УДК 517.951.2

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ З МОЛОДШИМИ ЧЛЕНАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ГРІНА

Ю. П. Апаков

Ін-т математики ім. В. І. Романовського АН Республіки Узбекистан
вул. Мірзо Улугбека, 81, Ташкент, 100170, Республіка Узбекистан

Наманган. інж.-буд. ін-т
вул. Ісламa Каримова, 12, Наманган, 160100, Республіка Узбекистан
e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

Р. А. Умаров

Наманган. інж.-буд. ін-т
вул. Ісламa Каримова, 12, Наманган, 160100, Республіка Узбекистан
e-mail: r.umarov1975@mail.ru

We consider the first boundary-value problem in a rectangular domain for an inhomogeneous third-order equation with lower terms. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. The solution is presented in terms of the constructed Green's function.

Розглянуто першу крайову задачу в прямокутній області для неоднорідного рівняння третього порядку з молодшими членами. Єдиність розв'язку поставленої задачі доведено методом інтегралів енергії. Розв'язок виписано через побудовану функцію Гріна.

1. Вступ. Диференціальні рівняння з частинними похідними третього порядку розглядають при розв'язанні задач із теорії нелінійної акустики, в гідродинамічній теорії космічної плазми та фільтрації рідини в пористих середовищах. Серед усіх рівнянь третього порядку особливе місце за специфічним характером займають рівняння з кратними характеристиками. У роботі [1], враховуючи властивості в'язкості та теплопровідності газу, з системи Нав'є – Стокса було отримано рівняння третього порядку з кратними характеристиками, що містить другу похідну за часом:

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y}\,u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const}.$$

Це рівняння при $\nu = 1$ описує осесиметричний потік, а при $\nu = 0$ — плоскопаралельний потік [2].

Перші результати щодо рівняння третього порядку з кратними характеристиками отримано в [3, 4]. У роботі [5] для рівняння $D_x^{2n+1}u - D_y^2 u = 0$ побудовано фундаментальний розв'язок у вигляді подвійного невласного інтеграла та вивчено властивості потенціалу, розв'язано крайові задачі.

У роботах [6, 7] побудовано фундаментальні розв'язки рівняння третього порядку з кратними характеристиками, що містять другі похідні за часом, які виражені через вироджені гіпергеометричні функції, а також вивчено їхні властивості та знайдено оцінки при $|t| \to \infty$.

У роботах [8 – 12] розглянуто крайові задачі рівнянь третього порядку з кратними характеристиками за допомогою побудови функції Гріна. Також зазначимо роботи [13 – 19], в яких розглянуто крайові задачі рівнянь третього порядку.

2. Постановка задачі. В області $D = \{(x,y)\colon 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ розглянемо рівняння третього порядку, що має вигляд

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_2 U_x + A_3 U_y + A_4 U = g_1(x,y), \tag{1}$$

де $A_i = \mathrm{const} \in R,\ p,q \in R,\ i = \overline{1,4},\ g_1(x,y)$ — задана досить гладка функція.

Заміною $U(x,y) = \exp\left(-\dfrac{A_1}{3}\,x + \dfrac{A_3}{2}\,y\right)u(x,y)$ рівняння (1) можна звести до вигляду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u = g(x,y), \tag{2}$$

де

$$a_1 = -\frac{A_1^2}{3} + A_2, \quad a_2 = \frac{2A_1^3}{27} + \frac{A_3^2}{4} - \frac{A_1 A_2}{3} + A_4,$$
$$g(x,y) = \exp\left(\frac{A_1}{3}\,x - \frac{A_3}{2}\,y\right)g_1(x,y).$$

Задача A_1. Знайти функцію $u(x,y)$ з класу $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, що задовольняє рівняння (2) і такі крайові умови:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u(p,y) = \psi_2(y), \quad u_x(p,y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(0,y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le q, \tag{4}$$

де $\psi_i(y),\ i = \overline{1,3},\ g(x,y)$ — задані функції, причому

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad g(x,0) = g(x,q) = 0. \tag{5}$$

Зауважимо, що в роботах [8 – 11] розглянуто випадок $a_1 = a_2 = 0$.

3. Єдиність розв'язку.

