УДК 531.38, 531.39

ЛІНІЙНІ ІНВАРІАНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ГІРОСТАТА ЗІ ЗМІННИМ ГІРОСТАТИЧНИМ МОМЕНТОМ

О. К. Щетініна, В. І. Денисенко, Ю. Ф. Діденко, С. В. Білоусова

Держ. торг.-екон. ун-т
вул. Кіото, 19, Київ, 02156, Україна
e-mail: elena-0607@ukr.net
d0212@ukr.net
y.didenko@knute.edu.ua
svetlana_belousova@ukr.net

The article is devoted to the problem of motion of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic moment. We investigate conditions of existence of linear invariant relations of equations of the Kirchhoff – Poisson class. We obtain a new solution of these equations in terms of elementary functions of time.

Розглянуто задачу про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. Досліджено умови існування лінійних інваріантних співвідношень рівнянь класу Кірхгофа – Пуассона. Одержано новий розв'язок цих рівнянь, який характеризується елементарними функціями часу.

Вступ. Сучасні технологічні конструкції (роботи, маніпулятори, гіроскопічні пристрої) являють собою систему зв'язаних твердих тіл, яка в аналітичній механіці моделюється гіростатом. Перші постановки задачі про рух гіростата розглядалися Томсоном [1], Вольтерра [2], Жуковським [3], Греєм [4]. Як гіростат розуміють систему зв'язаних твердих тіл (див. монографію [5]), у яких розподіл мас не змінюється з часом. Тут виключено випадок Жуковського [3], тобто варіант, коли тверде тіло містить ідеальну рідину, яка не стискається. Рівняння руху гіростата у вказаних роботах характеризується сталим гіростатичним моментом. У статтях Румянцева [6], Харламова [7], Віттенбурга [8] розглядалися більш загальні моделі гіростата, ці автори враховували змінність гіростатичного моменту залежно від часу.

Є певні відмінності в формулюванні поняття "гіростат". Румянцев [6] вважав, що гіростат — це система зв'язаних твердих тіл, для яких ротори статично й динамічно врівноважені; Харламов [7] характеризував ротори властивістю динамічної симетрії з центром мас, який належить осі обертання роторів. У книзі Віттенбурга [8] вивчено системи зв'язаних твердих тіл довільного вигляду. Дослідження руху гіростата є важливими в механіці (див., наприклад, [8 – 11]). У класичних задачах динаміки твердого тіла найбільш значні результати в даній області одержано у випадку прецесійних рухів гіростата [12, 13], оскільки прецесії є найбільш важливими режимами для технічних конструкцій. Відмітимо, що певні висновки дослідження руху гіростата можна використовувати в задачах керування; наприклад, у статті [14] на основі оригінального підходу до вивчення гіростата зі змінним гіростатичним моментом виявлено, що мають місце результати, які характеризуються тим, що гіростатичний момент протягом часу руху може бути напрямлений по вектору осі симетрії силових полів.

Загальним методом, який застосовується в задачах аналізу програмних рухів твердих тіл і гіростата, є метод інваріантних співвідношень, розроблений Леві-Чівіта [5] і Харламовим [15]; його особливості вказані Горром [16]. За допомогою цього методу в [17 – 20] досліджено умови існування руху твердого тіла в потенціальному полі сил, які описуються рівняннями класу Кірхгофа – Пуассона у випадку трьох інваріантних співвідношень. У цій статті одержано новий розв'язок задачі й отримано умови існування трьох інваріантних співвідношень для рівняння руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Згадані умови узагальнюють результати роботи [17].

1. Постановка задачі. Зупинимося спочатку на фізичному описі руху гіростата. Розглянемо систему S, яка складається з намагніченого тіла-носія S_0, що несе позитивні й негативні електричні заряди, та симетричного ротора S_1.

Ротор S_1 обертається навколо осі Oz, головної рухомої системи координат гіростата $Oxyz$ (O — нерухома точка; $\vec{i}_1,\ \vec{i}_2,\ \vec{i}_3$ — одиничні вектори осей $Ox,\ Oy,\ Oz$). Вважаємо, що ротор S_1 не намагнічений і не має зарядів. Гіростат обертається в магнітному полі і на нього діють ньютонівські, кулонівські сили та сили Лоренца з центрами $O_1,\ O_2$, які розміщені на одній осі, що проходить через точку O; вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — одиничний вектор осі симетрії силового поля, що є суперпозицією ньютонівського, кулонівського та магнітного полів; струми Фуко в процесі руху гіростата не виникають. Введемо позначення: $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор інерції гіростата; $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ — матриця, яка характеризує гіроскопічні сили; $C = \mathrm{diag}\,(C_1, C_2, C_3)$ — матриця, що характеризує потенціальні сили; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор узагальненого центру мас гіростата. В науковій літературі по динаміці гіростата (див., наприклад, [21 – 23]) формулюється задача про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. У [21, 24 – 26] вивчено задачу про рух тіла в ідеальній нестисливій рідині, яка тісно пов'язана із задачею про рух гіростата, описаною на початку цього пункту. Вперше цю аналогію розглянув Стєклов [25], потім для більш загального випадку на математичний зв'язок задачі про рух гіростата і про рух тіла в ідеальній рідині вказав Харламов [26]. У [21] Яхья за допомогою лінійного перетворення змінних показав повну аналогію задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил із задачею про рух твердого тіла в ідеальній нестисливій рідині.

Перейдемо до математичної постановки задачі. Будемо використовувати позначення з [21, 22] (в [27] використано змінні Лагранжа).

