УДК 517.929

ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ. РЕЗОНАНСНИЙ ВИПАДОК ДЛЯ СЛАБКО ЗБУРЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ *

І. А. Бондар

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: bondar.i@imath.kiev.ua

The noncritical case for linear boundary-value problems for systems of integro-differential equations is considered. We establish the existence conditions and the structure of solutions of the weakly perturbed boundary-value problem for these systems in the resonance case. By using the theory of orthoprojectors and pseudoinverse matrices in the Moore–Penrose sense, we investigate the sufficient condition for the existence of solutions of these problems.

Розглянуто некритичний випадок для лінійних крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь. Встановлено умови існування та структуру розв'язків слабко збуреної крайової задачі для таких систем у резонансному випадку. За допомогою теорії ортопроєкторів і псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць досліджено достатню умову існування розв'язків таких задач.

У різних прикладних науках з'являються математичні моделі процесів, описані системами алгебраїчних й інтегро-диференціальних рівнянь. Велику кількість таких математичних моделей описують системи інтегро-диференціальних рівнянь із різного типу збуреннями чи нелінійностями. Відомо, що деякі задачі оптимального керування, лінійного програмування, економіки, теорії пружності, гідродинаміки, хімічної та біологічної кінетики тощо моделюються такими операторними рівняннями. При дослідженні розв'язності різних типів функціонально-диференціальних рівнянь і крайових задач для них у останні десятиліття широко застосовується теорія узагальнено-обернених операторів [1 – 4]. Такий підхід дозволяє, з урахуванням специфіки кожної конкретної проблеми, застосовувати для її розв'язання всі переваги "операторної теорії". Теорія узагальнено-обернених нетерових операторів широко застосовується в евклідових просторах [2] і топологічно нетерових [5], n-, d-нормальних [6], інтегральних операторів [7] — у банахових просторах. Специфіка дослідження розв'язності та побудови розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь полягає в тому, що інтегро-диференціальний оператор не має оберненого оператора. Такі рівняння в евклідових просторах розглядалися в роботах [7 – 10] та ін.

У цій статті розглянуто застосування теорії узагальнено-обернених операторів для дослідження лінійних крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь у некритичному випадку, а також слабко збурену лінійну крайову задачу для таких рівнянь у резонансному випадку.

* Виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (проєкт 2020.02/0089, 2021 р.).

1. Крайова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром. Розглянемо крайову задачу для систем інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\big] ds = f(t), \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Будемо використовувати припущення і позначення з [2, 7], де: $A(t), B(t), \Phi(t)$ — $(m\times n)$, $(m \times n)$, $(n \times m)$-вимірні матриці відповідно, компоненти яких належать простору $L_2[a, b]$; вектор-стовпці матриці $\Phi(t)$ лінійно-незалежні на $[a, b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a, b]$; $\ell = \mathrm{col}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q)$ — лінійний обмежений q-вимірний векторний функціонал, $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) \in R^q$.

Розв'язок $x(t)$ крайової задачі (1), (2) шукаємо у класі вектор-функцій $x(t) \in D_2([a, b]$, $\dot{x}(t) \in L_2[a, b]$, $t \in [a, b]$. Дотримуючись раніше введеної [2] класифікації крайових задач, сформулюємо таке означення.

Означення. *Крайові задачі (1), (2), для яких відповідні їм лінійні однорідні крайові задачі*

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = 0, \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = 0 \tag{4}$$

не мають (мають) нетривіальних розв'язків, називаються некритичними (критичними).

Таким чином, випадки крайових задач, для яких виконується одна з умов $\mathrm{rank}\, Q = q$ або $\mathrm{rank}\, Q < q$ є, відповідно, некритичними або критичними; Q — $(q \times r_1)$-вимірна матриця, отримана підстановкою у крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t) = X(t, a)$, $X(a) = E$ системи $Q = \ell X(\cdot)$.

