УДК 517.929.2

ОПЕРАТОР ВАНДЕРМОНДА ТА ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: horodnii@gmail.com

We study the problem of the existence of a unique bounded solution of a linear difference equation of arbitrary order with bounded operator coefficients. The case where the corresponding "algebraic" operator equation has separated pairwise commuting roots is considered. By using the Vandermonde operator constructed on the basis of these roots, we obtain a representation of a unique bounded solution.

Вивчено питання про існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння довільного порядку з обмеженими операторними коефіцієнтами. Розглянуто випадок, коли відповідне "алгебраїчне" операторне рівняння має розділені попарно комутовні корені. За допомогою оператора Вандермонда, побудованого за такими коренями, отримано зображення єдиного обмеженого розв'язку.

1. Вступ. Нехай X — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють із X у X; I, O — відповідно одиничний і нульовий оператори в X.

Зафіксуємо натуральне число $p \geq 2$ і розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+p} = A_1 x_{n+p-1} + A_2 x_{n+p-2} + \ldots + A_p x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

у якому $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — фіксовані оператори з $L(X)$, $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовності елементів простору X.

У цій статті досліджуються умови на операторні коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_p$, при виконанні яких справджується така умова.

Умова обмеженості. Різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \in \mathbb{Z}\}$ для кожної обмеженої (за нормою в X) послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Покладемо

$$X^p = \left\{ \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)} \right)^\tau \,\middle|\, x^{(k)} \in X,\ 1 \leq k \leq p \right\}.$$

Тоді X^p — банахів простір із покоординатним додаванням і множенням на комплексне число та нормою

$$\|\bar{x}\|_* = \sum_{k=1}^{p} \left\| x^{(k)} \right\|, \quad \bar{x} = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)} \right)^\tau \in X^p.$$

Якщо $T_{ij},\ 1 \leq i,\ j \leq p,$ — фіксовані оператори з $L(X),$ то, як і для числових матриць,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1p} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & T_{2p} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ T_{p1} & T_{p2} & \ldots & T_{pp} \end{pmatrix}$$

задає оператор із простору $L(X^p)$ за правилом

$$T\bar{x} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} T_{1k}x^{(k)} \\ \sum_{k=1}^{p} T_{2k}x^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{p} T_{pk}x^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \ldots \\ x^{(p)} \end{pmatrix} \in X^p.$$

Нехай

$$T_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{p-1} & A_p \\ I & O & \ldots & O & O \\ O & I & \ldots & O & O \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ O & O & \ldots & I & O \end{pmatrix},$$

$\sigma(T_A)$ позначає спектр оператора $T_A,\ S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Покладемо

$$\Delta(\lambda) = I\lambda^p - A_1\lambda^{p-1} - \ldots - A_{p-1}\lambda - A_p, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Внаслідок теореми 1 з [1] і наведених у [2] властивостей спектра операторного пучка справджується така теорема.

Теорема 1. *Наступні умови еквівалентні:*

(i_1) *для різницевого рівняння (1) виконується умова обмеженості;*

(i_2) *для кожного* $\lambda \in S$ *оператор* $\Delta(\lambda)$ *неперервно оборотний;*

(i_3) *для різницевого рівняння*

$$\bar{x}_{n+1} = T_A\bar{x}_n + \bar{y}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

що розглядається у просторі X^p, *виконується умова обмеженості.*

У загальному випадку перевірка умови (i_2) теореми 1 нетривіальна. Ми будемо досліджувати випадок, коли для неї можна використати властивості коренів відповідного до (1) "алгебраїчного" операторного рівняння

$$\Lambda^p - A_1\Lambda^{p-1} - \ldots - A_{p-1}\Lambda - A_p = O, \tag{3}$$

яке розглядається в $L(X)$. Подібний метод використовувався для різницевих рівнянь другого порядку в [3], а також для диференціальних рівнянь другого порядку в [4]. Про існування й властивості обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь див. [5 – 8] і наведену там бібліографію.