Теорема 1. *Якщо задача A_1 має розв'язок, то при виконанні умов $a_1 \le 0,\ a_2 \ge 0$, він єдиний.*

Доведення. Припустимо протилежне: нехай задача A_1 має два розв'язки $u_1(x,y)$ і $u_2(x,y)$. Тоді функція $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ задовольняє рівняння (1) і однорідні крайові умови. Доведемо, що $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

В області D виконується тотожність

$$uL[u] = uu_{xxx} - uu_{yy} + a_1 u_x + a_2 u^2 = 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}\,u_x^2 + \frac{1}{2}\,a_1 u^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 + a_2 u^2 = 0.$$

Інтегруючи цю тотожність за областю D і враховуючи однорідні крайові умови, отримуємо

$$-\frac{1}{2}\,a_1 \int\limits_0^q u^2(0,y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^q u_x^2(0,y)dy + \int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2 dxdy + a_2 \int\limits_0^p\int\limits_0^q u^2 dxdy = 0.$$

Якщо $a_1, a_2 \neq 0$, то з четвертого доданка отримаємо $u(x,y) \equiv 0 \ (x,y) \in \overline{D}$. Якщо $a_1 = a_2 = 0$, то з третього доданка $u_y(x,y) = 0$. Звідси $u(x,y) = f(x)$. Підставляючи останнє співвідношення в рівняння (2), маємо $f'''(x) = 0$. Тоді $f(x) = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$. Враховуючи крайові умови (4), одержуємо $f(x) = 0$, звідки $u(x,y) \equiv 0$.

Теорему 1 доведено.

Зауваження. Відмітимо, що при порушенні умов теореми 1, тобто $a_1 > 0, \ a_2 < 0$, однорідна задача A_1 для однорідного рівняння (2) може мати нетривіальний розв'язок. Наприклад, рівняння

$$u_{xxx}(x,y) + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2p}\right)^2 u_x(x,y) - \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$$

з однорідними умовами (3) – (4) має нетривіальний розв'язок

$$u(x,y) = \left(1 + (-1)^{k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p}\,x\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right), \quad n,k \in Z.$$

4. Існування розв'язку.

Теорема 2. *Якщо виконуються такі умови:*

1) $\psi_i(y) \in C^3[0,q], \ i = \overline{1,3}$;

2) $\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} \in C[0,q], \ 0 \le x \le p$;

3) $0 \le C < \dfrac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}$,

то розв'язок задачі A_1 існує. Тут

$$C = \max\{|a_1|, |a_2|\}, \quad \lambda_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2},$$

$$K = \frac{16}{3}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}.$$

Доведення теореми 2. Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda^3 Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Відомо [20], що нетривіальний розв'язок задачі (6) існує тільки при

$$\lambda_n^3 = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Ці числа є власними значеннями задачі (6), а відповідні їм власні функції мають вигляд:

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Розкладемо $g(x,y)$ в ряд Фур'є по $\{Y_n(y)\}$:

$$g(x,y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \sin\left(\frac{\pi n}{q}\, y\right),$$

де $g_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{q}} \displaystyle\int_0^q g(x,\eta) \sin\left(\frac{\pi n}{q}\,\eta\right) d\eta$. Інтегруємо функцію $g_n(x)$ частинами і, враховуючи умови (5), маємо оцінку

$$|g_n(x)| \le M \frac{|\bar{g}_n(x)|}{n}, \tag{7}$$

де

$$M = \frac{q}{\pi}, \quad \bar{g}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{q}} \int\limits_0^q g_\eta(x,\eta) \cos\frac{\pi n}{q}\,\eta\, d\eta.$$

Надалі для всіх знайдених відомих додатних сталих введемо позначення однією буквою M.

Розв'язок задачі A_1 шукаємо у вигляді

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin\left(\frac{\pi n}{q}\, y\right). \tag{8}$$

Підставляючи (8) у рівняння (2), враховуючи граничні умови (4), отримуємо таку задачу:

$$\begin{cases} X'''_n + a_1 X'_n + a_2 X_n + \lambda_n^3 X_n = g_n(x), \\ X''_n(0) = \psi_{1n}, \quad X_n(p) = \psi_{2n}, \quad X'_n(p) = \psi_{3n}, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$\psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int\limits_0^q \psi_i(\eta) \sin\left(\frac{\pi n}{q}\,\eta\right) d\eta, \quad i = \overline{1,3}.$$

Враховуючи умову (5) та інтегруючи частинами тричі, знаходимо оцінку

$$|\psi_{in}| \le \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{10}$$

де

$$\Psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int\limits_0^q \psi_i'''(\eta) \cos\frac{\pi n}{q}\,\eta d\eta.$$

За допомогою заміни

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x) \tag{11}$$

змінимо межові умови в однорідні.

