УДК 517.5

ПОВНОТА СИСТЕМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПУ БЕССЕЛЯ

Р. В. Хаць

Дрогоб. держ. пед. ун-т ім. І. Франка
вул. І. Франка, 24, Дрогобич, 82100, Львівська обл., Україна
e-mail: khats@ukr.net

We show an example of a linear differential operator in a Hilbert space that has no eigenfunctions but has some generalized eigenfunctions in a certain sense. We prove that this operator is formally adjoint to Bessel-type differential operators systems of canonical eigenfunctions of which are over-complete. We also investigate completeness of a system of generalized eigenfunctions of this differential operator.

Наведено приклад лінійного диференціального оператора в деякому гільбертовому просторі, який не має власних функцій, але має в певному розумінні деякі узагальнені власні функції. Доведено, що цей оператор є формально спряженим до диференціальних операторів типу Бесселя, системи канонічних власних функцій яких є переповненими. Досліджено також повноту системи узагальнених власних функцій цього диференціального оператора.

1. Вступ. Нехай $C(\Delta)$ — векторний простір функцій $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$, неперервних на проміжку $\Delta \subset \mathbb{C}$, а $C^{(k)}(\Delta)$ — множина функцій $f \in C(\Delta)$, для яких $f^{(k)} \in C(\Delta)$. Нехай $\gamma \in \mathbb{R}$, $L^2\big((0;1); x^\gamma dx\big)$ — ваговий лебегів простір усіх вимірних функцій $f\colon (0;1) \to \mathbb{C}$, для яких $\displaystyle\int_0^1 t^\gamma |f(t)|^2\,dt < +\infty$ і скалярний добуток в $L^2\big((0;1); x^\gamma dx\big)$ визначається за формулою $\langle f_1; f_2\rangle = \displaystyle\int_0^1 t^\gamma f_1(t)\overline{f_2(t)}\,dt$. Нехай, крім цього,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad z = re^{i\varphi},$$

— функція Бесселя першого роду з індексом $\nu \in \mathbb{R}$, де Γ — гамма-функція Ейлера.

Відомо (див., наприклад, [1, 2]), що функція J_ν є розв'язком рівняння Бесселя $y''+y'/x+ +\big(1-\nu^2/x^2\big)y = 0$, функція $y(x) = J_\nu(xs)$ є розв'язком рівняння $-y''-y'/x+y\nu^2/x^2 = s^2 y$, функції $y(x) = \sqrt{xs}J_{\pm\nu}(xs)$ є розв'язками рівняння $-y'' + \big(\nu^2 - 1/4\big)y/x^2 = s^2 y$, а функції $y(x) = x^{-2\nu+1}\sqrt{xs}J_{\pm\nu}(xs)$ задовольняють диференціальне рівняння

$$-y'' - 2(2\nu-1)\frac{1}{x}\,y' - 3\big((\nu-1)^2 - 1/4\big)\,\frac{1}{x^2}y = s^2 y,$$

де $s \neq 0$ і $\nu \geq 0$. Система елементів $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ гільбертового простору $\mathcal{H}$ називається [3, с. 4258] *повною* в $\mathcal{H}$, якщо $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$.

Дослідженню різних властивостей крайових задач на власні значення, породжених рівнянням Бесселя і пов'язаними з ним рівняннями, і спектральних задач для операторів Бесселя, присвячено багато роботіт (див., наприклад, [1, 2, 4 – 26] і бібліографію в них). Зокрема, в [14] досліджувалася крайова задача

$$-\psi''(x) + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$\psi(x) = O(x^{\nu+1/2}), \quad x \to 0, \quad \nu \geq 0,$$
$$\alpha\psi(1) + \beta\psi'(1) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Така крайова задача має зліченну множину дійсних і простих власних значень $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ [14], де $\lambda_n = \omega_n^2$ і $\alpha J_\nu(\omega_n) + \beta\omega_n J'_\nu(\omega_n) = 0$. При цьому функції $\psi_n(x) = \omega_n^{-\nu}\sqrt{\pi x/2}J_\nu(\omega_n x)$, $n \in \mathbb{N}$, є відповідними власними функціями. Число $\lambda = 0$ є власним значенням [14] тоді й тільки тоді, коли $\alpha + \beta(\nu + 1/2) = 0$. Такого типу крайові задачі на власні значення виникають, якщо метод відокремлення змінних використовується для дослідження радіальних операторів Шредінгера на кулі в евклідовому просторі [15, с. 160 – 161], зональних операторів Шредінгера на сферах [16, 17] або при вивченні операторів Лапласа для ріманового многовиду, який є гіперповерхнею обертання. В теорії диференціальних рівнянь при вивченні подібних крайових задач важливу роль відіграє також повнота їх систем розв'язків на проміжку $[0; 1]$ [2, с. 355 – 357; 4, с. 424 – 429; 7, 10, 12, 13, 18, 20 – 22].

Нехай $\nu = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N},\ \overline{0;\nu} = [0;\nu] \cap \mathbb{Z}$ і $\mathcal{H}^\nu := L^2((0;1); x^{2\nu-1}dx)$. У цій роботі ми розглядаємо оператор Бесселя A_ν, породжений формальним диференціальним оператором $\ell_\nu(\psi) := -\psi'' + \big(\nu^2 - 1/4\big)x^{-2}\psi$ і крайовими умовами

$$\alpha\psi(1) + \beta\psi'(1) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \tag{1}$$

$$\exists c_j \in \mathbb{C} \colon \psi(x) = \sum_{j \in \overline{0;\nu}} c_j x^{-\nu+2j+1/2} + o\Big(x^{\nu+1/2}\Big), \quad x \to 0+, \tag{2}$$