Позначимо через $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ кутову швидкість гіростата, а через $\boldsymbol{\lambda} = (0; 0; \lambda_3)$ — гіростатичний момент. Тоді рівняння руху гіростата запишемо у вигляді

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - \omega_2\lambda_3(t) + \omega_2 B_3\nu_3 - \omega_3 B_2\nu_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \quad (1)$$

$$A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \omega_1\lambda_3(t) + \omega_3 B_1\nu_1 - \omega_1 B_3\nu_3 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \quad (2)$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + \dot{\lambda}_3(t) = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_1 B_2\nu_2 - \omega_2 B_1\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2, \quad (3)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \quad (4)$$

де крапкою позначено похідну за часом t.

Система диференціальних рівнянь (1) – (4) є неавтономною системою і допускає два перші інтеграли

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,$$
$$A_1\omega_1\nu_1+A_2\omega_2\nu_2+(A_3\omega_3\nu_3+\lambda_3(t))\nu_3-\frac{1}{2}\big(B_1\nu_1^2+B_2\nu_2^2+B_3\nu_3^2\big)=k, \tag{5}$$

де k — довільна стала. Рівняння (1) – (4) необхідно розглядати сумісно з рівнянням [7]

$$\dot\lambda_3(t)=L(t). \tag{6}$$

Тут функція $\dot\lambda_3(t)$ має вигляд

$$\dot\lambda_3(t)=D_3(\omega_3+\dot x(t)), \tag{7}$$

де D_3 — момент інерції ротора S_1 відносно осі обертання Oz, $x(t)$ — його кутова швидкість, $L(t)$ — проєкція сил і моментів, які діють на ротор S_1 з боку тіла-носія. Відмітимо, що згідно із зауваженням Харламова [7] рівняння (6), (7) можна розглядати, застосовуючи два підходи. Перший підхід полягає в тому, що коли проінтегровані рівняння (1) – (4) і відома швидкість обертання $\dot x(t)$, то з рівняння (6) можна визначити функцію $L(t)$. Другий підхід характеризується тим, що відома функція $L(t)$. Тоді, після інтегрування рівнянь (1) – (4), рівняння (7) використовується для знаходження швидкості $\dot x(t)$ ротора S_1.

2. Структура інваріантних співвідношень. Використовуючи [18], задамо для рівнянь (1) – (4) три інваріантні співвідношення

$$\omega_1=\nu_1\varepsilon(\nu_3)+\beta_1 g(\nu_3),\quad \omega_2=\nu_2\varepsilon(\nu_3)+\beta_2 g(\nu_3),\quad \omega_3=\nu_3\varepsilon(\nu_3)+\beta_3 g(\nu_3), \tag{8}$$

де $\beta_i,\ i=\overline{1,3}$, — сталі параметри; $\varepsilon(\nu_3),\ g(\nu_3)$ — функції змінної ν_3, які можна диференціювати.

У векторному вигляді з (8) випливає

$$\boldsymbol{\omega}=\varepsilon(\nu_3)\boldsymbol{\nu}+g(\nu_3)\boldsymbol{\beta}; \tag{9}$$

тут вектор $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ не має нульових компонентів.

Підставимо функції (8) у рівняння Пуассона (4):

$$\dot\nu_1=g(\nu_3)(\beta_3\nu_2-\beta_2\nu_3),\quad \dot\nu_2=g(\nu_3)(\beta_1\nu_3-\beta_3\nu_1),\quad \dot\nu_3=g(\nu_3)(\beta_2\nu_1-\beta_1\nu_2). \tag{10}$$

Відмітимо, що інваріантні співвідношення (8) мають більш загальний вигляд порівняно з випадком [17], оскільки в [17] вважалося, що $\beta_3=0$.

Рівняння (10) мають два інваріантні співвідношення

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,\quad \beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\beta_3\nu_3=C_0, \tag{11}$$

де C_0 — стала. З другого співвідношення (11) одержимо

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu}=C_0, \tag{12}$$

тобто, на основі (12), протягом усього часу руху гіростата кут між векторами $\boldsymbol{\beta}$ і $\boldsymbol{\nu}$ сталий.

Рухи гіростата, для яких виконується ця властивість, називають прецесією щодо вертикалі [12, 22, 28]. За допомогою інваріантних співвідношень (11) знайдемо функції $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$:

$$\begin{aligned} \nu_1(\nu_3) &= \frac{1}{x_0^2}\Big[\beta_2(C_0 - \beta_3\nu_3) + \beta_1\sqrt{F(\nu_3)}\Big], \\ \nu_2(\nu_3) &= \frac{1}{x_0^2}\Big[\beta_1(C_0 - \beta_3\nu_3) - \beta_2\sqrt{F(\nu_3)}\Big], \end{aligned} \tag{13}$$

де $x_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, а $F(\nu_3)$ має значення

$$F(\nu_3) = -\beta_0^2\nu_3^2 + 2C_0\beta_3\nu_3 + \big(x_0^2 - C_0^2\big), \quad \beta_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2. \tag{14}$$

Для знаходження залежності змінної ν_3 від часу t підставимо функції (13) у третє рівняння системи (10). Одержимо інтегральне співвідношення

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{F(\nu_3)}} = t - t_0. \tag{15}$$

Функція $\nu_3(t)$ визначається з (15). Розглянемо інваріантні співвідношення (8) у випадку $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0,\ g(\nu_3) = g_0$:

$$\omega_i = \varepsilon_0\nu_i + g_0\beta_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Використовуючи функцію $F(\nu_3)$ із (14) при інтегруванні (15), а також третє рівняння системи (10), одержуємо

$$\nu_3(\psi) = \frac{1}{\gamma_0\beta_0^2}\big(\gamma_0^2\beta_0\sin\psi + C_0\beta_3\big), \tag{17}$$