Функція $\rho(x)$ має вигляд

$$\rho_n(x) = \psi_{2n} - \psi_{3n} p + \frac{\psi_{1n}}{2}\, p^2 + (\psi_{3n} - \psi_{1n} p) x + \frac{\psi_{1n}}{2}\, x^2. \tag{12}$$

Підставляючи (12), (11) у (9), отримаємо задачу

$$\begin{cases} V''' + \lambda_n^3 V = \lambda_n^3 f_n(x) - a_1 V' - a_2 V, \\ V''(0) = V(p) = V'(p) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$f_n(x) = \left(\frac{a_1 p - a_1 x + a_2 p x}{\lambda_n^3} - \frac{a_2 p^2 + a_2 x^2}{2\lambda_n^3} - \frac{p^2 + x^2}{2} + px \right) \psi_{1n} -$$
$$- \left(\frac{a_2}{\lambda_n^3} + 1 \right) \psi_{2n} + \left(\frac{a_2 p - a_1 - a_2 x}{\lambda_n^3} + p - x \right) \psi_{3n} + \frac{g_n(x)}{\lambda_n^3}.$$

З $f_n(x)$, враховуючи, що $\lambda_n^3 = \left(\frac{\pi n}{q} \right)^2$, і оцінки (7), (10), маємо

$$|f_n(x)| \le M|\psi_{1n}| + M|\psi_{2n}| + M|\psi_{3n}| + M \frac{\bar{g}_n(x)}{n\lambda_n^3} \le$$
$$\le M \left(\frac{|\Psi_{1n}|}{n^3} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^3} + \frac{|\Psi_{3n}|}{n^3} + \frac{\bar{g}_n(x)}{n^3} \right) \le$$
$$\le \frac{M}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\bar{g}_n(x)|).$$

Аналогічно отримаємо такі оцінки:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\le \frac{M}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\bar{g}_n(x)|), \\ |f_n(0)| &\le \frac{M}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\bar{g}_n(0)|), \\ |f_n(p)| &\le \frac{M}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\bar{g}_n(p)|), \\ |f'{}_n(x)| &\le \frac{M}{n^3} \big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \big|\bar{g}'_n(x)\big| \big). \end{aligned} \tag{14}$$

Згідно з теоремою Гільберта розв'язок задачі (13) шукаємо таким чином:

$$V_n(x) = \lambda_n^3 \int\limits_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi)\, d\xi - a_1 \int\limits_0^p G_n(x,\xi) V'_n(\xi)\, d\xi - a_2 \int\limits_0^p G_n(x,\xi) V_n(\xi)\, d\xi, \tag{15}$$

де $G_n(x,\xi)$ — функція Гріна задачі (13), яка має властивості

$$\frac{\partial^3 G_n(x,\xi)}{\partial x^3} + \lambda_n^3 G_n(x,\xi) = 0,$$
$$G_{1nxx}(0,\xi) = G_{2n}(p,\xi) = G_{2nx}(p,\xi) = 0, \tag{16}$$
$$G_{2n}(\xi,\xi) - G_{1n}(\xi,\xi) = 0,$$
$$G_{2nx}(\xi,\xi) - G_{1nx}(\xi,\xi) = 0, \tag{17}$$

$$G_{2nxx}(\xi,\xi)-G_{1nxx}(\xi,\xi)=1.$$

Побудуємо функцію Гріна. Оскільки лінійно незалежні розв'язки рівняння $X_n''' + +\lambda_n^3 X_n = 0$ мають вигляд

$$X_1(x)=e^{-\lambda_n x},\quad X_2(x)=e^{\frac{\lambda_n}{2}x}\cos\beta_n x,\quad X_3(x)=e^{\frac{\lambda_n}{2}x}\sin\beta_n x,\quad \beta_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n,$$

