, $\operatorname{Int} v_i \cap \operatorname{Int} V_j = \varnothing$, $\partial u_i \cap \partial v_j = \varnothing$.

4) U_k *є замкненою кривою або належить циклу, який складається з* U_i *і* u_j*, такого, що в кінцях дуг* u_j *завжди повертає наліво; аналогічна властивість справедлива і для* V_k.

5) *якщо ми розріжемо поверхню F вздовж u_i і зробимо сферичну перебудову за U-циклами, то отримаємо об'єднання двовимірних дисків. Аналогічне виконується для v_i і V_j.*

Зауваження. Останні двовимірні диски (u-область) відповідають джерелам (тип 1), U-цикли відповідають точкам індексу $(0,1)$ (тип 2), u-криві — точкам індексу $(1,0)$ (тип 3), v-криві — точкам індексу $(1,1)$ (тип 4), V-цикли — точкам індексу $(2,0)$ (тип 5), v-області — стокам (тип 6).

Доведення. 1) Це випливає з того, що відповідні траєкторії стійких і нестійких многовидів належать внутрішності або границі многовида M.

2) Границі нестійких многовидів індексу $(0,1)$ складаються з кривих U_i і перетинів нестійких многовидів із ∂M. Оскільки границі цих перетинів співпадають із ∂u_i, маємо перше включення. Друге включення доводиться аналогічно.

3) Від супротивного, якщо б існувала точка, що належить цим перетинам, то траєкторія, що проходить через неї, належала б двом різним стійким (або двом нестійким) многовидам розмірності 2, що не можливо.

4) Ці цикли відповідають границям нестійких многовидів індексу $(0,1)$ або стійким індексу $(2,0)$.

5) Ці диски відповідають нестійким многовидам точок індексу $(0,0)$.

2.3. Теорема реалізації.

Теорема 3. *Якщо поверхня F з 4 наборами кривих має властивості 1 – 5, то вона є Pr-діаграмою потоку Морса.*

Доведення. Оскільки за властивістю 3) $u_i \cap u_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$, то ми можемо обрати їхні достатньо малі регулярні околи, які не перетинаються. Приклеїмо ручки третього типу по сірих областях до цих околів (при цьому зелені криві відображаються на криві u_i). Якщо ці криві входили в U-цикли, то проведемо деформацію цих циклів, обернену до деформації U-циклів при приклеюванні ручки типу 3 до ручки типу 2. Далі для цих циклів оберемо регулярні околи на об'єднанні частини поверхні, яка лишилась, і синіх областей приклеєних ручок. До цих околів приклеїмо сірі області ручок типу 2. Частини поверхні, які лишилися, в об'єднанні з синіми областями заклеїмо сірою областю ручок типу 1 (це можна зробити за властивістю 5)). Проведемо аналогічні побудови для v- й V-кривих, приклеївши до поверхні ручки типів 4, 5 і 6. Усередині кожної ручки задамо стандартне векторне поле $\{\pm x, \pm y, \pm z\}$ так само, як на рис. 3. Згладивши ці поля в місцях склейки, отримаємо шукане векторне поле.

2.4. Відновлення потоку на межі за Pr-діаграмою. Покажемо, як за Pr-діаграмою можна визначити топологічний тип обмеження потоку на межу тривимірного многовида. Подамо межу тривимірного многовида у вигляді об'єднання $\partial M = F_u \cup F_v$, де $\partial F_u = \partial F_v = F_u \cap F_v$. F_u містить нерухомі точки типів 1 – 3 і потік на ньому визначається по F і кривих u_i, U_j. F_v містить нерухомі точки типів 4 – 6 і потік на ньому визначається по F і кривих v_i, V_j. На спільній границі потік направлений із F_u у F_v. Для побудови F_u розглянемо U-цикли на F і їхні регулярні околи. Позначимо через U_i^1 компоненти границі цих околів, які не перетинаються з ∂M. Проведемо сферичні перебудови вздовж них — розріжемо F по них і отримані замкнені криві заклеїмо двовимірними дисками. Отриману поверхню позначимо через F_u. Центр (довільна внутрішня точка) кожної кривої u_i буде сідловою точкою потоку, а сама крива — нестійким многовидом для неї (об'єднанням двох сепаратрис). У кожній області, одержаній розбиттям F_u кривими u_i, оберемо джерело і проведемо по одній сепаратрисі до кожного сідла, що лежить на границі цієї області. Всі інші траєкторії будуть йти від джерел до ∂F_u. Проведемо аналогічні побудови з F