Коли розглядаємо некритичний випадок, тобто $\mathrm{rank}\, Q = n_2 = q$, то $\mathrm{rank}\, P_Q = q - \mathrm{rank}\, Q = 0$, отже, $P_Q = 0$. Це доводить справедливість такого твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\mathrm{rank}\, Q = n_2 = q$, *то однорідна крайова задача (3), (4) має лише тривіальний розв'язок.*

Неоднорідна імпульсна крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in L_2[a, b]$, $\alpha \in R^q$ *задовольняють умову*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} \{\alpha - \ell F(\cdot)\} = 0,$$

де $d_1 = m - n_1$, $d = q - r_1$, $r_1 = m + n - n_1$, $n_1 = \mathrm{rank}\, D$, *і при цьому має єдиний розв'язок*

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\alpha - \ell F(\cdot)) + F(t),$$

визначений у класі вектор-функцій $x(t) \in D_2([a, b])$, $\dot{x}(t) \in L_2[a, b]$, $t \in [a, b]$.

Тут

$$D = \left[I_m - \int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)] ds, \quad - \int_a^b A(s) ds \right]$$

— $(m \times (m + n))$-вимірна матриця [11];

$$\Psi(t) = \int_a^t \Phi(s)ds, \quad \Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n],$$

$$F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b},$$

$$\tilde{b} = \int_a^b \big[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\big]ds,$$

$X_{r_1}(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}$ — $(n \times r_1)$-вимірна матриця; $Q = \ell X_{r_1}(\cdot)$ — $(p \times r_1)$-вимірна матриця; $P_D,\ P_{D^*}$ — $((m+n) \times (m+n))$-, $(m \times m)$-вимірні матриці, ортопроєктори, які діють з $\mathbb{R}^{m+n},\ \mathbb{R}^m$ у ядро та коядро матриці D відповідно. Матриця $P_{D_{r_1}}$ $\left(P_{D^*_{d_1}}\right)$ складається з повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці P_D (P_{D^*}). Матриці $P_Q,\ P_{Q^*}$ — $(r_1 \times r_1)$-, $(p \times p)$-вимірні ортопроєктори, які переводять простори $\mathbb{R}^{r_1},\ \mathbb{R}^p$ у ядро та коядро матриці Q відповідно. Матриця $P_{Q_{r_2}}$ $\left(P_{Q^*_{d_2}}\right)$ складається з повної системи r_2 (d_2) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці $P_Q(P_{Q^*})$.

2. Слабко збурена крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь із малим лінійним збуренням у резонансному випадку. На відміну від крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь специфіка розгляду відповідних задач для інтегро-диференціальних систем полягає у тому, як зазначалося вище, що їхня лінійна частина є оператором, який не має оберненого. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких операторних рівнянь і крайових задач для них і призводить до того, що розв'язок крайової задачі для таких систем складається з умов розв'язності як самої операторної системи, так і крайової задачі для неї.

Для дослідження існування розв'язків таких задач, як буде показано далі, можна використати апарат теорії псевдообернених матриць і операторів, розвинений у роботах [9 – 11].

Зокрема, в [12] встановлено достатню умову існування розв'язку слабко збуреної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь у вигляді частини ряду Лорана з $k \geq -1$. Якщо ж ця умова не виконується, то розв'язку відповідної крайової задачі у такому вигляді не існує; покажемо, що він може існувати у вигляді частини ряду Лорана з $k \geq -2$.

Таким чином, розглянемо крайову задачу для лінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь із малим параметром ε:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b [K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)]ds, \tag{5}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{R}^q. \tag{6}$$

Будемо шукати структуру множини розв'язків цієї задачі у просторі $D_2[a,b]$ n-вимірних абсолютно неперервних диференційовних вектор-функцій

$$x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0].$$

Тут $A(t),\ B(t),\ \Phi(t),\ f(t),\ \ell,\ \ell_1,\ \alpha$ були описані вище, $K(t,s),\ K_1(t,s)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, складові яких визначені у просторі інтегровних на відрізку функцій $L_2[a,b]$.

З'ясуємо умови біфуркації розв'язку нетерової ($n \neq q$) крайової задачі (5), (6).

Розглянемо породжуючу (при $\varepsilon = 0$) крайову задачу (1), (2) і припустимо, що вона нерозв'язна при будь-яких неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$ і $\alpha \in \mathbb{R}^q$. Тобто критерій розв'язності [11] для крайової задачі (1), (2) не виконується і мають місце такі нерівності:

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} \neq 0, \qquad P_{Q^*_{d_2}} (\alpha - \ell F(\cdot)) \neq 0,$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \qquad d_2 = q - \operatorname{rank} Q.$$

І, більш того, достатня умова [12] розв'язності слабко збуреної крайової задачі (5), (6), теж не виконується, тоді розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5), (6) у вигляді частини ряду Лорана

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_k)$$

не існує.