де $\gamma_0^2 = \dfrac{x_0^2\big(\beta_0^2 - C_0^2\big)}{\beta_0^2}$, $\psi(t) = \beta_0 g_0 t$. Через періодичність функції $\nu_3(t)$ при знаходженні (17) у формулі (15) вважаємо $t_0 = 0$. Перетворимо співвідношення (13) на основі функцій (14) і (17):

$$\nu_1(\psi) = h_0 + h_1\cos\psi + h_2\sin\psi, \quad \nu_2(\psi) = r_0 + r_1\cos\psi + r_2\sin\psi. \tag{18}$$

У рівностях (18) введено позначення

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{C_0\beta_1\big(x_0\beta_0\mu_0 - \beta_3^2\big)}{x_0^2\gamma_0\beta_0^2}, \quad h_1 = \frac{\gamma_0\beta_2}{x_0^2}, \quad h_2 = -\frac{\gamma_0\beta_1\beta_3}{x_0^2\beta_0}, \\ r_0 &= \frac{C_0\beta_2\big(x_0\beta_0\mu_0 - \beta_3^2\big)}{x_0^2\gamma_0\beta_0^2}, \quad r_1 = -\frac{\gamma_0\beta_1}{x_0^2}, \quad r_2 = -\frac{\gamma_0\beta_2\beta_3}{x_0^2\beta_0}. \end{aligned} \tag{19}$$

Тут параметр μ_0 має значення $\sqrt{\beta_0^2 - C_0^2}$. Для зручності використання формули (17) запишемо її у скороченому вигляді

$$\nu_3(\psi) = a_0 + a_2\sin\psi, \tag{20}$$

де

$$a_0 = \frac{C_0\beta_3}{\gamma_0\beta_0^2}, \qquad a_2 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}. \tag{21}$$

Таким чином, рівняння (4) на інваріантних співвідношеннях (16) проінтегровані в елементарних функціях часу, які подані формулами (18), (20) з позначеннями (19), (21).

3. Дослідження динамічних рівнянь (1) – (3). Запишемо систему (1) у загальному випадку існування інваріантних співвідношень (8). На основі рівнянь (10) маємо

$$\begin{aligned}
&\lambda_3(\nu_3)(\nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3)) = \\
&\quad = -A_1\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(\beta_3\nu_2 - \beta_2\nu_3) - \\
&\qquad - A_1(\nu_1\varepsilon'(\nu_3) + \beta_1 g'(\nu_3))(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) + \\
&\qquad + (A_2 - A_3)[\nu_2\nu_3\varepsilon^2(\nu_3) + (\beta_3\nu_2 + \beta_2\nu_3)\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3) + \beta_2\beta_3 g^2(\nu_3)] + \\
&\qquad + \nu_2\nu_3\varepsilon(\nu_3)(B_3 - B_2) + g(\nu_3)(\beta_2 B_3\nu_3 - \beta_3 B_2\nu_2) + \\
&\qquad + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_3(\nu_3)(\nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3)) = \\
&\quad = A_2\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(\beta_1\nu_3 - \beta_3\nu_1) + \\
&\qquad + A_2\big(\nu_2\varepsilon'(\nu_3) + \beta_2 g'(\nu_3)\big)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) - \\
&\qquad - (A_3 - A_1)\big[\nu_1\nu_3\varepsilon^2(\nu_3) + (\beta_3\nu_1 + \beta_1\nu_3)\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3) + \beta_1\beta_3 g^2(\nu_3)\big] + \\
&\qquad + \nu_1\nu_3\varepsilon(\nu_3)(B_3 - B_1) + g(\nu_3)(\beta_1 B_3\nu_3 - \beta_3 B_1\nu_1) + \\
&\qquad + s_1\nu_3 - s_3\nu_1 + (C_3 - C_1)\nu_1\nu_3 = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_3'(\nu_3)g(\nu_3)F(\nu_3) = \\
&\quad = -A_3\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) + \\
&\qquad + g(\nu_3)\big(\nu_3\varepsilon'(\nu_3) + \beta_3 g'(\nu_3)\big)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) + \\
&\qquad + (A_1 - A_2)\big[\nu_1\nu_2\varepsilon^2(\nu_3) + (\beta_2\nu_1 + \beta_1\nu_2)\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3) + \beta_1\beta_2 g^2(\nu_3)\big] + \\
&\qquad + \nu_1\nu_2\varepsilon(\nu_3)(B_2 - B_1) + g(\nu_3)(\beta_1 B_2\nu_2 - \beta_2 B_1\nu_1) + \\
&\qquad + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

При розв'язку (13) – (15) система (22) – (24) є системою трьох диференціальних рівнянь щодо функцій $\varepsilon(\nu_3)$, $g(\nu_3)$, $\lambda_3(\nu_3)$. Для приведення її до нормального вигляду подамо рівняння (22), (23) таким чином:

$$\begin{aligned}
&\nu_1(\nu_3)\varepsilon'(\nu_3) + \beta_1 g'(\nu_3) = \widetilde{G}_1(\nu_3, \varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), \lambda_3(\nu_3)), \\
&\nu_2(\nu_3)\varepsilon'(\nu_3) + \beta_2 g'(\nu_3) = \widetilde{G}_2(\nu_3, \varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), \lambda_3(\nu_3)),
\end{aligned} \tag{25}$$

де функції $\widetilde{G}_1,\ \widetilde{G}_2$ з причини складності їхнього виразу тут не наводимо. Оскільки $\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2 = \dot{\nu}_3(t)/g(\nu_3)$ (див. третє рівняння з (10)), то з системи (25) можна визначити похідні