область визначення $\mathcal{D}(A_\nu)$ якого складається з функцій $\psi \in C^{(2)}(0; 1]$, що задовольняють ці крайові умови, й асимптотичну рівність (2) можна двічі почленно диференціювати. Оскільки [18, 19] $\ell_\nu(\psi) = O\big(x^{-\nu+1/2}\big),\ x \to 0+$, то $A_\nu(\psi) \in \mathcal{H}^\nu$, якщо $\psi \in \mathcal{D}(A_\nu)$. Такі оператори цікаві тим, що система їхніх власних функцій є переповненою, тобто залишається повною після відкидання певної скінченної кількості їх [18 – 26]. У статтях [18, 19, 22, 26] досліджувалися основні властивості оператора A_ν у випадку $\alpha = 1$ і $\beta = 0$. Зокрема, в [18, 22] показано, що при $\alpha = 1$ і $\beta = 0$, оператор A_ν з $\nu = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N}$, має зліченну множину власних значень $\Big\{\widehat{\lambda}_k : k \in \mathbb{N}\Big\}$, де $\widehat{\lambda}_k = \widehat{s}_k^{\,2}$ і $\widehat{s}_k$ — нулі функції Бесселя $J_{-\nu}$. При цьому функції $\widehat{\psi}_{k,\nu}(x) = \widehat{s}_k^{\,\nu}\sqrt{\pi x/2}J_{-\nu}(\widehat{s}_k x),\ k \in \mathbb{N}$, є власними функціями зазначеного оператора і система $\Big\{\widehat{\psi}_{k,\nu} : k \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2; \ldots; l\}\Big\}$ є повною у просторі $\mathcal{H}^\nu$ [18, 19, 22 – 26]. З метою поглибленого вивчення таких операторів у статті [19] побудовано формально спряжений оператор $B_\nu : \mathcal{H}^\nu \to \mathcal{H}^\nu$ до оператора A_ν з $\alpha = 1$ і $\beta = 0$ і доведено, що оператор B_ν не має власних значень (звичайних), але має деякі узагальнені власні значення й відповідні їм узагальнені власні функції ширини $m \in \{0; 1; 2\}$. Крім цього, у роботі [19] досліджено апроксимаційні властивості (повноту, мінімальність і базисність) систем узагальнених власних функцій оператора B_ν.

Актуальним є здійснити аналогічні дослідження у важливому частковому випадку $\alpha = \beta(\nu - 1/2)$ з $\nu = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N}$ і $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Цей випадок відрізняється від інших тим, що тільки в ньому число $\lambda_0 = 0$ є власним значенням оператора A_ν (див. теорему 2.1). У п. 3, ми покажемо приклад лінійного диференціального оператора B_ν в деякому гільбертовому просторі, який не має власних функцій, але має в певному розумінні деякі узагальнені власні функції (див. теорему 3.1). У цьому ж пункті доведемо, що цей оператор є формально спряженим до диференціальних операторів типу Бесселя, системи канонічних власних функцій яких є переповненими. Крім того, дослідимо також повноту деякої системи узагальнених власних функцій оператора B_ν (див. теорему 3.2). Такого типу оператори B_ν виникають при знаходженні біортогональних систем підсистем власних векторів деяких лінійних операторів у гільбертовому просторі, системи канонічних власних векторів яких є переповненими [18 – 26].

2. Оператори Бесселя A_ν і $\widetilde{A}_\nu$. Нехай $\nu = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}^\nu = L^2\big((0;1); x^{2\nu-1}dx\big)$ і $\widetilde{A}_\nu$ — оператор, породжений формальним диференціальним оператором $\ell_\nu(\psi)$, область визначення $\mathcal{D}(\widetilde{A}_\nu)$ якого складається з функцій $\psi \in C^{(2)}[0;1]$, які задовольняють крайові умови $\psi(0) = 0$ і $(\nu-1/2)\psi(1)+\psi'(1) = 0$. Тоді [19] $\ell_\nu(\psi) = O(1/x),\ x \to 0+$, і $\widetilde{A}_\nu(\psi) \in \mathcal{H}^\nu$, якщо $\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_\nu)$. Основні властивості оператора $\widetilde{A}_\nu$ з крайовими умовами $\psi(0) = \psi(1) = 0$ вивчалися у роботі [19].

Ми дослідимо деякі властивості операторів A_ν і $\widetilde{A}_\nu$ з $\nu = l+1/2,\ l \in \mathbb{N},\ \alpha = \beta(\nu-1/2)$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, та, зокрема, доведемо наступні твердження.

Теорема 2.1. *Нехай $\nu = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N},\ \alpha = \beta(\nu - 1/2)$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тоді оператор A_ν має власне значення $\lambda_0 = 0$, якому відповідають власні функції $\psi_{0,\nu}(x) = C_1 x^{-\nu+1/2}$, де $C_1 \neq 0$ — довільна стала. Крім цього, система $\{\psi_{k,\nu} : k \in \mathbb{N}\},\ \psi_{k,\nu}(x) := s_k^\nu \sqrt{\pi x/2} J_{-\nu}(s_k x),\ k \in \mathbb{N}$, є системою власних функцій оператора A_ν, які відповідають їхнім власним значенням $\lambda_k = s_k^2,\ k \in \mathbb{N}$, де s_k — додатні корені рівняння $\nu J_{-\nu}(s) + J'_{-\nu}(s) = 0$.*

Доведення. У випадку $s = 0$ функції $\phi_1(x) = x^{-\nu+1/2}$ і $\phi_2(x) = x^{\nu+1/2}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $\ell_\nu(\psi) = s^2\psi$, а його загальний розв'язок має вигляд $\psi(x) = C_1 x^{-\nu+1/2} + C_2 x^{\nu+1/2}$, де $C_1,\ C_2$ — довільні сталі. Умова (2) задовольняється при $C_2 = 0$. Оскільки $\psi'(x) = C_1(-\nu + 1/2)x^{-\nu-1/2} + C_2(\nu + 1/2)x^{\nu-1/2}$, то $\alpha\psi(1) + \beta\psi'(1) = C_1(\alpha - \beta(\nu - 1/2))$. Тому умова (1) виконується тоді й тільки тоді, коли $\alpha = \beta(\nu - 1/2)$ і $C_1 \neq 0$.