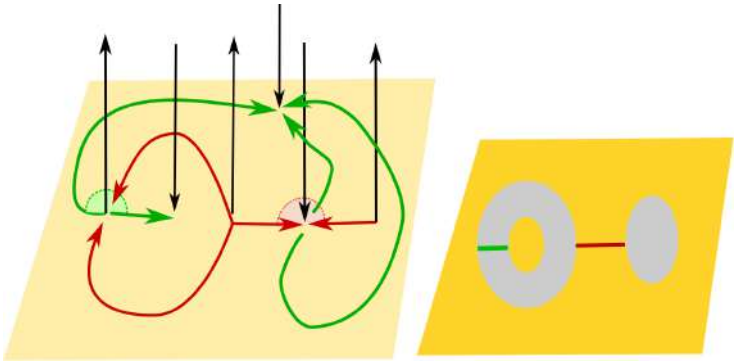

Рис. 7. Неможливий потік на D^3.

і кривими v_i, V_j. Отримаємо поверхню F_v і потік із сідловими точками і стоками. У результаті отримаємо потік на ∂M як об'єднання побудованих потоків. Після згладжування на границі ∂F_u отримаємо шуканий потік (згладжування можна не робити, якщо на кожній поверхні будувати потік, перпендикулярний до її межі).

2.5. Про продовження потоку з околу межі на внутрішність тривимірного многовида. Топологічний тип продовження потоку з межі тривимірного многовида на регулярний окіл межі залежить від типу особливих точок (як точок тривимірного многовида), які визначаються з наявності траєкторії, що належить внутрішності і входить в особливу точку. Якщо є, то друге число в індексі дорівнює одиниці, а якщо відсутня (що рівносильне тому, що є траєкторія, яка виходить із особливої точки), то нулю. Крім того, сума індексів Пуанкаре повинна дорівнювати нулю (ейлеровій характеристиці подвоєння многовида).

Існування глобального продовження на весь тривимірний многовид рівносильне існуванню діаграми потоку, для якої процедура, що описана в попередньому пункті, дасть початковий потік на поверхні. Побудова поверхні F і кривих u_i, U_j аналогічна тому, як і для заданого потоку. При цьому є довільність у виборі джерел, із яких виходять траєкторії, що ідуть у точки типу $(0,1)$. Після проведення аналогічної процедури з кривими v_i, V_j отримаємо іншу поверхню з тією ж межею. Тоді задача побудови Pr-діаграми полягає у знаходженні гомеоморфізму однієї поверхні на іншу, який співпадає з тотожним відображенням на межі. Це рівносильно побудові на першій поверхні з кривими u_i, U_j кривих v_i із заданими їхніми точками на межі (криві V_j вже лежать на межі). При цьому побудована Pr-діаграма повинна задавати тривимірний диск. Це означає, що після приклейки до компонент межі двовимірних дисків, U- і V-цикли будуть утворювати систему меридіанів діаграми Хегора тривимірної сфери.

На рис. 7 наведено приклад, коли тотожний гомеоморфізм меж (три кола) не можна продовжити до гомеоморфізму поверхонь (двовимірний диск у об'єднанні з кільцем).

Таким чином, цей потік у околі сфери не продовжується на тривимірний диск.

3. Потоки Морса на тривимірному диску. Для того щоб знайти всі потоки з заданим набором нерухомих точок на межі тривимірного диска, будемо знаходити всі можливі продовження з межі. При цьому будемо вважати, що потоки не мають внутрішніх криволінійних двокутників із зеленою і червоною сторонами. Оскільки ейлерова характеристика замкненої поверхні парна, то число нерухомих точок на межі також парне. З двома нерухомими точками (джерелом і стоком) існує єдиний потік. Його Pr-діаграма — двовимірний диск без червоних та зелених кривих.

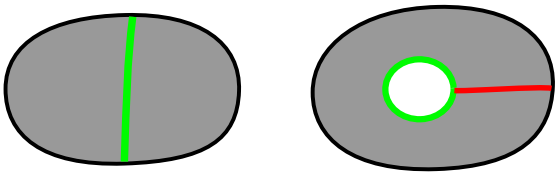

Рис. 8. Два потоки з чотирма нерухомими точками на D^3.

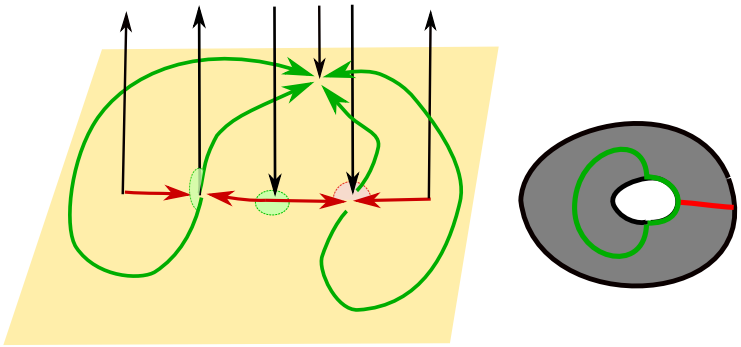

Рис. 9. Потік на D^3 першого типу та його Pr-діаграма.