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\nu_3) &= L_1(\nu_3, \varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), \lambda_3(\nu_3)), \\ g'(\nu_3) &= L_2(\nu_3, \varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), \lambda_3(\nu_3)). \end{aligned} \tag{26}$$

Підставимо $\varepsilon'(\nu_3),\ g'(\nu_3)$ у рівняння (24):

$$\lambda_3'(\nu_3) = L_3(\nu_3, \varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), \lambda_3(\nu_3)). \tag{27}$$

Таким чином, систему (22) – (24) привели до нормальної системи (26), (27), яка є неавтономною, і через це її інтегрування — досить складна задача. Певне спрощення одержимо у випадку, коли одна з функцій $\varepsilon(\nu_3),\ g(\nu_3)$ є сталою (на основі формули (9) рух гіростата є напіврегулярною прецесією при $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$ першого типу або при $g(\nu_3) = g_0$ — другого типу [22]).

Зауваження. Рівняння (26) можна перетворити так, щоб вони не містили функції $\lambda_3(\nu_3)$. Для цього перший інтеграл із (5) у розв'язку (8), (13) – (15) запишемо так:

$$\begin{aligned} \lambda_3(\nu_3) = \frac{1}{\nu_3}\Big[& k - \varepsilon(\nu_3)\big(A_1\nu_1^2(\nu_3) + A_2\nu_2^2(\nu_3) + A_3\nu_3^2\big) - g(\nu_3)\times \\ & \times (A_1\beta_1\nu_1(\nu_3) + A_2\beta_2\nu_2(\nu_3) + A_3\beta_3\nu_3) + \frac{1}{2}\big(B_1\nu_1^2(\nu_3) + B_2\nu_2^2(\nu_3) + B_3\nu_3^2\big)\Big]. \end{aligned} \tag{28}$$

При підстановці $\lambda_3(\nu_3)$ із (28) у рівняння (26) одержана система буде системою двох диференціальних рівнянь щодо функцій $\varepsilon(\nu_3),\ g(\nu_3)$. Але при цьому підході рівняння (24) не можна заміняти інтегралом (28). Таку властивість можна проілюструвати на такому прикладі. Нехай параметри задачі підлягають обмеженням

$$s_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1. \tag{29}$$

На основі (29) із рівняння (3) одержимо

$$\lambda_3(\nu_3) = C_1 - B_1\nu_3 - A_3(\nu_3\varepsilon(\nu_3) + \beta_3 g(\nu_3)), \tag{30}$$

де C_1 — довільна стала. Очевидно, що функції (28) і (30) не співпадають, що доводить сформульоване вище твердження.

Для подальшого розгляду рівнянь (22) – (24) перетворимо рівняння (22), (23), виключивши з них функцію $\lambda_3(\nu_3)$:

$$\begin{aligned} (\nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3))\Big\{ & \nu_2\nu_3\lfloor\varepsilon^2(\nu_3)(A_2 - A_3) + \varepsilon(\nu_3)(B_3 - B_2) + C_3 - C_2\rfloor - \\ & - A_1(\nu_1\varepsilon'(\nu_3) + \beta_1 g'(\nu_3))\sqrt{F(\nu_3)} + \\ & + \nu_2[\beta_3\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(A_2 - A_1 - A_3) - \beta_3 B_2 g(\nu_3) - s_3] + \\ & + \nu_3[\beta_2\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(A_1 + A_2 - A_3) - \beta_2 B_3 g(\nu_3) + s_2] + \beta_2\beta_3 g^2(\nu_3)(A_2 - A_3)\Big\} + \end{aligned}$$

$$+ (\nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3))\Big\{\nu_1\nu_3\big[\varepsilon^2(\nu_3)(A_1 - A_3) + \varepsilon(\nu_3)(B_3 - B_1) + C_3 - C_1\big] +$$
$$+ A_2(\nu_2\varepsilon'(\nu_3) + \beta_2 g'(\nu_3))\sqrt{F(\nu_3)} +$$
$$+ \nu_1[\beta_3\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(A_1 - A_3 - A_2) - \beta_3 B_1 g(\nu_3) - s_3] +$$
$$+ \nu_3[\beta_1\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(A_1 + A_2 - A_3) + \beta_1\beta_3 g(\nu_3) + s_1] + \beta_1\beta_3 g^2(\nu_3)(A_1 - A_3)\Big\} = 0. \quad (31)$$

Рівняння (24) подано у вигляді

$$[\lambda(\nu_3) + A_3(\nu_3\varepsilon(\nu_3) + \beta_3 g(\nu_3))]' g(\nu_3)\sqrt{F(\nu_3)} +$$
$$+ \nu_1\nu_2\big[\varepsilon^2(\nu_3)(A_2 - A_1) + \varepsilon(\nu_3)(B_1 - B_2) + C_1 - C_2\big] -$$
$$- \nu_1\{\beta_2 g(\nu_3)[\varepsilon(\nu_3)(A_1 - A_2) + B_1] - s_2\} -$$
$$- \nu_2\{\beta_1 g(\nu_3)[\varepsilon(\nu_3)(A_1 - A_2) + B_2] + s_1\} + \beta_1\beta_2 g^2(\nu_3)(A_2 - A_1) = 0. \quad (32)$$

Систему (31), (32) буде використано при подальшому розгляді випадку лінійних інваріантних співвідношень щодо основних змінних задачі.