Отже, функції $\psi_{0,\nu}(x) = C_1 x^{-\nu+1/2},\ C_1 \neq 0$, є власними функціями оператора A_ν, які відповідають власному значенню $\lambda_0 = 0$. У випадку $s \neq 0$ лінійно незалежними розв'язками рівняння $\ell_\nu(\psi) = s^2\psi$ є функції $\psi_1(x) = s^{-\nu-1/2}\sqrt{\pi x s/2} J_\nu(sx)$ і $\psi_2(x) = \chi_\nu s^{\nu-1/2}\sqrt{\pi x s/2} J_{-\nu}(sx)$, де $\chi_\nu = -1/\sin(\nu\pi)$. Оскільки [1, с. 43; 2, с. 346; 19]

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} + O\big(x^{\nu+2}\big), \quad x \to 0, \tag{3}$$

то

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\nu+1/2}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} + O\Big(x^{\nu+5/2}\Big), \quad x \to 0+,$$

$$\psi_2(x) = \chi_\nu \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j\in\overline{0;\nu}} \frac{(-1)^j s^{2j} x^{-\nu+2j+1/2}}{2^{-\nu+2j} j! \Gamma(-\nu + j + 1)} + O\Big(x^{-\nu+2[\nu]+5/2}\Big), \quad x \to 0+ .$$

Тому загальний розв'язок $\psi(x) = C_3\psi_1(x) + C_4\psi_2(x)$ цього рівняння, де $C_3,\ C_4$ — довільні сталі, задовольняє умову (2) тоді й тільки тоді, коли $C_3 = 0$. Далі, оскільки [1, с. 45, 66; 2, с. 349]

$$(x^\nu J_{-\nu}(x))' = -x^\nu J_{-\nu+1}(x), \qquad J_{-\nu+1}(x) = -J'_{-\nu}(x) - \frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x),$$

то

$$\psi_2'(x) = \chi_\nu \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^\nu \sqrt{x} \Big(J'_{-\nu}(sx) + \frac{1}{2x} J_{-\nu}(sx) \Big),$$

$$\beta(\nu-1/2)\psi_2(1)+\beta\psi_2'(1)=\beta\chi_\nu s^\nu\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\nu J_{-\nu}(s)+J_{-\nu}'(s)\big),\quad s>0.$$

Тому умова (1) виконується, якщо $\nu J_{-\nu}(s_k)+J_{-\nu}'(s_k)=0$, де $s_k>0,\ k\in\mathbb{N}$. Отже, функції $\psi_{k,\nu}(x)=s_k^\nu\sqrt{\pi x/2}J_{-\nu}(s_kx),\ k\in\mathbb{N}$, є власними функціями оператора A_ν, які відповідають їхнім власним значенням $\lambda_k=s_k^2$.

Теорему 2.1 доведено.

Теорема 2.2. *Нехай* $\nu=l+1/2,\ l\in\mathbb{N},\ \alpha=\beta(\nu-1/2)$, *де* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *і* $|\alpha|+|\beta|\neq0$. *Система* $\Big\{\widetilde{\psi}_{k,\nu}:k\in\mathbb{N}\Big\},\ \widetilde{\psi}_{k,\nu}(x):=\widetilde{s}_k^{-\nu}\sqrt{\pi x/2}J_\nu(x\widetilde{s}_k)$, *є системою власних функцій оператора* $\widetilde{A}_\nu$, *які відповідають їхнім власним значенням* $\widetilde{\lambda}_k=\widetilde{s}_k^2,\ k\in\mathbb{N}$, *де* $\widetilde{s}_k$ *— додатні корені рівняння* $\nu J_\nu(s)+J_\nu'(s)=0$.

Доведення теореми 2.2 є аналогічним до доведення теореми 2.1.

Зауваження 2.1. У випадку $\alpha=1$ і $\beta=0$ основні властивості операторів A_ν і $\widetilde{A}_\nu$ вивчалися в роботах [18, 19, 22–26]. Зокрема, якщо $\nu=l+1/2,\ l\in\mathbb{N}$ і $J_{-\nu}(s_k)=0$, то система $\{\psi_{k,\nu}:k\in\mathbb{N}\},\ \psi_{k,\nu}(x)=s_k^\nu\sqrt{\pi x/2}J_{-\nu}(s_kx)$, власних функцій оператора A_ν є переповненою в просторі $\mathcal{H}^\nu$ [18, 19, 22–26], тобто повною в цьому просторі є система $\{\psi_{k,\nu}:k\in\mathbb{N}\setminus\{1;2;\ldots;l\}\}$. Система $\{\widetilde{\psi}_{k,\nu}:k\in\mathbb{N}\},\ \widetilde{\psi}_{k,\nu}(x)=\widetilde{s}_k^{-\nu}\sqrt{\pi x/2}J_\nu(x\widetilde{s}_k)$, власних функцій оператора $\widetilde{A}_\nu$ також є повною [19] в $\mathcal{H}^\nu$, якщо $J_\nu(\widetilde{s}_k)=0$. Крім цього, в [27, 28] доведено, що система $\{\widetilde{\psi}_{k,\nu}:k\in\mathbb{N}\}$ є безумовним базисом простору $L^2(0;1)$, якщо $\big(\widetilde{s}_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ — довільна послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел.

3. Властивості оператора B_ν. Нехай $\nu=l+1/2,\ l\in\mathbb{N},\ \mathcal{H}^\nu=L^2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$ і B_ν — оператор, породжений формальним диференціальним оператором

$$\ell_\nu^*(u):=-u''-2(2\nu-1)\,\frac{1}{x}\,u'-3((\nu-1)^2-1/4)\frac{1}{x^2}\,u$$

з областю визначення $\mathcal{D}(B_\nu)$, яка складається з функцій $u\in C^{(2)}(0;1]$, що задовольняють крайові умови

$$u(x)=O\Big(x^{-\nu+5/2}\Big),\quad x\to0+,\tag{4}$$

$$3(\nu-1/2)u(1)+u'(1)=0,\tag{5}$$

і асимптотичну рівність (4) можна двічі почленно диференціювати. Тоді [19] $\ell_\nu^*(u)=O\big(x^{-\nu+1/2}\big),\ x\to0+$, і $B_\nu(u)\in\mathcal{H}^\nu$, якщо $u\in\mathcal{D}(B_\nu)$.