3.1. Потоки з чотирма нерухомими точками на межі. З означення потоку Морса випливає, що у нього є джерело і стік (особливості типу 1 та 6). Обмеження потоку на сферу може мати два джерела, сідло і стік або джерело, сідло та два стоки. Ці два потоки з точністю до топологічної еквівалентності отримуються один із одного зміною напрямків руху за всіма траєкторіями. Тому будемо надалі розглядати тільки такі потоки, у яких обмеження на межу має джерел не менше, ніж стоків. Тоді можливі два випадки: 1) із сідла, а отже, й з одного із джерел, на сфері виходить внутрішня траєкторія; 2) внутрішні траєкторії входять у ці точки. Pr-діаграми цих потоків зображено на рис. 8.

Отже, існує чотири топологічно нееквівалентні потоки з чотирма нерухомими точками.

3.2. Потоки з шістьма нерухомими точками на межі. У випадку шістьох нерухомих точок можливі такі потоки на сфері: 1) три джерела, два сідла і стік; 2) два джерела, два стоки і два сідла, один із стійких одновимірних многовидів утворює петлю; 3) два джерела, два стоки і два сідла, стійкі одновимірні многовиди не утворюють петель; 4) одне джерело, три стоки і два сідла. Число продовжень потоків у четвертому варіанті таке саме, як і у першому (тому що вони отримуються один із одного зміною напрямків рухів на траєкторіях). Три потоки першого типу вже були описані раніше (рис. 6). Якщо в середнє джерело на сфері з правого джерела входить траєкторія, то можливий потік, як на рис. 9.

Якщо б траєкторія, що входить у середню нерухому точку, виходила б із лівого джерела (й усі напрямки такі, як на рис. 9), то ми б отримали потік, який не можливо продовжити в середину тривимірного диска.

Якщо тільки одне з джерел на сфері є джерелом на тривимірному диску, то можливі два варіанти: це джерело знаходиться в центрі (рис. 10а) або збоку (рис. 10б).

Отже, для першого типу потоків на сфері (а тому й для четвертого) існує 6 нееквівалентних продовжень до потоку на тривимірному диску.

Далі розглянемо другий тип потоків на сфері. Два приклади продовження таких потоків зображено на рис. 11.

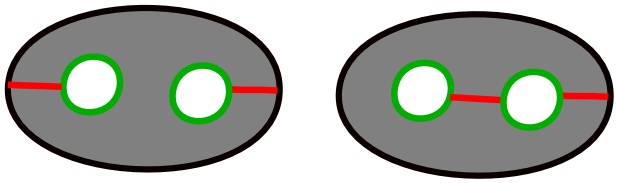

Рис. 10. Дві Pr-діаграми потоків першого типу.

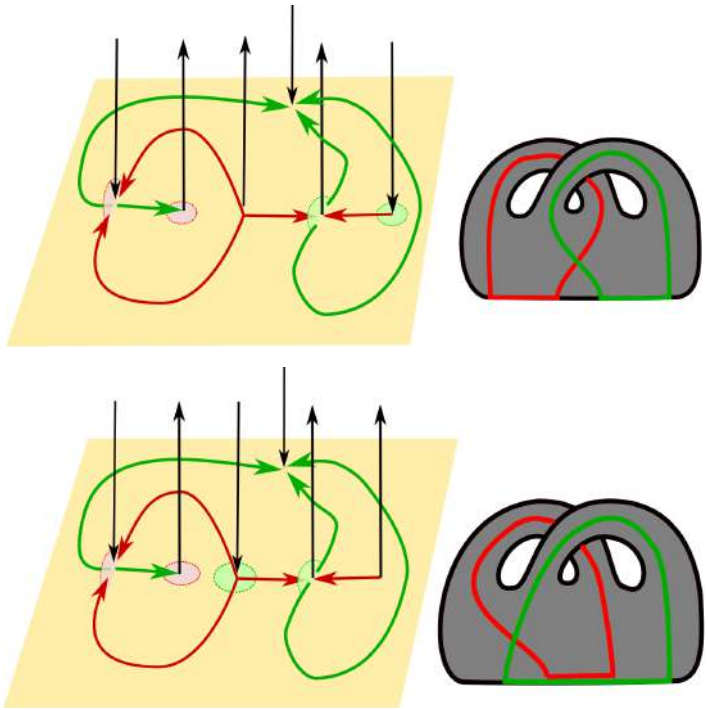

Рис. 11. Два потоки на D^3 другого типу та їхні Pr-діаграми.