Тут матриця B_0 — $((d_1 + d_2) \times r_2)$-вимірна, відома [9], будується по компонентах крайової задачі (5), (6) і має вигляд

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \displaystyle\int_a^b \Big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s) \Big] ds \\ P_{Q^*_{d_2}} \ell \Big(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) \bar{B}_0^+ \displaystyle\int_a^b \Big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s) \Big] ds \Big) \end{bmatrix},$$

матриці P_{B_0}, $P_{B_0^*}$ — $(r_2 \times r_2)$-, $((d_1 + d_2) \times (d_1 + d_2))$-вимірні ортопроєктори, які переводять простори $\mathbb{R}^{r_2}$, $\mathbb{R}^{d_1 + d_2}$ у ядро та коядро матриці B_0 відповідно.

Наша мета полягає у встановленні умов існування й алгоритму побудови структури множини розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5), (6). Основний метод, який використовується для аналізу поставленого завдання, ґрунтується на теорії псевдообернених матриць [2], ортопроєкторів і методі Вішика – Люстерника.

Таким чином, будемо шукати розв'язок крайової задачі (5), (6) у вигляді частини ряду Лорана при $k \geq 2$:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_k) = \frac{x_{-2}(t, c_{-2})}{\varepsilon^2} + \frac{x_{-1}(t, c_{-1})}{\varepsilon} + x_0(t, c_0) + \varepsilon x_1(t, c_1) + \ldots, \tag{7}$$

який збігається при фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

3. Основний результат. Підставивши ряд (7) у крайову задачу (5), (6) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, прийдемо до ітераційного процесу, на першому кроці якого при ε^{-2} отримаємо однорідну крайову задачу

$$\dot{x}_{-2}(t, c_{-2}) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x_{-2}(s, c_{-2}) + B(s)\dot{x}_{-2}(s, c_{-2})] ds = 0,$$

$$\ell x_{-2}(\cdot, c_{-2}) = 0.$$

Згідно з [11] однорідна крайова задача завжди розв'язна і має r_2-параметричну, $r_2 = r_1 - n_2$, сім'ю розв'язків

$$x_{-2}(t, c_{-2}) = X_{r_2}(t) c_{-2}, \tag{8}$$

де r_2-вимірний вектор констант c_{-2} належить $\mathbb{R}^{r_2}$ і буде визначений на наступному кроці, $X_{r_2}(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}}$ — $(n \times r_2)$-вимірна матриця.

На другому кроці, при ε^{-1}, отримаємо неоднорідну крайову задачу

$$\dot{x}_{-1}(t, c_{-1}) - \Phi(t) \int_a^b [A(s) x_{-1}(s, c_{-1}) + B(s) \dot{x}_{-1}(s, c_{-1})] ds = f_{-1}(x_{-2}(t, c_{-2})), \tag{9}$$

$$\ell x_{-1}(\cdot, c_{-1}) = \ell_1 x_{-2}(\cdot, c_{-2}), \tag{10}$$

де

$$f_{-1}(x_{-2}(t, c_{-2})) = \int_a^b [K(t,s) x_{-2}(s, c_{-2}) + K_1(t,s) \dot{x}_{-2}(s, c_{-2})] ds.$$

Неоднорідна крайова задача (9), (10) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли $f_{-1}(t) \in L_2[a,b]$ задовольняє умови $P_{D^*_{d_1}} \tilde{b}_{-1} = 0,\ P_{Q^*_{d_2}} \ell F_{-1}(\cdot) = 0$. Тут

$$\tilde{b}_{-1} = \int_a^b \Big[A(s) \tilde{f}_{-1}(s) + B(s) f_{-1}(s) \Big] ds = \left(\int_a^b \Big[A(s) \tilde{L}(s) + B(s) L(s) \Big] ds \right) c_{-2},$$

$$L(t) = \int_a^b \Big[K(t,s) X_{r_2}(s) + K_1(t,s) \dot{X}_{r_2}(s) \Big] ds,$$

$$\tilde{L}(t) = \int_a^t L(s) ds,$$

$$F_{-1}(t) = \tilde{f}_{-1}(t) + \Psi_0(t) \bar{B}_0^+ \tilde{b}_{-1} = \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) \bar{B}_0^+ \int_a^b \Big[A(s) \tilde{L}(s) + B(s) L(s) \Big] ds \right) c_{-2},$$