Нехай $\Omega\subseteq\mathbb{N}$ — деяка непорожня множина. Множина $\mathfrak{M}(B)=\{\mu_j:j\in\Omega\}$ називається [19] *множиною узагальнених власних значень* лінійного оператора $B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ з областю визначення $\mathcal{D}(B)$ у векторному (лінійному) просторі $\mathcal{H}$, якщо існує така множина $\mathfrak{U}(B)=\{U_j:j\in\Omega\}$ ненульових елементів $U_j\in\mathcal{H}$, що $U_k-U_n\in\mathcal{D}(B)$ і $B(U_k-U_n)=\mu_kU_k-\mu_nU_n$ для кожного $k\in\Omega$ і $n\in\Omega$. При цьому множина $\mathfrak{U}(B)$ називається *множиною узагальнених власних векторів* оператора B. Це поняття множини узагальнених власних векторів є корисним для пошуку біортогональної системи підсистеми власних векторів деяких лінійних операторів у гільбертовому просторі, системи канонічних власних векторів яких є переповненими [19]. Оператор може мати декілька множин узагальнених власних значень. Об'єднання двох таких множин може не бути множиною узагальнених власних значень. Кожна множина звичайних власних значень є й множиною узагальнених значень [19].

Оператор $B\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ ми називаємо [19] *формально спряженим* оператором до оператора $A\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в евклідовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $\langle\cdot;\cdot\rangle\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$, якщо $\langle A\psi;u\rangle=\langle\psi;Bu\rangle$ для всіх $\psi\in\mathcal{D}(A)$ і $u\in\mathcal{D}(B)$.

Нашою метою є доведення наступних тверджень.

Теорема 3.1. *Нехай $l\in\mathbb{N}$ і $\nu=l+1/2$. Тоді оператор B_ν не має власних значень. При цьому множина $\widetilde{\mathfrak{M}}(B_\nu)=\{\widetilde{\mu}_k\colon k\in\mathbb{N}\}$, $\widetilde{\mu}_k:=\widetilde{s}_k^2$, де $\widetilde{s}_k$ — додатні корені рівняння $\nu J_\nu(s)+J_\nu'(s)=0$, є множиною узагальнених власних значень оператора B_ν, а*

$$\widetilde{U}_{k,\nu}(x):=\frac{\sqrt{x\widetilde{s}_k}J_\nu(x\widetilde{s}_k)}{\widetilde{s}_k^{\nu+1/2}x^{2\nu-1}},\quad k\in\mathbb{N},$$

— відповідними узагальненими власними функціями цього оператора. Крім цього, множина $\mathfrak{M}(B_{3/2})=\{\mu_k\colon k\in\mathbb{N}\}$, $\mu_k:=s_k^2$, де $s_k=\pi k+\pi/2$, також є множиною узагальнених власних значень оператора $B_{3/2}$ і

$$U_{k,3/2}(x):=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{xs_k}J_{-3/2}(xs_k)}{s_kx^2}+\frac{1}{s_k^2x^3},\quad k\in\mathbb{N},$$

— відповідними узагальненими власними функціями оператора $B_{3/2}$.

Теорема 3.2. *Нехай $\nu=l+1/2$, $l\in\mathbb{N}$, $\alpha=\beta(\nu-1/2)$, де $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ і $|\alpha|+|\beta|\neq 0$. Тоді оператор B_ν є формально спряженим у просторі $\mathcal{H}^\nu$ до операторів A_ν і $\widetilde{A}_\nu$. Крім цього, система $\{U_{k,3/2}\colon k\in\mathbb{N}\}$, де $U_{k,3/2}(x)=\sqrt{\pi/2}s_k^{-1}x^{-2}\sqrt{xs_k}J_{-3/2}(xs_k)+s_k^{-2}x^{-3}$ і $s_k=\pi k+\pi/2$, є повною у просторі $\mathcal{H}^{3/2}$.*

Для доведення теорем 3.1 і 3.2 нам потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 3.1. *Нехай $l\in\mathbb{N}$ і $\nu=l+1/2$. Тоді оператор B_ν не має власних значень.*

Доведення цієї леми міститься в доведенні леми 3.1 з [19].

Лема 3.2. *Нехай $\nu=l+1/2$, $l\in\mathbb{N}$, $\mathcal{H}^\nu=L^2\big((0;1);x^{2\nu-1}dx\big)$, $\widetilde{\mu}_k:=\widetilde{s}_k^2$, $k\in\mathbb{N}$, де $\widetilde{s}_k$ — додатні корені рівняння $\nu J_\nu(s)+J_\nu'(s)=0$ і $\widetilde{U}_{k,\nu}(x):=\widetilde{s}_k^{-\nu-1/2}x^{-2\nu+1}\sqrt{x\widetilde{s}_k}J_\nu(x\widetilde{s}_k)$. Тоді $\widetilde{U}_{k,\nu}\in\mathcal{H}^\nu$, $\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\in\mathcal{D}(B_\nu)$ і $B_\nu\big(\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\big)=\widetilde{\mu}_k\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{\mu}_n\widetilde{U}_{n,\nu}$ для будь-яких $k\in\mathbb{N}$ і $n\in\mathbb{N}$.*

Доведення. Використовуючи співвідношення (3), отримуємо

$$\frac{\sqrt{xs}J_\nu(xs)}{x^{2\nu-1}}=\frac{s^{\nu+1/2}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\,x^{-\nu+3/2}+O\big(x^{-\nu+7/2}\big),\quad x\to 0+,$$

і

$$\widetilde{U}_{k,\nu}(x)=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\,x^{-\nu+3/2}+O\big(x^{-\nu+7/2}\big),\quad x\to 0+\,.$$