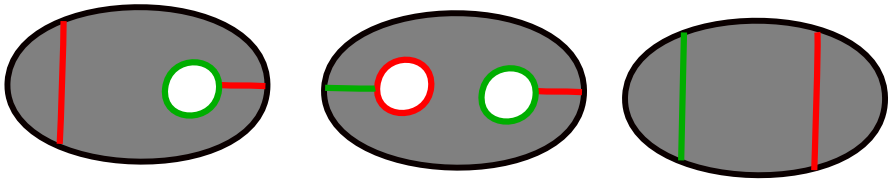

Рис. 12. Три діаграми другого типу.

Враховуючи обмеження на суму індексів, усього існує 14 можливостей локально продовжити цей потік, одна з яких не може бути реалізована глобально (див. рис. 6). Кожну іншу можна реалізувати однозначно, тому маємо 13 потоків у цьому випадку.

Ще три з Pr-діаграм цих потоків зображено на рис. 12. Ще дві Pr-діаграми можна отримати з Pr-діаграм на рис. 11, якщо червоне розфарбування / не розфарбування межі змінити на протилежне. Крім того, ще по три Pr-діаграми можна отримати з перших двох Pr-діаграм рис. 12, якщо дозволити робити такі операції: 1) одночасно міняти червоні

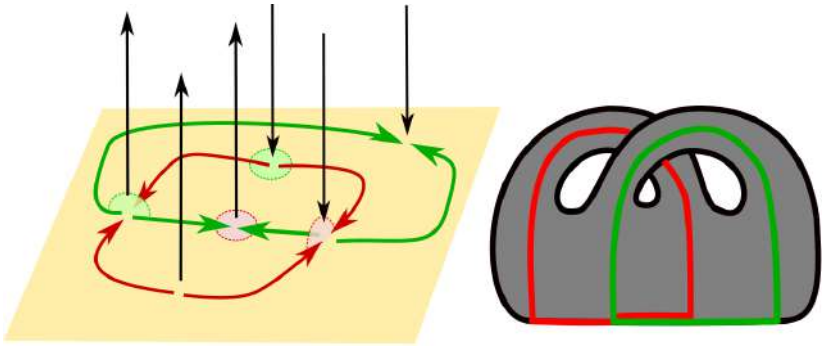

Рис. 13. Потік на D^3 третього типу та його діаграма.

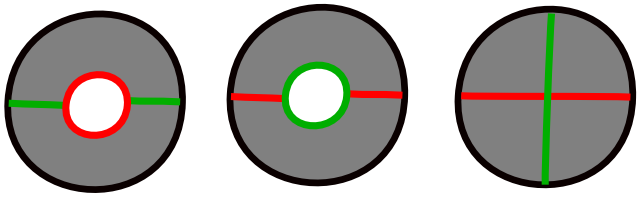

Рис. 14. Три діаграми третього типу.

та зелені кольори всіх дуг і хорд; 2) змінити червоний колір межі (розфарбовано / не розфарбовано).

Далі розглянемо третій тип потоків на сфері. Цей потік можна зобразити на одиничній сфері так, що він буде симетричним відносно координатних площин. Зважаючи на симетрії, такі потоки будуть визначатися числом глобальних джерел і стоків.

Отже, можливі чотири ситуації: 1) одне джерело й один стік (рис. 13); 2) два джерела й один стік (рис. 14а); 3) одне джерело й два стоки (рис. 14б); 4) два джерела й два стоки (рис. 14в).

Підсумовуючи всі варіанти, маємо 29 потоків із 6 особливостями на межі D^3.

3.3. Гравітаційний потік системи Сонце – Земля. В системі Сонце – Земля розглядаються точки, що рухаються навколо Сонця (точніше, центру O мас Землі та Сонця) з тією ж кутовою швидкістю, що й Земля. На точки діє три сили — сила тяжіння до Сонця, сила тяжіння до Землі та відцентрова сила. Перші дві сили обернено пропорційні за модулем відстані до відповідних тіл, а третя — пропорційна відстані до O. Тоді центри Землі й Сонця є стоками. На прямій Сонце – Земля є ще три нерухомі точки (точки Лагранжа L_1, L_2, L_3), що в площині обертання S є сідлами. Крім цього, в цій площині є ще дві нерухомі точки (L_4, L_5) — джерела.