$$\bar{B}_0 := P_{D^*_{d_1}} \left(\int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b \Big[K(\tau, s) X_{r_1}(s) + K_1(\tau, s) \dot{X}_{r_1}(s) \Big] ds d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B(s) \int_a^b \Big[K(s, \tau) X_{r_1}(\tau) + K_1(s, \tau) \dot{X}_{r_1}(\tau) \Big] d\tau \right] ds \right),$$

де $L(t),\ \bar{B}_0$ — $(n \times r_2)$-, $(d_1 \times r_1)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a;b]$. Тоді отримаємо систему рівнянь щодо $c_{-2} \in \mathbb{R}^{r_2}$:

$$P_{D^*_{d_1}} \left(\int_a^b \Big[A(s) \tilde{L}(s) + B(s) L(s) \Big] ds \right) c_{-2} = 0,$$

$$P_{Q^*_{d_2}}\ell\left(\tilde{L}(\cdot)+\Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{L}(s)+B(s)L(s)\Big]ds\right)c_{-2}=0,$$

яка дозволяє записати рівнозначну алгебраїчну систему $B_0c_{-2}=0,$ що має ненульовий розв'язок $c_{-2}\neq 0$ тоді та тільки тоді, коли $P_{N(B_0)}\neq 0\colon c_{-2}^{(0)}=P_{N(B_0)}c_{-2}^{(0)}=P_{N(B_0)}c_{-2}\in$ $\in N(B_0).$

На третьому кроці, при ε^0, отримаємо неоднорідну крайову задачу

$$\dot{x}_0(t,c_0)-\Phi(t)\int\limits_a^b[A(s)x_0(s,c_0)+B(s)\dot{x}_0(s,c_0)]ds=f_{-1}(t), \tag{11}$$

$$\ell x_0(\cdot,c_0)=\alpha, \tag{12}$$

де

$$f_{-1}(t)=f(t)+\int\limits_a^b[K(t,s)x_{-1}(s,c_{-1})+K_1(t,s)\dot{x}_{-1}(s,c_{-1})]ds.$$

Крайова задача (11), (12) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли неоднорідності $f_{-1}(t)\in$ $\in L_2[a;b]$ і $\alpha\in\mathbb{R}^p$ задовольняють умови

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_{-1}=0,\qquad P_{Q^*_{d_2}}(\alpha-\ell F_{-1}(\cdot))=0, \tag{13}$$

де

$$F_{-1}(t)=\tilde{f}_{-1}(t)+\Psi_0(t)B_0^+\tilde{b}_{-1},$$

$$\tilde{b}_{-1}=\int\limits_a^b\Big[A(s)\tilde{f}_{-1}(s)+B(s)f_{-1}(s)\Big]ds,\qquad \tilde{f}_{-1}(t)=\int\limits_a^t f_{-1}(s)\,ds.$$

Підставимо (8) у (13) і отримаємо алгебраїчну систему відносно c_{-1}:

$$B_0c_{-1}=g_{-1}, \tag{14}$$

де

$$B_0:=\begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}}\int_a^b\Big[A(s)\tilde{L}(s)+B(s)L(s)\Big]ds \\ P_{Q^*_{d_2}}\ell\Big(\tilde{L}(t)+\Psi_0(t)\bar{B}_0^+\int_a^b\Big[A(s)\tilde{L}(s)+B(s)L(s)\Big]ds\Big)\end{bmatrix},$$

$$g_{-1}:=\begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}}\tilde{b} \\ P_{Q^*_{d_2}}\Big(\alpha-\ell(\tilde{f}(\cdot)-\Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+\tilde{b})\Big)\end{bmatrix}.$$

Система (14) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*}g_{-1}=0, \tag{15}$$

і має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків $c_{-1} = B_0^+ g_{-1} + P_{B_0}\tilde{c},\ \tilde{c} \in \mathbb{R}^{r_2}$. Виконання умови (15) перевірити важко, але якщо виконується умова

$$P_{B_0^*}\begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \\ P_{Q^*_{d_2}} \end{bmatrix} = 0, \tag{16}$$

то система (14) має хоча б один розв'язок вигляду $c_{-1} = B_0^+ g_{-1},\ c_{-1} \in \mathbb{R}^{r_2}$. Тут B_0^+ — $(r_2 \times (d_1 + d_2))$-вимірна матриця, псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до B_0. Таким чином, якщо має місце рівність (16), то крайова задача (11), (12) має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_0(t, c_0) = X_{r_2}(t)c_0 + F_{-1}(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\ell(F_{-1}(\cdot)),$$

де c_0 — r_2-вимірний вектор констант, який визначимо на наступному кроці.