подамо шукану функцію Гріна у вигляді

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} a_1e^{-\lambda_n x}+a_2e^{\frac{\lambda_n}{2}x}\cos\beta_n x+a_3e^{\frac{\lambda_n}{2}x}\sin\beta_n x, & 0\le x\le\xi,\\ b_1e^{-\lambda_n x}+b_2e^{\frac{\lambda_n}{2}x}\cos\beta_n x+b_3e^{\frac{\lambda_n}{2}x}\sin\beta_n x, & \xi\le x\le p,\end{cases} \tag{18}$$

де $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ — поки що невідомі функції від ξ. З властивості (17) функції Гріна, поклавши $c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi),\ k=1,2,3,$ отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження функцій $c_k(\xi)$:

$$\begin{cases} c_1e^{-\lambda_n\xi}+c_2e^{\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\beta_n\xi+c_3e^{\frac{\lambda_n}{2}\xi}\sin\beta_n\xi=0,\\ -c_1e^{-\lambda_n\xi}+c_2e^{\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\Big(\beta_n\xi+\dfrac{\pi}{3}\Big)+c_3e^{\frac{\lambda_n}{2}\xi}\sin\Big(\beta_n\xi+\dfrac{\pi}{3}\Big)=0,\\ c_1e^{-\lambda_n\xi}+c_2e^{\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\Big(\beta_n\xi+\dfrac{2\pi}{3}\Big)+c_3e^{\frac{\lambda_n}{2}\xi}\sin\Big(\beta_n\xi+\dfrac{2\pi}{3}\Big)=\dfrac{1}{\lambda_n^2}.\end{cases}$$

Визначник цієї системи дорівнює значенню визначника Вронського $W\big(X_1,X_2,X_3\big)$ у точці $x=\xi$, а тому відмінний від нуля і дорівнює $W\big(X_1,X_2,X_3\big)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Вирахувавши $\Delta c_i,\ i=1,2,3,$ знаходимо

$$c_1(\xi)=\frac{e^{\lambda_n\xi}}{3\lambda_n^2},\quad c_2(\xi)=-\frac{2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\xi}\sin\Big(\beta_n\xi+\dfrac{\pi}{6}\Big)}{3\lambda_n^2},\quad c_3(\xi)=\frac{2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\Big(\beta_n\xi+\dfrac{\pi}{6}\Big)}{3\lambda_n^2}.$$

Далі скористаємося властивістю (16) функції Гріна; в нашому випадку ці співвідношення набувають вигляду

$$\begin{cases} 2b_1-b_2+\sqrt{3}b_3=\dfrac{2}{3{\lambda_n}^2}\left(e^{\lambda_n\xi}+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi\right)\right),\\ b_1e^{-\lambda_n p}+b_2e^{\frac{\lambda_n}{2}p}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+b_3e^{\frac{\lambda_n}{2}p}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p=0,\\ -b_1e^{-\lambda_n p}+b_2e^{\frac{\lambda_n}{2}p}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\dfrac{\pi}{3}\right)+b_3e^{\frac{\lambda_n}{2}p}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\dfrac{\pi}{3}\right)=0.\end{cases}$$

Відповідно до лінійної незалежності $X_1''(0),\ X_2'(p),\ X_3'(p)$ визначник цієї системи відмінний від нуля і дорівнює

$$\Delta=\sqrt{3}e^{\lambda_n p}\left(1+2e^{\frac{-3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)\right)\neq 0.$$

Вирахувавши $\Delta b_i,\ i=1,2,3,$ знаходимо

$$b_1=\frac{e^{\lambda_n p}}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(e^{\lambda_n\xi}+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\,\xi\right)\right),$$

$$b_2=-\frac{2e^{-\frac{\lambda_n}{2}p}}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(e^{\lambda_n\xi}+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\,\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\,\xi\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$b_3=\frac{e^{-\frac{\lambda_n}{2}p}}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(e^{\lambda_n\xi}+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\,\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\,\xi\right)\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\,p+\frac{\pi}{6}\right).$$