Розглянемо випадок, коли виконуються умови (16), (18), (20). Для наглядності запишемо їх у розгорнутому вигляді:

$$\omega_1 = \varepsilon_0\nu_1 + \beta_1 g_0, \quad \omega_2 = \varepsilon_0\nu_2 + \beta_2 g_0, \quad \omega_3 = \varepsilon_0\nu_3 + \beta_3 g_0,$$
$$\nu_1(\psi) = h_0 + h_1\cos\psi + h_2\sin\psi, \quad \nu_2(\psi) = r_0 + r_1\cos\psi + r_2\sin\psi, \quad \nu_3(\psi) = a_0 + a_2\sin\psi, \quad (33)$$

де $\psi = \beta_0 g_0 t$. Підставимо значення (33) у рівняння (31) і будемо вимагати, щоб рівняння, яке ми одержали, було тотожним по змінній ψ. Для цього подамо результат у вигляді

$$G_0[(h_1 r_2 + h_2 r_1)\cos 3\psi - (h_2 r_2 - h_1 r_1)\sin 3\psi] + \ldots = 0, \quad (34)$$

де три крапки позначають члени, які містять тригонометричні функції аргументів $2\psi,\ \psi$ і вільний член, а параметр G_0 має значення

$$B_2\lfloor\varepsilon_0^2(A_2 - A_1) + \varepsilon_0(B_1 - B_2) + C_1 - C_2\rfloor = 0. \quad (35)$$

Оскільки за припущенням $\beta_i \neq 0,\ i = \overline{1,3}$, то з (19), (21) випливає, що параметри h_1, $h_2,\ r_1,\ r_2,\ a_2$ відмінні від нуля.

Таким чином, із рівнянь (34), (35) встановимо першу умову на параметр ε_0:

$$\varepsilon_0^2(A_2 - A_1) + \varepsilon_0(B_1 - B_2) + C_1 - C_2 = 0. \quad (36)$$

Рівність (36) дозволяє достатньо просто одержати остаточні умови існування розв'язку, використовуючи рівняння (32), яке запишемо в такому вигляді (використовуючи формули (18), (19)):

$$\dot\lambda_3(t) = (h_1 H_1 + r_1 H_2)\cos\beta_0 g_0 t + (h_2 H_1 + r_2 H_2)\sin\beta_0 g_0 t + (h_0 H_1 + r_0 H_2 + H_0), \quad (37)$$

де

$$H_1 = \varepsilon_0 g_0 \beta_2 (A_1 - A_2 - A_3) - B_1 g_0 \beta_2 - s_2, \quad H_2 = \varepsilon_0 g_0 \beta_1 (A_1 - A_2 + A_3) + B_2 g_0 \beta_1 + s_1,$$

$$H_0 = g_0^2 \beta_1 \beta_2 (A_1 - A_2). \tag{38}$$

Із рівняння (37) одержимо

$$\lambda_3(\psi) = L_1 \sin\psi + L_2 \cos\psi + \lambda_0, \tag{39}$$

де λ_0 — сталий параметр, а $L_1,\ L_2$ мають вигляд

$$L_1 = \frac{h_1 H_1 + r_1 H_2}{\beta_0 g_0},$$

$$L_2 = \frac{h_2 H_1 + r_2 H_2}{\beta_0 g_0}. \tag{40}$$

Із аналізу рівняння (37) слідує, що в ньому необхідно покласти, що вільний член рівний нулю, оскільки в протилежному випадку функція $\lambda_3(t)$ буде необмеженою, що суперечить умові обмеженості цієї функції, яка витікає з умов (22), (23) при $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0,\ g(\nu_3) = g_0$ і обмеженості функцій $\nu_i(\nu_3),\ i = \overline{1,3}$ (див. формули (18), (20)).

Таким чином, друга умова існування розв'язку (33), (34) має вигляд

$$h_0 H_1 + r_0 H_2 + H_0 = 0. \tag{41}$$

Розглянемо рівняння (22), (23) з урахуванням рівності (36). Підставимо в них $\lambda_3(\psi)$ із (33), залишаючи для наочності змінні $\nu_i(\nu_3),\ i = \overline{1,3}$. Введемо позначення

$$G_{23} = C_3 - C_1 + \varepsilon_0^2 (A_1 - A_3) + \varepsilon_0 (B_3 - B_1), \quad G_0 = \beta_2 \beta_3 g_0^2 (A_2 - A_3),$$

$$G_2 = \beta_3 g_0 [\varepsilon_0 (A_2 - A_1 - A_3) - B_2] - s_3, \quad G_3 = \beta_2 g_0 [\varepsilon_0 (A_1 + A_2 - A_3) + B_3] + s_2,$$

$$R_0 = \beta_1 \beta_3 g_0^2 (A_1 - A_3), \quad R_1 = \beta_3 g_0 [\varepsilon_0 (A_1 - A_2 - A_3) - B_1] - s_3,$$

$$R_3 = \beta_1 g_0 [\varepsilon_0 (A_1 + A_2 - A_3) + B_3] + s_1. \tag{42}$$

Підставимо вирази (39) у рівняння (22), (23):

$$-(L_1 \sin\psi + L_2 \cos\psi + \lambda_0)(\varepsilon_0 \nu_2 + \beta_2 g_0) + G_{23} \nu_2 \nu_3 + G_2 \nu_2 + G_3 \nu_3 + G_0 = 0, \tag{43}$$

$$-(L_1 \sin\psi + L_2 \cos\psi + \lambda_0)(\varepsilon_0 \nu_1 + \beta_1 g_0) + G_{23} \nu_1 \nu_3 + R_1 \nu_1 + R_3 \nu_3 + R_0 = 0. \tag{44}$$

Внесемо $\nu_1(\psi),\ \nu_2(\psi),\ \nu_3(\psi)$ із системи (33) у рівняння (43), (44) і будемо вимагати, щоб одержане рівняння було тотожним по змінній ψ.