При ε^1 отримаємо крайову задачу

$$\dot{x}_1(t, c_1) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x_1(s, c_1) + B(s)\dot{x}_1(s, c_1)]ds = f_0(t), \tag{17}$$

$$\ell x_1(\cdot, c_1) = 0, \tag{18}$$

де

$$f_0(t) = \int_a^b [K(t, s)x_0(s, c_0) + K_1(t, s)\dot{x}_0(s, c_0)]ds.$$

Умова розв'язності задачі (17), (18) має вигляд

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_0 = 0, \qquad P_{Q^*_{d_2}}\ell(F_0(\cdot)) = 0, \tag{19}$$

де

$$F_0(t) = \tilde{f}_0(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b}_0,$$

$$\tilde{b}_0 = \int_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_0(s) + B(s)f_0(s)\Big]ds, \qquad \tilde{f}_0(t) = \int_a^t f_0(s)ds.$$

Підставимо вираз для породжуючого розв'язку

$$x_0(t, c_0) = X_{r_2}(t)c_0 + F_{-1}(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\ell F_{-1}(\cdot)$$

у рівність (19) і отримаємо схожу до (14) алгебраїчну систему

$$B_0 c_0 = g_0, \tag{20}$$

яка є розв'язною тоді та тільки тоді, коли виконується рівність

$$P_{B_0^*}g_0 = 0.$$

Тут

$$g_0 := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \int_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{-1}(s) + B(s)M_{-1}(s)\Big]ds \\ P_{Q^*_{d_2}} l\Big(\Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+ \int_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{-1}(s) + B(s)M_{-1}(s)\Big]ds - \tilde{M}_{-1}(\cdot)\Big) \end{bmatrix},$$

$$M_{-1}(t) = \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\big(F_{-1}(s) - \Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\ell F_{-1}(\cdot)\big) +$$

$$+ K_1(t,s)\Big(\dot{F}_{-1}(s) - \dot{\Psi}_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\ell\dot{F}_{-1}(\cdot)\Big)\Big]ds,$$

$$\tilde{M}_{-1}(t) = \int\limits_a^t M_{-1}(s)\,ds.$$

Тоді один із розв'язків системи (20) має вигляд: $c_0 = B_0^+ g_0,\ c_0 \in \mathbb{R}^{r_2}$.

Таким чином, якщо виконується умова (16), то крайова задача (17), (18) має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_1(t,c_1) = X_{r_2}(t)c_1 + F_0(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\ell F_0(\cdot),$$

де c_1 — r_2-вимірний вектор констант, який визначимо на наступному кроці цього ітераційного процесу.

Легко показати, що за допомогою індукції співвідношення (16) є умовою розв'язності і крайової задачі, яку ми отримаємо на k-му кроці ітераційного процесу:

$$\dot{x}_k(t,c_k) - \Phi(t)\int\limits_a^b [A(s)x_k(s,c_k) + B(s)\dot{x}_k(s,c_k)]ds = f_{k-1}(t), \qquad (21)$$

$$\ell x_k(\cdot,c_k) = 0, \qquad (22)$$

де

$$f_{k-1}(t) = \int\limits_a^b [K(t,s)x_{k-1}(s,c_{k-1}) + K_1(t,s)\dot{x}_{k-1}(s,c_{k-1})]ds.$$

Нехай

$$\tilde{b}_{k-1} = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_{k-1}(s) + B(s)f_{k-1}(s)\Big]ds, \qquad \tilde{f}_{k-1}(t) = \int\limits_a^t f_{k-1}(s)ds.$$

Тоді крайова задача (21), (22) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{Q^*_{d_1}}\tilde{b}_{k-1} = 0, \qquad P_{D^*_{d_2}}\ell F_{k-1}(\cdot) = 0,$$