Враховуючи $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi),\ k=1,2,3,$ знаходимо $a_k,\ k=1,2,3$:

$$a_1=\frac{2}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(e^{\lambda_n\left(p-\frac{\xi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi\right)-e^{\lambda_n\left(\xi-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)\right),$$

$$a_2=\frac{2}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\begin{pmatrix} e^{-\lambda_n\left(\frac{\xi}{2}-p\right)}\left(1+2e^{\frac{-3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n p\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\,\xi+\frac{\pi}{6}\right)- \\ -e^{-\lambda_n\left(\frac{p}{2}-\xi\right)}\left(1+2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\xi\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix},$$

$$a_3=\frac{2}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\begin{pmatrix} e^{-\lambda_n\left(\frac{p}{2}-\xi\right)}\left(1+2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\xi\right)\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n p+\frac{\pi}{6}\right)- \\ -e^{-\lambda_n\left(\frac{\xi}{2}-p\right)}\left(1+2e^{\frac{-3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n p\right)\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix}.$$

Поставляючи знайдені значення в (18), отримаємо функцію

$$G_n(x,\xi)$$

у вигляді

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} G_{1n}(x,\xi), & 0\le x<\xi, \\ G_{2n}(x,\xi), & \xi<x\le p. \end{cases} \tag{19}$$

Тут

$$G_{1n}(x,\xi)=\frac{1}{\Delta}\left(e^{-\lambda_n x}\left(2e^{\lambda_n\left(p-\frac{\xi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\xi\right)-2e^{\lambda_n\left(\xi-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n p\right)\right)-\right.$$
$$-2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(p-x)}\left(e^{\lambda_n\xi}+2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\xi\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$\left.+2e^{\lambda_n\left(\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2}\right)}\left(e^{\lambda_n p}+2e^{\frac{-\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n p\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

$$G_{2n}(x,\xi) = \frac{1}{\overline{\Delta}}\left(e^{\lambda_n \xi} + 2e^{-\frac{\lambda_n}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n\xi\right)\right)\times$$
$$\times\left(e^{\lambda_n(p-x)} - 2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(p-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right)\right),$$
$$\overline{\Delta} = 3{\lambda_n}^2 e^{\lambda_n p}\left(1 + 2e^{\frac{-3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)\right).$$

Легко можна переконатися, що функція, визначена формулою (19), має всі властивості, сформульовані при визначенні функції Гріна.

Оцінка $G_n(x\xi)$ має вигляд

$$|G_n(x,\xi)| \le \frac{K}{\lambda_n^2}, \quad \left|\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi}\right| \le \frac{K}{\lambda_n}.$$

Інтегруючи частинами другий інтеграл в (15), маємо

$$V_n(x) = \lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi)d\xi + \int_0^p \left(a_1\,\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} - a_2 G_n(x,\xi)\right)V_n(\xi)d\xi. \tag{20}$$

Для зручності введемо позначення

$$V_{0n}(x) = \lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi)\,d\xi,$$
$$\bar{G}_n(x,\xi) = a_1\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} - a_2 G_n(x,\xi). \tag{21}$$

Тоді (21) набуває вигляду

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p \bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi. \tag{22}$$

Використовуючи рівність (22), маємо оцінку для $\bar{G}_n(x\xi)$ у вигляді

$$\left|\bar{G}_n\right| \le |a_1|\left|\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi}\right| + |a_2|\,|G_n| \le \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2}\right)KC.$$

Рівняння (23) є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду. Запишемо розв'язок (23) за допомогою резольвенти у вигляді

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi,$$

де

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi); \tag{23}$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi) = \int\limits_0^p \bar{G}_n(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds, \quad m = 1,2,\ldots, \quad \bar{G}_{0n}(x,\xi) = \bar{G}_n(x,s).$$

Наступні співвідношення виконуються для функцій $G_n(x,\xi),\ \bar{G}_n(x,\xi)$:

$$\begin{aligned} &G_{nxx}(x,x-0) - G_{nxx}(x,x+0) = 1,\\ &G_{n\xi\xi}(x,x-0) - G_{n\xi\xi}(x,x+0) = 1,\\ &G_{nx\xi}(x,x-0) - G_{nx\xi}(x,x+0) = -1, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\bar{G}_n(x,x-0) - \bar{G}_n(x,x+0) = 0,\\ &\bar{G}_{nx}(x,x-0) - \bar{G}_{nx}(x,x+0) = -a_1,\\ &\bar{G}_{nxx}(x,x-0) - \bar{G}_{nxx}(x,x+0) = -a_2,\\ &\bar{G}_{nxxx}(x,x-0) - \bar{G}_{nxxx}(x,x+0) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Оцінимо розв'язок (24). З рівності