Розглянемо рівності нулю коефіцієнтів при функціях $\sin 2\psi$:

$$L_2 \beta_3 = 0, \quad a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1 = 0. \tag{45}$$

Оскільки $\beta_3 \neq 0$, то з рівності (45) маємо $L_1 = 0$, що на основі (40), (38), (19) набуває вигляду

$$\beta_1 \beta_2 g_0 [2\varepsilon_0 (A_1 - A_2) + B_2 - B_1] + s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 = 0. \tag{46}$$

Розглянемо другу рівність (45). Спочатку знайдемо значення L_1:

$$L_1 = \frac{\gamma_0}{\beta_0 g_0 x_0^2}\Big\{\varepsilon_0 g_0\big[\beta_2^2(A_1 - A_2 - A_3) - \beta_1^2(A_1 - A_2 + A_3)\big] - \\ - g_0\big(B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\big) - s_1\beta_1 - s_2\beta_2\Big\}. \tag{47}$$

Використовуючи значення G_{23} із системи (42) і L_1 із (47), одержуємо

$$x_0^2 g_0(C_3 - C_1) + \varepsilon_0 g_0\big\{\varepsilon_0\big\lfloor\beta_1^2(2A_1 - A_2) + \beta_2^2 A_2\big\rfloor + B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\big\} + \varepsilon_0(s_1\beta_1 + s_2\beta_2) = 0. \tag{48}$$

З умови (41), використовуючи рівність (46), маємо

$$A_2 = A_1. \tag{49}$$

На основі (49) із (46) отримуємо

$$\beta_1\beta_2 g_0(B_2 - B_1) + s_1\beta_2 - s_2\beta_1 = 0. \tag{50}$$

Оскільки $L_2 = 0$, то функція (39) спрощується:

$$\lambda_3(\psi) = L_1 \sin\psi + \lambda_0. \tag{51}$$

Більш простий вигляд має і параметр L_1 із (47):

$$L_1 = -\frac{\gamma_0}{\beta_0 g_0 x_0^2}\big[\varepsilon_0 g_0 x_0^2 A_3 + g_0\big(B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\big) + s_1\beta_1 + s_2\beta_2\big], \tag{52}$$

а також рівняння (48):

$$x_0^2 g_0\big(C_3 - C_1 + \varepsilon_0^2 A_1\big) + \varepsilon_0 g_0\big(B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\big) + \varepsilon_0(s_1\beta_1 + s_2\beta_2) = 0. \tag{53}$$

Розпишемо рівняння (43), (44) з розв'язком (18), (20), враховуючи функцію (51) і умову $G_{23} = \dfrac{\varepsilon_0 L_1}{a_2}$. Одержимо

$$\lambda_0[(\beta_2 g_0 + \varepsilon_0 r_0) + \varepsilon_0(r_1\cos\psi + r_2\sin\psi)] + \beta_2 g_0 L_1 \sin\psi - \\ - \left(G_2 + \frac{a_0\varepsilon_0 L_1}{a_2}\right)(r_0 + r_1\cos\psi + r_2\sin\psi) - G_3(a_0 + a_2\sin\psi) - G_0 = 0, \tag{54}$$

$$\lambda_0[(\beta_1 g_0 + \varepsilon_0 h_0) + \varepsilon_0(h_1\cos\psi + h_2\sin\psi)] + \beta_1 g_0 L_1 \sin\psi - \\ - \left(R_1 + \frac{a_0\varepsilon_0 L_1}{a_2}\right)(h_0 + h_1\cos\psi + h_2\sin\psi) - R_3(a_0 + a_2\sin\psi) - R_0 = 0. \tag{55}$$

Будемо вважати, що рівняння (54), (55) є тотожностями по змінній ψ. Спочатку розглянемо умови рівності нулю коефіцієнтів при $\cos\psi$:

$$\lambda_0\varepsilon_0 - \left(G_2 + \frac{a_0\varepsilon_0 L_1}{a_2}\right) = 0, \qquad \lambda_0\varepsilon_0 - \left(R_1 + \frac{a_0\varepsilon_0 L_1}{a_2}\right) = 0. \tag{56}$$

Віднявши ліві частини цих рівнянь, побачимо, що $G_2 = R_1$, або на основі (42) й умови (49) одержимо

$$B_2 = B_1. \tag{57}$$

Тоді на основі (36), (49), (50), (57) отримаємо

$$C_2 = C_1,$$
$$s_1\beta_2 - s_2\beta_1 = 0. \tag{58}$$

Таким чином, $A = \mathrm{diag}(A_1, A_1, A_3),\ B = \mathrm{diag}(B_1, B_1, B_3),\ C = \mathrm{diag}(C_1, C_1, C_3)$.

Розглянемо рівність (58). Із неї слідує, що

$$s_1 = d_0\beta_1, \quad s_2 = d_0\beta_2, \tag{59}$$

де d_0 — параметр, який має стале значення. Якщо взяти до уваги рівність (59), то вектори, які є проєкціями векторів $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ і $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ $(\boldsymbol{s} = (d_0\beta_1, d_0\beta_2, d_0\beta_3))$ на площину Oxy, колінеарні.

Таким чином, вектори $\boldsymbol{\beta}$ і $\boldsymbol{s}$ належать одній площині.