і має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_k(t,c_k) = X_{r_2}(t)c_k + F_{k-1}(t) - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\ell F_{k-1}(\cdot), \qquad (23)$$

$$F_{k-1}(t) = \tilde{f}_{k-1}(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b}_{k-1},$$

де c_k — r_2-вимірний вектор констант, який визначимо на наступному кроці. Отримаємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_k = g_k, \tag{24}$$

яка є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g_k = 0.$$

Тут

$$g_k := \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*}\tilde{W}_{k-1} \\ P_{Q_{d_2}^*}\ell\Big(\Psi_0(\cdot)\bar{B}_0^+\tilde{W}_{k-1} - \tilde{M}_{k-1}(\cdot)\Big)\end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\tilde{W}_{k-1} = \int_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{k-1}(s) + B(s)M_{k-1}(s)\Big]ds,$$

$$M_{k-1}(t) = \int_a^b \Big[K(t,s)\big(F_{k-1}(s) - \Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\ell F_{k-1}(\cdot)\big) +$$

$$+ K_1(t,s)\Big(\dot{F}_{k-1}(s) - \dot{\Psi}_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+\ell\dot{F}_{k-1}(\cdot)\Big)\Big]ds,$$

$$\tilde{M}_{k-1}(t) = \int_a^t M_{k-1}(s)\,ds.$$

Тоді один із розв'язків системи (24) має вигляд $c_k = B_0^+ g_k,\ c_k \in \mathbb{R}^{r_2},\ k = -2.$

Таким чином, крайова задача (21), (22) є розв'язною, якщо виконується умова (16), і має розв'язок (23).

Справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що слабко збурена крайова задача (5), (6) задовольняє вказані вище умови так, що породжуюча крайова задача (1), (2) є нерозв'язною при будь-якій* $f(t) \in \in L_2[a,b],\ \alpha \in \mathbb{R}^p$. *Якщо виконується умова* $P_{B_0^*}\begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*}\end{bmatrix} = 0$, *то крайова задача (5), (6) буде мати хоча б один розв'язок, заданий у класі вектор-функцій* $x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b]$, $\dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0]$ *у вигляді ряду*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t,c_k),$$

який збігається при фіксованому $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*]$ *і складові компоненти якого визначаються ітераційним процесом (23), (25).*

Зауваження. Якщо $P_{N(B_0)} = 0$, то операторні рівняння типу (24) на кожному кроці ітераційного процесу будуть n-нормальними та однозначно розв'язними [13]. Тоді при виконанні умови $P_{B_0^*}\begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix} = 0$ крайова задача (5), (6) буде мати єдиний розв'язок у вигляді ряду

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_k).$$

Отриману техніку дослідження лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь, розвинену у цій роботі та в [7, 9, 10, 12], можна успішно застосовувати для широкого класу задач, якщо їхня лінійна частина є оператором, який не має оберненого.

Література

1. A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized inverses. Theory and applications. 2nd ed.*, Springer-Verlag, New York (2003).
2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston (2004); 2nd ed., Walter de Gruyter GmbH & Co KG (2016).
3. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a Banach space*, Differ. Equ., **50(3)**, 1 – 11 (2014).
4. A. A. Boichuk, M. Medved', V. F. Zhuravliov, *Fredholm boundary-value problems for linear delay systems defined by pairwise permutable matrices*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., № 23, 1 – 9 (2015).
5. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. А. Покутный, *Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **65**, № 2, 165 – 177 (2013).
6. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n- (d-) нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010).
7. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **16**, № 4, 460 – 474 (2013).
8. Ю. К. Ландо, *Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1112 – 1126 (1968).
9. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465 – 476 (2017).
10. І. А. Бондар, О. Б. Нестеренко, О. П. Страх, *Слабкозбурені системи лінійних інтегро-динамічних рівнянь на часовій шкалі*, Нелін. коливання, **24**, № 1, 3 – 16 (2021).
11. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).
12. I. Golovatska, *Weakly perturbed boundary-value problems of integro-differential equations*, Tatra Mt. Math. Publ., **54**, 61 – 71 (2013).
13. В. П. Журавльов, М. П. Фомін, *Слабко збурені інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 184 – 199 (2020).

Одержано 31.08.22