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_{0n}(x,\xi) + \bar{G}_{1n}(x,\xi) + \bar{G}_{2n}(x,\xi) + \ldots + \bar{G}_{mn}(x,\xi) + \ldots$$

знайдемо оцінку

$$|R_n(x,\xi)| \leq \left|\bar{G}_{0n}(x,\xi)\right| + \left|\bar{G}_{1n}(x,\xi)\right| + \left|\bar{G}_{2n}(x,\xi)\right| + \ldots + \left|\bar{G}_{mn}(x,\xi)\right| + \ldots.$$

Для правої частини цієї нерівності складемо мажоруючий ряд. Ввівши позначення

$$J = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2}\right)KC,$$

одержимо

$$\left|\bar{G}_{1n}(x,\xi)\right| \leq \left|\bar{G}_n(x,\xi)\right| \leq KC\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2}\right) \leq J,$$

$$\left|\bar{G}_{2n}(x,\xi)\right| \leq \int\limits_0^p \left|\bar{G}_{1n}(x,s)\right|\left|\bar{G}_{1n}(s,\xi)\right|ds \leq J^2 p,$$

$$\left|\bar{G}_{3n}(x,\xi)\right| \leq \int\limits_0^p \left|\bar{G}_{1n}(x,s)\right|\left|\bar{G}_{2n}(s,\xi)\right|ds \leq J^3 p^2,$$

. . . .

$$\left|\bar{G}_{mn}(x,\xi)\right| \leq \int\limits_0^p \left|\bar{G}_{1n}(x,s)\right|\left|\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)\right|ds \leq J^m p^{m-1}, \quad i = 2,3,\ldots,$$

. . . .

Тоді мажоруючий ряд має вигляд

$$\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{\infty}(Jp)^m.$$

Якщо виконується нерівність $Jp < 1$, то цей ряд є нескінченно спадною геометричною прогресією. Тоді повинно виконуватися співвідношення

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2}\right) KC < \frac{1}{p}.$$

Звідси маємо

$$\frac{\lambda_1^2}{p(\lambda_1 + 1)} > KC.$$

Існує низка значень чисел p, q, які задовольняють цю нерівність. Наприклад, якщо $p = 1$, $q = 1$, то маємо $KC < 2{,}38$.

У цьому випадку резольвента рівномірно збігається і її оцінка має вигляд

$$|R(x,\xi)| \le \frac{J}{1 - Jp} \le M. \tag{26}$$

Підставляючи $G_n(x\xi) = -\dfrac{1}{\lambda_n^3} G_{n\xi\xi\xi}(x\xi)$ у $V_{0n}(x)$ та інтегруючи, маємо

$$V_{0n}(x) = -f_n(x) + f_n(0) G_{2n\xi\xi}(x,0) - f_n(p) G_{1n\xi\xi}(x,p) + \int\limits_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi) f_n'(\xi) d\xi.$$

Враховуючи оцінку (14) і

$$|G_{2n\xi\xi}(x,0)| \le K, \quad |G_{1n\xi\xi}(x,p)| \le K, \quad |G_{1n\xi\xi}(x,\xi)| \le K,$$

одержуємо

$$|V_{0n}(x)| \le \frac{M}{n^3}\big(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\bar{g}_n(x)| + |\bar{g}_n(0)| + |\bar{g}_n(p)| + \big|\bar{g}_n'(x)\big|\big). \tag{27}$$

З (26) і (27) отримуємо оцінку

$$|V_n(x)| \le |V_{0n}(x)| + \int\limits_0^p |R(x,\xi)||V_{0n}(\xi)| d\xi \le$$
$$\le \frac{2\max\big(M, M^2\big)}{n^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + |\bar{g}_n(x)| + |\bar{g}_n(0)| + |\bar{g}_n(p)| + \big|\bar{g}_n'(x)\big| \right).$$