Перепишемо співвідношення (52), (53), вираз R_1 із системи (42) з урахуванням (49), (57), (59):

$$L_1 = -\frac{\gamma_0}{\beta_0 g_0}[g_0(A_3\varepsilon_0 + B_1) + d_0], \tag{60}$$

$$g_0\big(\varepsilon_0^2 A_1 + B_1\varepsilon_0 - C_1 + C_3\big) + \varepsilon_0 d_0 = 0, \qquad R_1 = -\beta_3 g_0(\varepsilon_0 A_3 + B_1) - s_3. \tag{61}$$

Із другого рівняння системи (56) знайдемо

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0 g_0\gamma_0\beta_0^2}\Big\{g_0\gamma_0\beta_0^2[s_3 + \beta_3 g_0(A_3\varepsilon_0 + B_1)] + C_0\varepsilon_0\beta_3[g_0(A_3\varepsilon_0 + B_1) + d_0]\Big\}. \tag{62}$$

При виконанні рівнянь (56) рівняння (54), (55) спрощуються:

$$\lambda_0\beta_2 g_0 + \beta_2 g_0 L_1\sin\psi - G_3(a_0 + a_2\sin\psi) - G_0 = 0,$$
$$\lambda_0\beta_1 g_0 + \beta_1 g_0 L_1\sin\psi - R_3(a_0 + a_2\sin\psi) - R_0 = 0.$$

Із рівнянь (65) слідує

$$\beta_2 g_0 L_1 - a_2 G_3 = 0, \qquad \beta_2 g_0 L_1 - a_2 R_3 = 0, \tag{63}$$

$$\lambda_0\beta_2 g_0 - a_0 G_3 - G_0 = 0, \qquad \lambda_0\beta_1 g_0 - a_0 R_3 - R_0 = 0, \tag{64}$$

де на основі одержаних раніше умов і рівностей із (42) для $G_0,\ R_0,\ G_3,\ R_3$ маємо значення

$$\begin{aligned} G_0 &= \beta_2\beta_3 g_0^2(A_1 - A_3), &\qquad R_0 &= \beta_1\beta_3 g_0^2(A_1 - A_3),\\ G_3 &= \beta_2 g_0[B_3 + \varepsilon_0(2A_1 - A_3)] + s_2, &\qquad R_3 &= \beta_1 g_0[B_3 - \varepsilon_0(2A_1 - A_3)] + s_1. \end{aligned} \tag{65}$$

Враховуючи позначення (65), із рівностей (63) знайдемо умову (58) і рівність

$$d_0 = -\frac{g_0}{2}(2\varepsilon_0 A_1 + B_1 + B_3). \tag{66}$$

Із рівнянь (64) знову одержуємо умову (58) і значення параметра

$$\lambda_0 = \frac{1}{g_0 x_0^2}[a_0(\beta_2 G_3 + \beta_1 R_3) + \beta_2 G_0 + \beta_1 R_0]. \quad (67)$$

Беручи до уваги значення (65), із рівняння (67) знаходимо

$$\lambda_0 = \frac{\beta_3}{\gamma_0 g_0 \beta_0^2}\Big\{C_0[g_0(\varepsilon_0(2A_1 - A_3) + B_3) + d_0] + \gamma_0 g_0^2 \beta_0^2 (A_1 - A_3)\Big\}. \quad (68)$$

Виключимо з формул (62), (68) параметр λ_0:

$$s_3 = -g_0 \beta_3 (A_1 \varepsilon_0 + B_1). \quad (69)$$

При умові (66), (69) значення λ_0 спрощується:

$$\lambda_0 = -\frac{C_0 \beta_3}{2\gamma_0 \beta_0^2}\,[2\varepsilon_0(A_3 - A_1) + B_1 - B_3]. \quad (70)$$

Таким чином, встановлено всі умови існування розв'язку (16), (18) – (21) рівнянь (1) – (4). Обговоримо їхні властивості стосовно результатів [17]. Перша властивість полягає в тому, що завдяки (49) еліпсоїдом інерції є еліпсоїд обертання $A_1(x^2 + y^2) + A_3 z^2 = \sigma_1^2$. Оскільки $B_2 = B_1$, $C_2 = C_1$, то еліпсоїди $B_1\big(x^2 + y^2\big) + A_3 z^2 = \sigma_2^2$, $C_1\big(x^2 + y^2\big) + C_3 z^2 = \sigma_3^2$ також є еліпсоїдами обертання ($\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ — сталі параметри). На основі умови (12) на параметр s_3 в побудованому тут розв'язку $s_3 \neq 0$, а в розв'язку з [17] цей параметр дорівнює нулю. Умова (58) характерна для обох розв'язків. Проте в розв'язку з [17] вектор $\boldsymbol{\beta}$ лежить у площині рівних моментів інерції, а в даному розв'язку вектори $\boldsymbol{\beta}$ і $\boldsymbol{s}$ знаходяться в одній площині, але не лежать в екваторіальній площині еліпсоїда інерції. В побудованому розв'язку параметр ε_0 можна виразити через параметри $B_1,\ B_3$ і $C_1,\ C_3$. Дійсно, якщо підставити d_0 із (66) у рівність (61), то одержимо значення параметра ε_0:

$$\varepsilon_0 = \frac{2(C_3 - C_1)}{B_3 - B_1}.$$

Рівність (66) можна розглядати для визначення параметра d_0, параметр λ_0 знаходимо із формули (70). Формулу (69) можна інтерпретувати як рівність для знаходження параметра C_0, який містить інваріантне співвідношення з (11). Функцію (51) на основі (60), (66) подамо у вигляді

$$\lambda_3(\psi) = -\frac{g_0}{2\beta_0}\,[B_1 - B_3 + 2\varepsilon_0(A_3 - A_1)]\sin\psi + \lambda_0. \quad (71)$$