Обертання площини S однозначно породжує обертання тривимірного простору навколо осі, перпендикулярної до S, що проходить через O. Оскільки система симетрична відносно цієї площини, то вона описується потоком в одному з двох підпросторів, який будемо називати верхнім. Розглянемо півсферу з центром в O, досить великого радіуса, таку, що всі нерухомі точки лежать всередині неї в об'єднанні з плоским диском того самого радіуса. Згладимо це об'єднання на перетині й у точках отриманої поверхні спроєктуємо поле на дотичну площину і згладимо його. Цей процес відповідає тому, що при достатньо

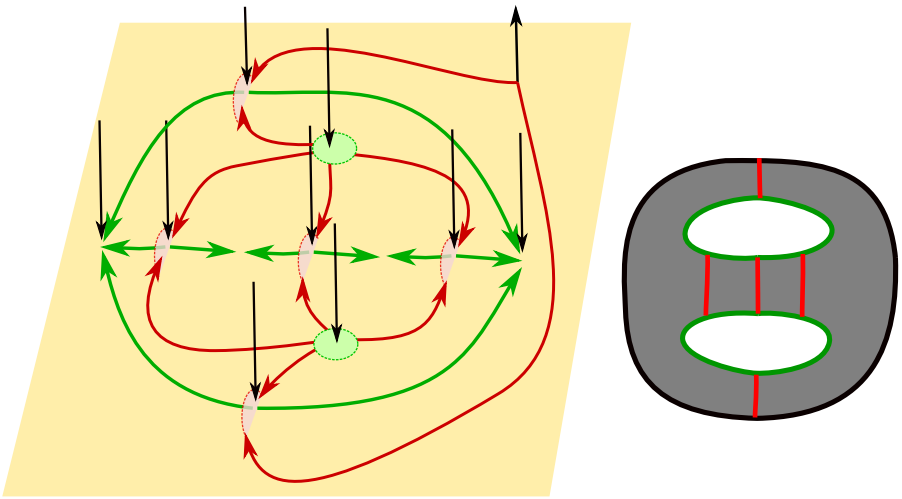

Рис. 15. Потік системи Сонце – Земля на D^3.

великих відстанях нас не цікавлять відстані до точки, а тільки її розміщення на екрані телескопу, а згладжування в точках перетину — переміщення спостерігача у внутрішню точку верхнього підпростору.

При цьому на верхній півсфері у полюсі буде джерело, а на екваторі додаються ще два стоки й два сідла. Цей потік і його діаграма зображені на рис. 15. На Pr-діаграмі зелені криві відповідають точкам L_4 і L_5, три червоні криві між ними — точкам L_1, L_2, L_3, а криволінійні чотирикутники, що обмежені ними — Сонцю і Землі.

4. Оптимальні потоки Морса на тілі з ручками.

Означення 3. *Потік Морса з нерухомими точками на межі тіла з ручками M називатимемо оптимальним, якщо він має мінімальну кількість особливостей і сідлових зв'язок серед усіх таких потоків на M.*

З означення випливає, що оптимальний потік має не менше нерухомих точок, ніж оптимальний потік на межі. Крім того, Pr-діаграма оптимального потоку має найменше число точок перетину між червоними й зеленими меридіанами.

Теорема 4. *На тілах із g ручками потік Морса буде оптимальним тоді й тільки тоді, коли він має по одній точці типу 1 і типу 6, і по g кривих u та v (нерухомих точок 3 й 4 типу) і без точок перетину між ними на діаграмі потоку.*

Доведення. *Достатність.* Оскільки кожний потік Морса має джерело та стік, то він має точки 1 і 6 типу. Оскільки тільки приклейка ручки третього типу збільшує рід поверхні (тіла), то на тілі з g ручками повинно бути не менше ніж g точок третього типу (кривих u). Якщо обернути напрямок руху за потоком, то тими ж самими міркуваннями отримаємо, що точок 4 типу не менше, ніж g.

Необхідність. Покажемо, що існує потік, що задовольняє умови теореми. Для цього наведемо його діаграму. Вона є двовимірним диском з g дірками, кожна дірка з'єднана з межею диска парою паралельних кривих, одна з яких червона, а інша зелена. Для $g = 2$ див. рис. 17а.

Оскільки оптимальні потоки на зв'язних замкнених орієнтованих поверхнях можна задавати за допомогою хордових діаграм, то далі покажемо, як їх можна використати для знаходження потоків на тілі з ручками.

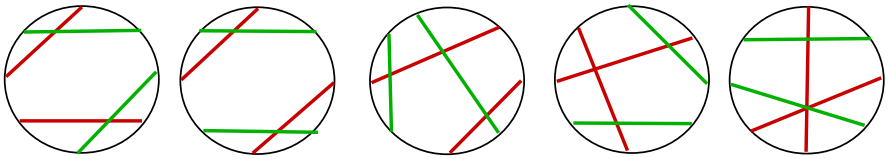

Рис. 16. Кольорові хордові діаграми потоків Морса роду 2.