Згідно з (8) і (11) розв'язок задачі A_1 має вигляд

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) + \rho_n(x)) \sin\left(\frac{\pi n}{q}\, y\right).$$

Перевіримо цей розв'язок на збіжність. Враховуючи оцінку

$$|\rho_n(x)| \le \frac{M}{n^3}(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|),$$

маємо

$$|u(x,y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}(|V_n(x)| + |\rho_n(x)|) \leq$$
$$\leq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{3}|\Psi_{in}| + |\bar{g}_n(x)| + |\bar{g}_n(0)| + |\bar{g}_n(p)| + \left|\bar{g}'_n(x)\right|\right).$$

Покажемо збіжність $u_{xxx}(x,y)$. Після деяких обчислень, враховуючи (24), (25), знаходимо

$$V'''_n(x) = \lambda_n^3 f_n(x) - a_1\left(V'_{0n}(x) + \int_0^p R_{nx}(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi\right) -$$
$$- a_2\left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi\right) - \lambda_n^3\left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi\right),$$

де

$$V_{0n}(x) = f_n(x) - G_{n\xi\xi}(x,0)f_n(0) + G_{n\xi\xi}(x,p)f_n(p) - \int_0^p G_{n\xi\xi}(x,\xi)f'_n(\xi)d\xi,$$

$$V'_{0n}(x) = -G_{n\xi\xi x}(x,0)f_n(0) + G_{n\xi\xi x}(x,p)f_n(p) - \int_0^p G_{n\xi\xi x}(x,\xi)f'_n(\xi)d\xi.$$

Використовуючи оцінку (27) і властивості функції Гріна, одержуємо

$$\left|V'_{0n}(x)\right| \leq \frac{M}{n^{\frac{7}{3}}}\left(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\bar{g}_n(x)| + |\bar{g}_n(0)| + |\bar{g}_n(p)| + \left|\bar{g}'_n(x)\right|\right),$$
$$|R_{nx}(x,\xi)| \leq n^{\frac{2}{3}}\, M.$$

Звідси

$$\left|V'''_n(x)\right| \leq \frac{2\max\left(M,M^2\right)}{n}\left(\sum_{i=1}^{3}|\Psi_{in}| + |\bar{g}_n(x)| + |\bar{g}_n(0)| + |\bar{g}_n(p)| + \left|\bar{g}'_n(x)\right|\right).$$

Тоді маємо

$$|u_{xxx}(x,y)| \leq 2\max\left(M,M^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{3}|\Psi_{in}| + |\bar{g}_n(x)| + |\bar{g}_n(0)| + |\bar{g}_n(p)| + \left|\bar{g}'_n(x)\right|\right).$$

Використовуючи нерівності Коші – Буняковського і Бесселя, отримуємо

$$|u_{xxx}(x,y)| \leq 2\max\left(M,M^2\right)\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{3n}|^2} +\right.$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{g}_n(x)|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{g}_n(0)|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{g}_n(p)|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{g}_n'(x)|^2}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\le M^2\sqrt{\frac{\pi^2}{3q}}\biggl(\left\|\psi_1'''\right\|_{L_2(0,q)}+\left\|\psi_2'''\right\|_{L_2(0,q)}+\left\|\psi_3'''\right\|_{L_2(0,q)}+$$

$$+\left\|g_y(x)\right\|_{L_2(0,q)}+\left\|g_y(0)\right\|_{L_2(0,q)}+\left\|g_y(p)\right\|_{L_2(0,q)}+\left\|g_{xy}(x)\right\|_{L_2(0,q)}\biggr)<\infty,$$

де

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{in}|^2\le\left\|\psi_i'''\right\|^2_{L_2(0,q)},\quad i=\overline{1,3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\bar{g}_n(x)|^2\le\left\|g_y(x)\right\|^2_{L_2(0,q)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\bar{g}_n'(x)\right|^2\le\left\|g_{xy}(x)\right\|^2_{L_2(0,q)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Враховуючи нерівність

$$|u_{yy}(x,y)|\le|u_{xxx}(x,y)|+|a_1|\,|u_x(x,y)|+|a_2||u(x,y)|,$$

можна прийти до висновку, що й u_{yy} теж збігається.