Неважко впевнитися в тому, що якщо функцію $\lambda_3(\psi)$ визначати із інтеграла моментів системи (5), то при певному виборі сталої k вона співпадає з функцією (71). Відмітимо, що параметр g_0 можна вважати довільним. Підставимо функцію (71) у рівняння (6), (7):

$$L(t) = \frac{g_0^2}{a}[B_3 - B_1 - 2\varepsilon_0(A_3 - A_1)]\cos(g_0\beta_0 t), \quad (72)$$

$$\frac{g_0}{2\beta_0}[B_1 - B_3 - 2\varepsilon_0(A_3 - A_1)]\sin(g_0\beta_0 t) = D_3(\omega_3(t) + \dot{x}(t)), \quad (73)$$

де

$$\omega_3(t) = \varepsilon_0 a_2 \sin(g_0 \beta_0 t) + \beta_3 g_0.$$

Таким чином, рівняння (72) використовується для визначення $L(t)$, а рівняння (73) — для знаходження швидкості $\dot{x}(t)$ ротора, який несе гіростат.

Висновок. У статті розглянуто умови існування трьох інваріантних співвідношень рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил із урахуванням змінності гіростатичного моменту. Ці інваріантні співвідношення характеризують прецесії загального вигляду гіростата щодо вертикалі. Проведено редукцію вихідних рівнянь до системи трьох диференціальних рівнянь щодо функцій $\varepsilon(\nu_3)$, $g(\nu_3)$, $\lambda_3(\nu_3)$. У випадку $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$, $g(\nu_3) = g_0$, де ε_0 і g_0 — сталі параметри, побудовано новий розв'язок рівнянь класу Кірхгофа – Пуассона, який характеризується елементарними функціями часу. Цей розв'язок визначається умовами щодо параметрів задачі, які відрізняються від відповідних умов розв'язку, наведеного в роботі [17], і є узагальненням розв'язку з [17].

Література

1. W. Thomson, *On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **7**, 668 – 674 (1872).
2. V. Volterra, *Sur la theorie des variations des latitudes*, Acta. Math., **22**, No. 1, 201 – 358 (1899).
3. Н. Е. Жуковский, *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*, Собр. соч., Т. I, Гостехиздат, Москва, 31 – 152 (1949).
4. A. A. Gray, *A treatise on gyrostatics and rotational motion. Theory and applications*, Dover Publications, Inc., New York (1959).
5. Т. Леви-Чивита, У. Амальди, *Курс теоретической механики*, Т. 2, ч. 2, Изд-во иностр. лит., Москва (1951).
6. В. В. Румянцев, *Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика, № 2, 83 – 96 (1970).
7. П. В. Харламов, *Об уравнениях движения системы твердых тел*, Механика твердого тела, вып. 4, 52 – 73 (1972).
8. Й. Виттенбург, *Динамика систем твердых тел*, Мир, Москва (1980).
9. T. R. Kane, R. C. Fowler, *Equivalence of two gyrostatic stability problems*, J. Appl. Mech., **38**, № 4, 1146 – 1147 (1970).
10. R. E. Roberson, *The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats*, J. Appl. Mech., **38**, № 3, 707 – 708 (1971).
11. В. С. Асланов, А. В. Дорошин, *Движение системы соосных тел переменной массы*, Прикл. математика и механика, **68**, вып. 6, 999 – 1009 (2004).
12. О. К. Щетініна, *Про два класи прецесійних рухів гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил*, Нелін. коливання, **14**, № 2, 281 – 288 (2011); ***English translation:*** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **14**, № 2, 295 – 303 (2011).
13. E. K. Shchetinina, *The motion of a symmetric gyrostat with two rotors*, J. Appl. Math. Mech., **80**, № 2, 121 – 126 (2016).
14. G. V. Gorr, *A complex approach to the interpretation of the motion of a solid with a fixed point*, Mech. Solids, **56**, № 6, 932 – 946 (2021).
15. П. В. Харламов, *Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений*, Механика тверд. тела, вып. 6, 15 – 24 (1974).
16. Г. В. Горр, *Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела*, Ин-т компьют. исслед., Москва, Ижевск (2017).
17. G. V. Gorr, T. V. Belokon, *On solutions of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment*, Mech. Solids, **56**, № 7, 1157 – 1166 (2021).
18. G. V. Gorr, *On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force*, Mech. Solids, **54**, № 2, 104 – 114 (2019).

19. G. V. Gorr, D. N. Tkachenko, E. K. Shchetinina, *Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations*, Russ. J. Nonlinear Dyn., **15**, № 3, 327 – 342 (2019).
20. G. V. Gorr, Y. K. Uzbek, *The integration of Poisson's equations in the case of three linear invariant relations*, J. Appl. Math. Mech., **66**, № 3, 409 – 417 (2002).
21. H. M. Yehia, *On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of rigid body in an ideal incompressible fluid*, J. Méc. Théor. Appl., **5**, № 5, 755 – 762 (1986).
22. Г. В. Горр, А. В. Мазнев, *Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку*, ДонНУ, Донецк (2010).
23. Г. В. Горр, *Движения гиростата*, Наук. думка, Киев (2013).
24. G. R. Kirchhoff, *Uber die Bewegung eines Rotation Korpers in einer Flussigkeit*, J. Reine Angew. Math., **71**, 237 – 262 (1870).
25. В. А. Стеклов, *О движении твердого тела в жидкости*, тип. А. Дарре, Харьков (1893).
26. П. В. Харламов, *О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью*, Журн. прикл. механики и техн. физики, № 4, 17 – 29 (1963).
27. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск (2001).
28. G. Grioli, *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico*, Ann. Mat. Pura Appl., **26**, № 4, 271 – 281 (1947).

Одержано 28.07.22,
після доопрацювання — 05.08.22