Тому $\widetilde{U}_{k,\nu}\in\mathcal{H}^\nu$. Крім цього, $\widetilde{U}_{k,\nu}(x)-\widetilde{U}_{n,\nu}(x)=O\big(x^{-\nu+7/2}\big)=O\big(x^{-\nu+5/2}\big)$, $x\to 0+$. До того ж, оскільки [1, с. 45; 2, с. 349]

$$\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x),\qquad J_\nu'(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}\,J_\nu(x),$$

то

$$\widetilde{U}_{k,\nu}'(x)=\widetilde{s}_k^{-\nu}x^{-2\nu+3/2}\left(J_\nu'(\widetilde{s}_kx)+\frac{J_\nu\big(\widetilde{s}_kx\big)}{x}\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\right),$$

і
$$3(\nu-1/2)\widetilde{U}_{k,\nu}(1)+\widetilde{U}'_{k,\nu}(1)=\widetilde{s}_k^{-\nu}\big(\nu J_\nu(\widetilde{s}_k)+J'_\nu(\widetilde{s}_k)\big),\quad \widetilde{s}_k>0.$$
Тому
$$3(\nu-1/2)\Big(\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\Big)(1)+\Big(\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\Big)'(1)=0$$
тоді й тільки тоді, коли $\widetilde{s}_k,\ k\in\mathbb{N}$, є додатними коренями рівняння $\nu J_\nu(s)+J'_\nu(s)=0$.

Отже,
$$\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\in\mathcal{D}(B_\nu)$$
і
$$B_\nu\Big(\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\Big)=\ell^*_\nu\Big(\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{U}_{n,\nu}\Big)=\widetilde{s}_k^2\widetilde{U}_{k,\nu}-\widetilde{s}_n^2\widetilde{U}_{n,\nu}$$
для кожного $k\in\mathbb{N}$ та $n\in\mathbb{N}$.

Лему 3.2 доведено.

Зауваження 3.1. Система $\Big\{\widetilde{U}_{k,\nu}:k\in\mathbb{N}\Big\}$ є повною в просторі $L^2\big((0;1);x^{4\nu-4}dx\big)$, якщо $\widetilde{s}_k$ — нулі функції Бесселя J_ν [19, 29]. У [27 – 34] досліджувались апроксимаційні властивості (повнота, мінімальність, базисність) більш загальних систем $\big\{x^{-p-1}\sqrt{x\widetilde{s}_k}J_\nu(x\widetilde{s}_k):k\in\mathbb{N}\big\}$ у ваговому просторі $L^2\big((0;1);x^{2p}dx\big)$, де $\nu\ge1/2,\ p\in\mathbb{R}$ і $(\widetilde{s}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — довільна послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел.

Лема 3.3. *Нехай* $\mathcal{H}^{3/2}=L^2\big((0;1);x^2dx\big)$, $\mu_k:=s_k^2$, *де* $s_k=\pi k+\pi/2,\ k\in\mathbb{N}$, *і* $U_{k,3/2}(x):=$ $:=\sqrt{\pi/2}s_k^{-1}x^{-2}\sqrt{xs_k}J_{-3/2}(xs_k)+s_k^{-2}x^{-3}$. *Тоді* $U_{k,3/2}\in\mathcal{H}^{3/2},\ U_{k,3/2}-U_{n,3/2}\in\mathcal{D}(B_{3/2})$ *і* $B_{3/2}(U_{k,3/2}-U_{n,3/2})=\mu_kU_{k,3/2}-\mu_nU_{n,3/2}$ *для будь-яких* $k\in\mathbb{N}$ *і* $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. Оскільки [19]
$$\frac{\sqrt{xs}J_{-\nu}(xs)}{x^{2\nu-1}}=\sum_{j\in\overline{0;\nu}}\frac{(-1)^js^{-\nu+2j+1/2}x^{-3\nu+2j+3/2}}{2^{-\nu+2j}j!\Gamma(-\nu+j+1)}+O\big(x^{-3\nu+2[\nu]+7/2}\big),\quad x\to0+,$$
то
$$\frac{\sqrt{xs_k}J_{-3/2}(xs_k)}{s_kx^2}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{s_k^2x^3}+\frac{1}{2x}+O(x)\right),\quad x\to0+,$$
і
$$U_{k,3/2}(x)=-\frac{1}{2x}+O(x),\quad x\to0+\,.$$
Тому $U_{k,3/2}\in\mathcal{H}^{3/2}$. Крім цього, $U_{k,3/2}(x)-U_{n,3/2}(x)=O(x),\ x\to0+$. До того ж, оскільки [1, с. 55; 2, с. 350] $\sqrt{x}J_{-3/2}(x)=-\sqrt{2/\pi}x^{-1}(\cos x+x\sin x)$, то
$$U_{k,3/2}(x)=-\frac{1}{s_kx^2}\left(\frac{\cos(xs_k)}{xs_k}+\sin(xs_k)\right)+\frac{1}{s_k^2x^3},\tag{6}$$
$$U'_{k,3/2}(x)=\frac{1}{s_kx^3}\left(\frac{3\cos(xs_k)}{xs_k}+3\sin(xs_k)-xs_k\cos(xs_k)\right)-\frac{3}{s_k^2x^4},$$
і $3U_{k,3/2}(1)+U'_{k,3/2}(1)=-\cos s_k,\ s_k>0,\ k\in\mathbb{N}$. Отже, $U_{k,3/2}-U_{n,3/2}\in\mathcal{D}(B_{3/2})$, тому що умова (5) виконується тоді й тільки тоді, коли $s_k=\pi k+\pi/2,\ k\in\mathbb{N}$.

Таким чином, $B_{3/2}(U_{k,3/2}-U_{n,3/2})=\ell^*_{3/2}(U_{k,3/2}-U_{n,3/2})=s_k^2U_{k,3/2}-s_n^2U_{n,3/2}$ для кожного $k\in\mathbb{N}$ і $n\in\mathbb{N}$.

Лему 3.3 доведено.

Теорема 3.1 є безпосереднім наслідком лем 3.1 – 3.3.