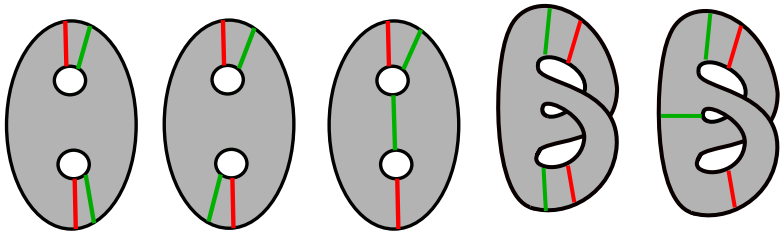

Рис. 17. Pr-діаграми потоків Морса на тілі з двома ручками.

Якщо ми розріжемо поверхню F Pr-діаграми вздовж червоних кривих, то отримаємо двовимірний диск із зеленими хордами. З'єднуємо середини червоних сторін червоною хордою, якщо вона належить до однієї червоної кривої. Отримана кольорова хордова діаграма є повним топологічним інваріантом потоку.

Отже, кольорова (з червоними та зеленими хордами) хордова діаграма буде хордовою діаграмою оптимального потоку Морса, якщо вона 1-циклічна, кількість червоних і зелених хорд рівна, а зелені хорди не мають перетинів між собою.

Зауважимо, що якщо на кольоровій хордовій діаграмі ми опустимо розфарбування (всі хорди розфарбуємо одним кольором), то отримаємо хордову діаграму потоку обмеження на межу. Тому для того щоб знайти діаграми всіх оптимальних потоків на тілі роду g, у діаграм з $2g$ хордами, що задають оптимальний потік на поверхні, треба виділити по g хорд, що не перетинаються, розфарбувати їх у зелений колір, а решту хорд у червоний.

4.1. Оптимальні потоки на повному торі. На поверхні тора існує єдиний оптимальний потік і його хордова діаграма має дві хорди, що перетинаються. Розфарбувавши одну з хорд у зелений колір, а іншу в червоний, отримаємо розфарбовану хордову діаграму потоку на повному торі (тілі з однією ручкою).

Отже, існує єдиний оптимальний потік на повному торі. Його Pr-діаграму ми побудували раніше на рис. 5.

4.2. Оптимальні потоки на тілі з двома ручками. На замкненій орієнтованій поверхні роду 2 існує 4 топологічно нееквівалентні потоки (див., наприклад, [13]). Якщо всі хорди перетинаються в одній точці (центрі кола), то ми з них не зможемо вибрати двох хорд, що не перетинаються. Для решти трьох діаграм можливі розфарбування, зображені на рис 16.

Відповідні Pr-діаграми потоків зображено на рис. 17.

Отже, існує п'ять різних структур оптимальних потоків на тілі з двома ручками.

4.3. Оптимальні потоки на тілі з трьома ручками. На рис. 18 зображено 82 хордові діаграми, що задають оптимальні потоки на орієнтованій поверхні роду 3, а також указано число способів, якими можна вибрати три хорди, що не перетинаються.

Отже, існує 177 різних структур оптимальних потоків на тілі з трьома ручками.