Із розв'язку задачі (13) отримаємо розв'язок задачі A_1 у явному вигляді

$$u(x,y)=\int_0^p\int_0^q g(\xi,\eta)K(x,\xi;y,\eta)\,d\eta\,d\xi+\rho(x,y),$$

де

$$K(x,\xi;y,\eta)=\frac{2}{q}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(x,\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,\eta\right)+$$

$$+\frac{2}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right)\int_0^p R_n(x,s)G_n(x,\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,\eta\right)ds,$$

$$\rho(x,y)=\sqrt{\frac{2}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^p G_n(x,\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right)\bar{f}_n(\xi)\,d\xi+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right)\left(\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,s)\bar{f}_n(s)\,ds\,d\xi\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{2n}-\psi_{3n}p+\frac{\psi_{1n}}{2}\,p^2+(\psi_{3n}-\psi_{1n}p)x+\frac{\psi_{1n}}{2}\,x^2\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\,y\right),$$

$$\bar{f}_n(x) = \left(a_1(p-x) - \frac{(p-x)^2}{2}\,a_2 - \lambda_n^3\frac{(p+x)^2}{2}\right)\psi_{1n} -$$
$$- \big(a_2 + \lambda_n^3\big)\psi_{2n} + \big(a_2(p-x) - a_1 + \lambda_n^3(p-x)\big)\psi_{3n}.$$

Теорему 2 доведено.

Література

1. О. С. Рыжов, *Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа*, Прикл. математика и механика, **29**, вып. 6, 1004 – 1014 (1965).
2. В. Н. Диесперов, *О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **12**, № 5, 1265 – 1279 (1972).
3. H. Block, *Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples*, Ark. Mat. Astron. Fus., Note 1, **7(13)**, 1 – 34 (1912); Note 2, **7(21)**, 1 – 30 (1912); Note 3, **8(23)**, 1 – 51 (1912 – 1913).
4. E. Del Vicchio, *Sulleequazioni*, Memorie R. Accad. Sci., Ser. 2., **66**, 1 – 41 (1915).
5. L. Cattabriga, *Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31**, 1 – 45 (1961).
6. Т. Д. Джураев, Ю. П. Апаков, *Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками*, Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки, **15**, № 2 18 – 26 (2007).
7. Т .Д. Джураев, Ю. П. Апаков, *К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени*, Укр. мат. журн., **62**, № 1, 40 – 51 (2010).
8. Y. P. Apakov, S. Rutkauskas, *On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics*, Nonlinear Anal. Model. Control, **16**, № 3, 255 – 269 (2011).
9. Ю. П. Апаков, *О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками*, Укр. мат. журн., **64**, № 1, 1 – 11 (2012).
10. Ю. П. Апаков, А. Х. Жураев, *О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина*, Узб. мат. журн., № 3, 36 – 42 (2011).
11. T. K. Yuldashev, Y. P. Apakov, A. Kh. Zhuraev, *Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel*, Lobachevskii J. Math., **42**, № 6, 1316 – 1326 (2021).
12. Б. Ю. Иргашев, *Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами*, Bull. Inst. Math., № 6 23 – 29 (2019).
13. К. Б. Сабитов, *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка*, Докл. АН России, **427**, № 5, 593 – 596 (2009).
14. Ж. А. Балкизов, А. Х. Кадзаков, *О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками*, Изв. Кабард.-Балкар. науч. центра РАН, № 4, 64 – 69 (2010).
15. Г. А. Лукина, *Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза*, Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование, **234**, № 17, 52 – 61 (2011).
16. В. В. Шубин, *Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом*, Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика, **12**, № 1, 126 – 138 (2012).
17. A. Ashyralyev, K. Belakroum, A. Guezane-Lakoud, *Stability of boundary-value problems for third-order partial differential equations*, Electron. J. Differential Equations, **2017**, № 53, 1 – 11 (2017).
18. А. И. Кожанов, А. В. Дюжева, *Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка*, Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки, **24**, № 4, 607 – 620 (2020).
19. Ю. П. Апаков, А. К. Жураев, *Третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками*, Укр. мат. журн., **70**, № 9, 1274 – 1281 (2019).
20. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).

Одержано 27.06.22,
після доопрацювання — 15.09.22