Зауваження 3.2. $U_{k,3/2} - \widetilde{U}_{n,3/2} \notin \mathcal{D}(B_{3/2})$. Нам не вдалося довести леми 3.3 для довільного $\nu = l + 1/2$ з $l \in \mathbb{N}$. Теорема 3.1 залишає поза увагою існування інших множин узагальнених власних значень.

Зауваження 3.3. Можна різними способами вводити узагальнені власні вектори лінійних диференціальних операторів із виходом у ширший простір [5 – 11]. Нехай $\widehat{\mathcal{H}} = C(0;1]$ і $\widehat{B}_\nu$ — оператор, породжений формальним диференціальним оператором $\ell_\nu^*(u)$ з областю визначення $\mathcal{D}\big(\widehat{B}_\nu\big)$, яка складається з функцій $u \in C^{(2)}(0;1]$, що задовольняють крайову умову (5). Тоді $\widehat{B}_\nu(u) \in \widehat{\mathcal{H}}$, якщо $u \in \mathcal{D}\big(\widehat{B}_\nu\big)$. Тому функції $\widetilde{U}_{k,\nu}(x) = \widetilde{s}_k^{-\nu-1/2} x^{-2\nu+1}\sqrt{x\widetilde{s}_k} J_\nu\big(x\widetilde{s}_k\big)$, $k \in \mathbb{N}$, де $\widetilde{s}_k$ — додатні корені рівняння $\nu J_\nu(s) + J'_\nu(s) = 0$, і функції $U_{k,3/2}(x) = \sqrt{\pi/2} s_k^{-1} x^{-2}\sqrt{xs_k} J_{-3/2}(xs_k) + s_k^{-2} x^{-3}$ з $s_k = \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, є узагальненими власними функціями оператора B_ν, які відповідають оператору $\widehat{B}_\nu$ (є власними функціями $\widehat{B}_\nu$).

Лема 3.4. *Нехай* $\nu = l + 1/2$, $l \in \mathbb{N}$, $\alpha = \beta(\nu - 1/2)$, *де* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *і* $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. *Тоді оператор* B_ν *є формально спряженим у просторі* $\mathcal{H}^\nu$ *до оператора* A_ν.

Доведення. Використовуючи співвідношення (2) і (4), при $x \to 0+$ отримуємо

$$\psi'(x) = \sum_{j \in \overline{0;\nu}} c_j(-\nu + 2j + 1/2) x^{-\nu+2j-1/2} + o\big(x^{\nu-1/2}\big), \quad u'(x) = O\big(x^{-\nu+3/2}\big),$$

і

$$-x^{2\nu-1}((\nu - 1/2)\psi(x) + \psi'(x))\overline{u}(x) = O(x),$$
$$x^{2\nu-2}\psi(x)\big((2\nu - 1 + (\nu - 1/2)x)\overline{u}(x) + x\overline{u}'(x)\big) = O(x).$$

Згідно з рівністю Лагранжа [19] для кожного $\psi \in \mathcal{D}(A_\nu)$ і $u \in \mathcal{D}(B_\nu)$ виконується

$$x^{2\nu-1}\Big(\ell_\nu(\psi)\overline{u} - \psi\overline{\ell_\nu^*(u)}\Big) = \frac{d}{dx}\big((-x\psi' + (2\nu - 1)\psi)x^{2\nu-2}\overline{u} + x^{2\nu-1}\psi\overline{u}'\big). \tag{7}$$

Тому

$$\int_0^1 x^{2\nu-1}\Big(\ell_\nu(\psi)\overline{u} - \psi\overline{\ell_\nu^*(u)}\Big)dx =$$
$$= \Big(-x^{2\nu-1}\big((\nu - 1/2)\psi(x) + \psi'(x)\big)\overline{u}(x) + x^{2\nu-2}\psi(x)\times$$
$$\times \big((2\nu - 1 + (\nu - 1/2)x)\overline{u}(x) + x\overline{u}'(x)\big)\Big)\Big|_0^1 =$$
$$= -\big((\nu - 1/2)\psi(1) + \psi'(1)\big)\overline{u}(1) + \psi(1)\big((3\nu - 3/2)\overline{u}(1) + \overline{u}'(1)\big) = 0.$$

Отже, для кожного $\psi \in \mathcal{D}(A_\nu)$ і $u \in \mathcal{D}(B_\nu)$

$$\int_0^1 x^{2\nu-1}\ell_\nu(\psi)\overline{u}\,dx = \int_0^1 x^{2\nu-1}\psi\overline{\ell_\nu^*(u)}\,dx.$$

Лему 3.4 доведено.

Лема 3.5. *Нехай* $\nu = l + 1/2,\ l \in \mathbb{N},\ \alpha = \beta(\nu - 1/2)$, *де* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *і* $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. *Тоді оператор* B_ν *є формально спряженим у просторі* $\mathcal{H}^\nu$ *до оператора* $\widetilde{A}_\nu$.

Доведення. Оскільки

$$-x^{2\nu-1}\big((\nu - 1/2)\psi(x) + \psi'(x)\big)\overline{u}(x) = O\Big(x^{\nu+3/2}\Big), \quad x \to 0+,$$

$$x^{2\nu-2}\psi(x)\big((2\nu - 1 + (\nu - 1/2)x)\overline{u}(x) + x\overline{u}'(x)\big) = o(x^{\nu+1/2}), \quad x \to 0+,$$

то з рівності (7), подібно до доведення леми 3.4, для кожного $\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_\nu)$ і $u \in \mathcal{D}(B_\nu)$ отримуємо

$$\int\limits_0^1 x^{2\nu-1}\ell_\nu(\psi)\overline{u}\,dx = \int\limits_0^1 x^{2\nu-1}\psi\overline{\ell_\nu^*(u)}\,dx.$$

Лему 3.5 доведено.

Ціла функція Q називається *функцією експоненціального типу* $\sigma \in [0; +\infty)$ [3, c. 4262; 4, c. 84], якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує стала $c(\varepsilon)$ така, що $|Q(z)| \le c(\varepsilon)\exp((\sigma + \varepsilon)|z|)$ для всіх $z \in \mathbb{C}$.