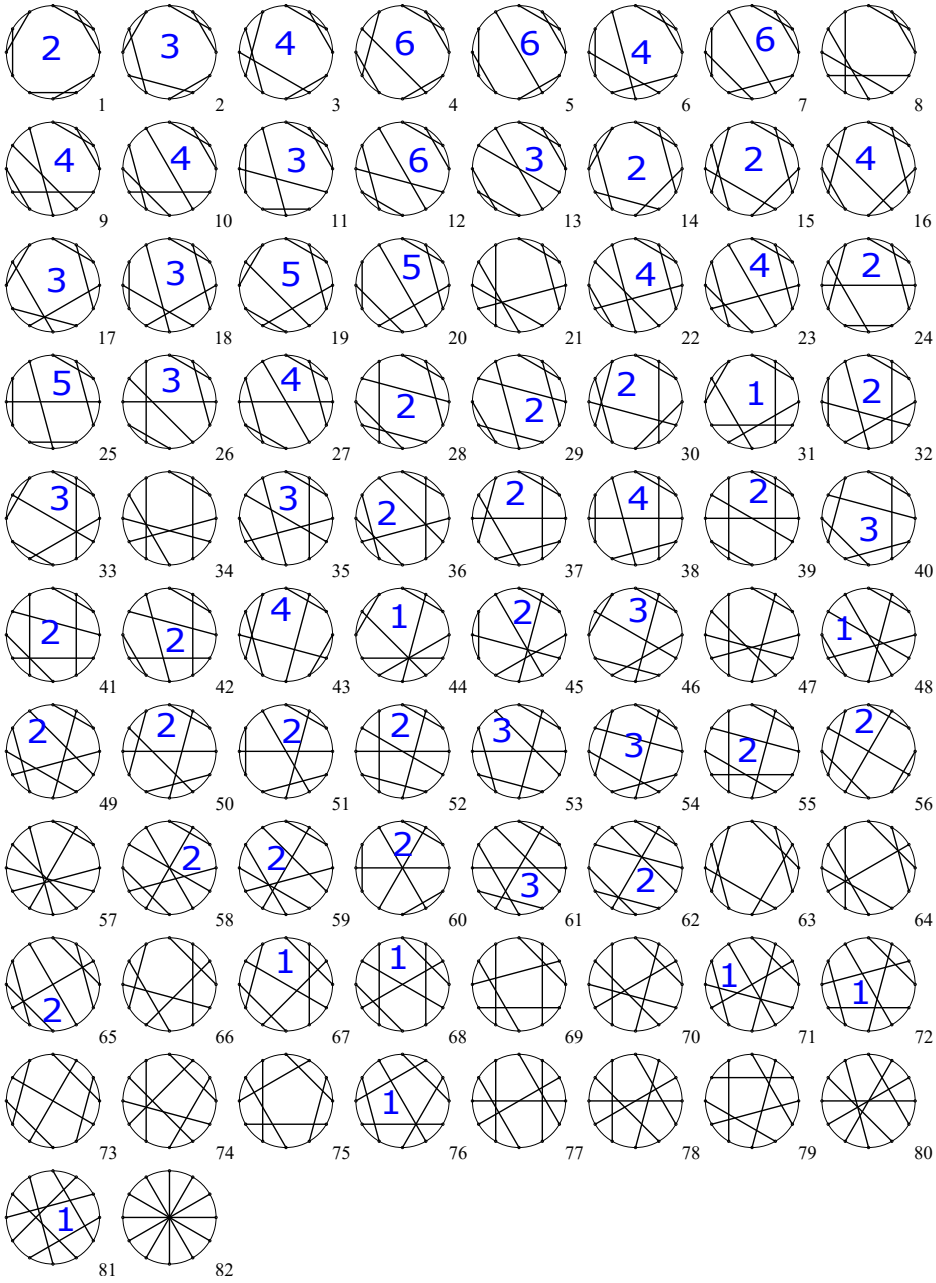

Рис. 18. Оптимальні потоки Морса на тілі з ручками роду 3.

4.4. Водяні потоки на річці з островами. На річці потік має в точках на березі та дні нульову швидкість, проте якщо ми спостерігаємо за тілом у воді певного діаметра, то нас будуть цікавити лише точки, що не попадають у деякий малий окіл дна. Тому викинемо цей окіл і згладимо результат на межі. Вектор швидкості на отриманій граничній поверхні ортогонально спроєктуємо на межу і згладимо векторне поле в околі межі. Зауважимо, що регулярні траєкторії межі по дну підходять до берега, а на поверхні річки прямують до центру. Якщо на річці n островів, то потік буде в тілі з n ручками.

Оптимальний потік на тілі з n ручками будемо називати річковим, якщо він має такі властивості: 1) граничну поверхню можна розрізати на дві гомеоморфні поверхні, які будемо називати верхня та нижня, так, що всі нерухомі точки лежать на перетині цих двох поверхонь; 2) одна з компонент цього перетину містить дві нерухомі точки — джерело й стік, а інші компоненти містять по два сідла, в одне з яких входить сепаратриса, а з іншого виходить сепаратриса, що належать верхній поверхні; 3) інші сепаратриси належать нижній поверхні.

Теорема 5. *Кольорова хордова діаграма буде діаграмою річкового потоку, якщо: 1) вона має по n хорд кожного кольору; 2) хорди одного кольору не перетинаються між собою; 3) на червоних хордах можна виділити по одному з кінців (верхні кінці) і упорядкувати хорди так, що ці кінці будуть послідовними точками хордової діаграми (між ними не має інших кінців хорд, ні червоних, ні зелених).*

Доведення. Верхні кінці відповідають сепаратрисам, що прямують із джерела до островів по (верхній) поверхні річки. Інші сепаратриси, що виходять із джерела, прямують по дну (нижній поверхні), тому відповідні їм точки на хордовій діаграмі відокремлені від виділених кінців. Кінці, що не є верхніми, назвемо нижніми. Тоді всі хорди розбиваються на пари: в одну пару входять червона хорда та зелена, яка її перетинає в точці, найближчій до верхнього кінця.

Якщо розглядати водяні потоки на річці з двома островами, то серед п'яти діаграм рис. 17 для них можливі тільки 1 й 3 діаграми (острови поруч та острови один над одним, відповідно).