Через $c_1, c_2, \ldots,$ позначатимемо деякі додатні сталі.

Лема 3.6. *Система* $\{U_{k,3/2} : k \in \mathbb{N}\}$ *з* $U_{k,3/2}(x) = \sqrt{\pi/2}s_k^{-1}x^{-2}\sqrt{xs_k}J_{-3/2}(xs_k) + s_k^{-2}x^{-3}$ *і* $s_k = \pi k + \pi/2$ *є повною у просторі* $\mathcal{H}^{3/2}$.

Доведення. Припустимо, що система $\{U_{k,3/2} : k \in \mathbb{N}\}$ не є повною. Неповнота системи $\{U_{k,3/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є рівносильною до неповноти системи $\{s_k^2 U_{k,3/2} : k \in \mathbb{N}\}$. Тоді, використовуючи (6), згідно з теоремою Гана – Банаха [3, c. 4258; 4], існує така ненульова функція $h \in \mathcal{H}^{3/2}$, що

$$\int\limits_0^1 \frac{-\cos(ts_k) - ts_k\sin(ts_k) + 1}{t}\,h(t)\,dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо функцію

$$G(z) = \int\limits_0^1 \frac{-\cos(tz) - tz\sin(tz) + 1}{t^2}\,q(t)\,dt, \quad q(t) := th(t) \in L^2(0;1).$$

Маємо

$$G'(z) = -\int\limits_0^1 z\cos(tz)q(t)\,dt, \qquad G(s_k) = 0, \quad k \ge 1, \quad G(0) = G'(0) = 0.$$

Нехай

$$I_1(z) = 2\int\limits_0^{1/2} \sin^2(tz/2)\frac{q(t)}{t^2}\,dt, \qquad I_2(z) = -\int\limits_0^{1/2} z\sin(tz)\frac{q(t)}{t}\,dt,$$

$$I_3(z) = \int\limits_{1/2}^1 \frac{q(t)}{t^2}\,dt, \qquad I_4(z) = -\int\limits_{1/2}^1 \cos(tz)\,\frac{q(t)}{t^2}\,dt, \qquad I_5(z) = -\int\limits_{1/2}^1 \sin(tz)\,\frac{q(t)}{t}\,dt.$$

Тоді $G(z)=I_1(z)+I_2(z)+I_3(z)+I_4(z)+zI_5(z)$ і

$$I_4(z)=-\int\limits_{1/2}^{1} e^{itz}\frac{q(t)}{2t^2}\,dt-\int\limits_{-1}^{-1/2} e^{itz}\frac{q(-t)}{2t^2}\,dt.$$

Використовуючи нерівність Шварца, отримуємо (див. також [22, 25, 26])

$$|I_4(z)|\le c_1\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Аналогічно,

$$|I_5(z)|\le c_2\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}},\qquad |I_3(z)|\le c_3,\quad z\in\mathbb{C}.$$

До того ж, оскільки [25]

$$|\sin tz|=\sqrt{\operatorname{sh}^2(t\operatorname{Im} z)+\sin^2(t\operatorname{Re} z)},\qquad \operatorname{sh}^2(t\operatorname{Im} z)\le t^2\operatorname{sh}^2(|\operatorname{Im} z|)$$

і $\left|\sin\operatorname{Re}\dfrac{tz}{2}\right|\le\left|\operatorname{Re}\dfrac{tz}{2}\right|$ для будь-яких $z\in\mathbb{C}$ і $t\in\mathbb{R}$, то завдяки нерівності Шварца

$$|I_1(z)|\le 2\|q\|\left(\int\limits_0^{1/2}\frac{\left(\operatorname{sh}^2\left(t\dfrac{\operatorname{Im} z}{2}\right)+\sin^2\left(t\dfrac{\operatorname{Re} z}{2}\right)\right)^2}{t^4}\,dt\right)^{1/2}\le$$

$$\le c_4\left(\int\limits_0^{1/2}\left(\operatorname{sh}^2\frac{|\operatorname{Im} z|}{2}+\left(\frac{\operatorname{Re} z}{2}\right)^2\right)^2 dt\right)^{1/2}\le c_5\left(e^{|\operatorname{Im} z|}+(\operatorname{Re} z)^2\right),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Подібним чином одержуємо

$$|I_2(z)|\le c_6|z|\|q\|\left(\int\limits_0^{1/2}\frac{\operatorname{sh}^2(t\operatorname{Im} z)+\sin^2(t\operatorname{Re} z)}{t^2}\,dt\right)^{1/2}\le$$

$$\le c_7(1+|z|)\left(\int\limits_0^{1/2}\frac{\operatorname{sh}^2(t\operatorname{Im} z)}{t^2}\,dt+\int\limits_0^{1/2}\frac{\sin^2(t\operatorname{Re} z)}{t^2}\,dt\right)^{1/2}\le$$

$$\le c_7(1+|z|)\left(|\operatorname{Im} z|\int\limits_0^{|\operatorname{Im} z|/2}\frac{\operatorname{sh}^2\tau}{\tau^2}\,d\tau+|\operatorname{Re} z|\int\limits_0^{|\operatorname{Re} z|/2}\frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\,d\tau\right)^{1/2}\le$$

$$\le c_8(1+|z|)\left(|\operatorname{Im} z|\int\limits_0^{|\operatorname{Im} z|/2}\frac{\operatorname{sh}^2\tau}{\tau^2}\,d\tau+|\operatorname{Re} z|\right)^{1/2}\le$$

$$\leq c_9(1+|z|)\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{1+|\operatorname{Im} z|}+|\operatorname{Re} z|\right)^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отже, для всіх $z \in \mathbb{C}$ маємо

$$|G(z)| \leq c_5\Big(e^{|\operatorname{Im} z|}+(\operatorname{Re} z)^2\Big)+$$

$$+c_9(1+|z|)\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{1+|\operatorname{Im} z|}+|\operatorname{Re} z|\right)^{1/2}+$$

$$+c_1(1+|z|)\,\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}+c_3.$$

Далі, послідовність $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, де $s_k=\pi k+\pi/2$, є послідовністю додатних нулів парної цілої функції $D(z)=z^2\cos z$, для якої на променях $\{z\colon\ \arg z=\varphi_j\}$, $j\in\{1;2;3;4\}$, $\varphi_1\in[0;\pi/2)$, $\varphi_2\in[\pi/2;\pi)$, $\varphi_3\in(\pi;3\pi/2]$, $\varphi_4\in(3\pi/2;2\pi)$, виконується нерівність

$$|D(z)| \geq c_{10}|z|^2 e^{|\operatorname{Im} z|}.$$

Нехай $Q(z)=G(z)/D(z)$. Тоді Q — парна ціла функція експоненціального типу і

$$|Q(z)| \leq c_{11}\frac{1}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}, \quad \arg z=\varphi_j, \quad j\in\{1;2;3;4\}.$$

Отже, за принципом Фрагмена – Ліндельофа [3, с. 4263; 4, с. 47], $Q(z)\equiv 0$. Тому $G(z)\equiv 0$. Проте

$$\frac{G'(z)}{z}=-\int_0^1 \cos(tz)th(t)\,dt, \quad h\in\mathcal{H}^{3/2}.$$

Таким чином, $h(t)\equiv 0$, що суперечить припущенню. Тому система $\{U_{k,3/2}\colon k\in\mathbb{N}\}$ є повною в просторі $\mathcal{H}^{3/2}$.

Лему 3.6 доведено.

Теорема 3.2 є безпосереднім наслідком лем 3.4 – 3.6.

Література

1. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, The Macmillan Company, New York (1944).
2. V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics* [in Russian], Nauka, Moscow (1981).
3. A. M. Sedletskii, *Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I.*, J. Math. Sci. (N.Y.), **129**, № 6, 4251 – 4408 (2005).
4. B. Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1980).
5. Yu. M. Berezanskii, *Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators*, Vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1968).
6. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Spectral operators*, Pt III, Interscience Publishers, New York-London-Sydney (1971).
7. B. M. Levitan, *Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions*, Uspekhi Mat. Nauk, **6**, № 2(42), 102 – 143 (1951).
8. V. A. Marchenko, *Sturm – Liouville operators and applications*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2011).

9. M. A. Naimark, *Linear differential operators*, Ungar, New York (1968).
10. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second order differential equations*, Pt I, Clarendon Press, Oxford, London (1946).
11. F. S. Rofe-Beketov, A. M. Khol'kin, *Spectral analysis of differential operators: Interplay between spectral and oscillatory properties*, World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2005).
12. H. Hochstadt, *The mean convergence of Fourier – Bessel series*, SIAM Rev., **9**, 211 – 218 (1967).
13. J. R. Higgins, *Completeness and basis properties of sets of special functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-Melbourne (1977).
14. R. Carlson, *A Borg – Levinson theorem for Bessel operators*, Pacific J. Math., **177**, № 1, 1 – 26 (1997).
15. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. 2, Academic Press, New York-London (1975).
16. V. Guillemin, *Spectral theory on S^2: Some open questions*, Adv. Math., **42**, № 3, 283 – 298 (1981).
17. D. Gurarie, *Zonal Schrödinger operators on the n-sphere: inverse spectral problem and rigidity*, Comm. Math. Phys., **131**, 571 – 603 (1990).
18. B. V. Vynnyts'kyi, O. V. Shavala, *Some properties of boundary value problems for Bessel's equation*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc., **10**, 169 – 172 (2013).
19. R. V. Khats', *Generalized eigenvectors of linear operators and biorthogonal systems*, Constr. Math. Anal., **5**, № 2, 60 – 71 (2022).
20. A. M. Perelomov, *On the completeness of a system of coherent states*, Teoret. Mat. Fiz., **6**, № 2, 213–224 (1971).
21. A. A. Shkalikov, *Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions*, J. Math. Sci., **33**, № 6, 1311 – 1342 (1986).
22. Б. В. Винницький, О. В. Шавала, *Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя*, Мат. студії, **30**, № 1, 31 – 41 (2008).
23. О. В. Шавала, *Про деякі апроксимаційні властивості функцій Бесселя з індексом $-5/2$*, Мат. студії, **43**, № 2, 180 – 184 (2015).
24. О. В. Шавала, *Про повноту систем функцій, породжених функцією Бесселя*, Буковин. мат. журн., **5**, № 3 – 4, 168 – 171 (2017).
25. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', *Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index* $-3/2$, Mat. Stud., **34**, № 2, 152 – 159 (2010).
26. B. V. Vynnyts'kyi, V. M. Dilnyi, *On approximation properties of one trigonometric system*, Russ. Math., **58**, № 11, 10 – 21 (2014).
27. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', *A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag – Leffler type functions*, J. Contemp. Math. Anal., **50**, № 6, 300 – 305 (2015).
28. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', I. B. Sheparovych, *Unconditional bases of systems of Bessel functions*, Eurasian Math. J., **11**, № 4, 76 – 86 (2020).
29. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', *On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L^2-spaces*, Eurasian Math. J., **6**, № 1, 123 – 131 (2015).
30. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', *Completeness and minimality of systems of Bessel functions*, Ufa Math. J., **5**, № 2, 131 – 141 (2013).
31. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', *Complete biorthogonal systems of Bessel functions*, Mat. Stud., **48**, № 2, 150 – 155 (2017).
32. R. V. Khats', *On conditions of the completeness of some systems of Bessel functions in the space* $L^2((0;1);x^{2p}dx)$, Azerb. J. Math., **11**, № 1, 3 – 10 (2021).
33. R. V. Khats', *Completeness conditions of systems of Bessel functions in weighted L^2-spaces in terms of entire functions*, Turkish J. Math., **45**, № 2, 890 – 895 (2021).
34. R. V. Khats', *Integral representation of one class of entire functions*, Armen. J. Math., **14**, Paper No. 1, 1 – 9 (2022).

Одержано 31.08.22