Для потоків із трьома островами серед 82 діаграм на рис. 18 можливі лише хордові діаграми 5, 7, 11, 12, 19, 20, 38, 42.

Висновки. Побудований нами повний топологічний інваріант потоку Морса на орієнтованих 3-многовидах з межею, Pr-діаграма потоку, узагальнює діаграми Хегора для замкнених многовидів. Знайдені за допомогою нього структури потоків на тривимірному диску та тілах із ручками доводять його ефективність. Цікавим було б також дослідити такі питання:

1) які будуть діаграми оптимальних потоків на інших тривимірних многовидах (наприклад, доповнення до околу вузла в тривимірній сфері; многовиди, в яких межа — сфера);

2) побудувати топологічний інваріант потоків на неорієнтованих 3-многовидах;

3) узагальнити ці результати на потоки Морса – Смейла із замкненими орбітами;

4) дослідити потоки на многовидах із кутами;

5) дослідити потоки, у яких разом із нерухомими точками на межі є внутрішні нерухомі точки.

Література

1. М. В. Лосєва, О. О. Пришляк, *Топологія потоків Морса – Смейла з особливостями на межі двовимірного диска*, Proc. Intern. Geom. Center, **9**, № 2, 32 – 41 (2016).
2. M. M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds. I, II*, Topology, **1**, № 2 (1962); Topology, **2**, № 2 (1963).
3. M. M. Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds*, Dynamical Systems, Acad. Press, New York, London, 389 – 419 (1973).
4. J. Palis, S. Smale, *Structural stability theorems*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 223 – 231 (1970).
5. J. Robbin, *A structural stability theorem*, Ann. of Math. (2), *94*, 447 – 493 (1971).

6. C. Robinson, *Structural stability on manifolds with boundary*, J. Differential Equations, **37**, № 1, 1 – 11 (1980).
7. R. Mane, *The characterization of structural stability*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **66**, 161 – 210 (1988).
8. P. B. Percell, *Structural stability on manifolds with boundary*, Topology, **12**, 123 – 144 (1973).
9. R. Labarca, M. J. Pacifico, *Stability of Morse – Smale vector fields on manifolds with boundary*, Topology, **29**, № 1, 57 – 81 (1990).
10. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва (1966).
11. D. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **48**, 73 – 81 (1975).
12. А. А. Ошемков, В. В. Шарко, *О классификации потоков Морса на двумерных многообразиях*, Мат. сб., **189**, № 8, 93 – 140 (1998).
13. Z. Kibalko, A. Prishlyak, R. Shchurko, *Trajectory equivalence of optimal Morse flows on closed surfaces*, Proc. Int. Geom. Cent., **11**, № 1, 12 – 26 (2018).
14. Я. Л. Уманский, *Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса – Смейла с конечным числом особых траекторий*, Мат. сб., **181**, № 2, 212 – 239 (1990).
15. А. О. Пришляк, *Топологическая эквивалентность векторных полей Морса – Смейла с веh 2 на трехмерных многообразиях*, Укр. мат. журн., **54**, № 4, 492 – 500 (2002); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **54**, № 4, 603 – 612 (2002).
16. A. Prishlyak, *Morse – Smale vector fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds*, Math. Notes, **71**, № 1-2, 230 – 235 (2002).
17. A. Prishlyak, *Complete topological invariants of Morse – Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds*, J. Math. Sci. (N.Y.), **144**, № 5, 4492 – 4499 (2007).
18. Ch. Hatamian, A. Prishlyak, *Heegaard diagrams and optimal Morse flows on non-orientable 3-manifolds of genus 1 and genus 2*, Proc. Int. Geom. Cent., **13**, № 3, 33 – 48 (2020).
19. А. О. Пришляк, *Топологическая классификация m-полей на дву- и трехмерных многообразиях с краем*, Укр. мат. журн., **55**, № 6, 799 – 805 (2003); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **55**, № 6, 966 – 973 (2003).
20. О. О. Пришляк, М. В. Лосєва, *Оптимальні потоки Морса – Смейла з особливостями на межі поверхні*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 231–237 (2018); ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.), **243**, № 2, 279 – 286 (2019).
21. A. Prishlyak, M. Loseva, *Topology of optimal flows with collective dynamics on closed orientable surfaces*, Proc. Int. Geom. Cent., **13**, № 2, 50 – 67 (2020).
22. О. О. Пришляк, А. А. Прус, *Трикольоровий граф потоку Морса на компактній поверхні з межею*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 250 – 261 (2019); ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.), **249**, № 4, 661 – 672 (2020).
23. M. Borodzik, A. Nemethi, A. Ranicki, *Morse theory for manifolds with boundary*, Algebr. Geom. Topol., **16**, 971 – 1023 (2016).

Одержано 27.07.22