2. Розділені корені рівняння (1) і оператор Вандермонда. Аналогічно до [3, 4] корені $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$ рівняння (1) будемо називати розділеними, якщо для довільних $1 \le i < j \le p$ оператор $\Lambda_i - \Lambda_j$ неперервно оборотний.

У подальшому використовується таке припущення.

Припущення 1. Операторне рівняння (3) має розділені й попарно комутовні корені $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$.

Згідно з [2] відповідний до $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$ оператор Вандермонда діє у просторі X^p і визначається формулою

$$W = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{p-1} & \Lambda_2^{p-1} & \ldots & \Lambda_p^{p-1} \\ \Lambda_1^{p-2} & \Lambda_2^{p-2} & \ldots & \Lambda_p^{p-2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \ldots & \Lambda_p \\ I & I & \ldots & I \end{pmatrix}.$$

Наступна теорема містить потрібні в подальшому властивості оператора W.

Теорема 2. *Якщо виконується припущення 1, то:*

(j_1) *оператор W має неперервний обернений оператор W^{-1};*

(j_2) *справджується рівність*

$$W^{-1} T_A W = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O & \ldots & O \\ O & \Lambda_2 & \ldots & O \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ O & O & \ldots & \Lambda_p \end{pmatrix};$$

(j_3) $\sigma(T_A) = \bigcup_{k=1}^{p} \sigma(\Lambda_k)$.

Доведення. Оскільки корені $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$ розділені, то оператор

$$D = \prod_{1 \le i < j \le p} (\Lambda_i - \Lambda_j),$$

який є аналогом визначника Вандермонда для W у скалярному випадку, має неперервний обернений оператор D^{-1}. Тому з урахуванням попарної комутовності $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$ оператор W^{-1} будується, як і для числових матриць, за допомогою алгебраїчних доповнень, а отже, справджується твердження (j_1).

Із (j_1) і наслідка 1.1 з [2] випливає, що твердження (j_2) теж виконується. Зрештою твердження (j_3) є безпосереднім наслідком твердження (j_2).

3. Основні результати. Відомо (див., наприклад, [7, c. 8]), що коли спектр $\sigma(V)$ оператора $V \in L(X)$ не перетинається з одиничним колом S, $\sigma_-(V)$ — частина спектра оператора V, що лежить усередині, а $\sigma_+(V)$ — зовні кола S (одна з цих множин може бути порожньою), то простір X розкладається в пряму суму інваріантних стосовно V підпросторів $X = X_-(V) \dot{+} X_+(V)$ таким чином, що звуження $V_\pm$ оператора V на підпростори $X_\pm(V)$ мають спектри $\sigma_\pm(V)$ відповідно. Також різницеве рівняння

$$x_{n+1} = V x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

задовольняє умову обмеженості в X тоді й тільки тоді, коли $\sigma(V) \cap S = \varnothing$. При цьому відповідний до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (4) будується за таким правилом. Покладемо

$$G_V(n) = \begin{cases} V_-^n P_-(V), & n \geq 0, \\ -V_+^n P_+(V), & n \leq -1, \end{cases}$$

де $P_\pm(V)$ — проєктори, що відповідають зображенню $X = X_-(V) \dotplus X_+(V)$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} G_V(j) y_{n-1-j}. \tag{5}$$

Зобразимо (5) у більш зручному для подальших міркувань вигляді. Покладемо

$$l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \left\{ \hat{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \;\middle|\; \|\hat{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Тоді $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ — банахів простір із покоординатним додаванням і множенням на комплексне число і нормою $\|\cdot\|_\infty$. Визначимо оператор $\Phi \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, X))$ за правилом

$$\Phi\hat{x} = \big\{(\Phi\hat{x})_n = x_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}\big\}, \quad \hat{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X).$$

Тому згідно з (5) відповідний до $\hat{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\hat{x} = \{x_n, n \in \in \mathbb{Z}\}$ зображується у вигляді згортки $\hat{x} = G_V * \Phi\hat{y}$.

Справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконується припущення 1. Різницеве рівняння (1) задовольняє умову обмеженості тоді й тільки тоді, коли*

$$\left(\bigcup_{k=1}^{p} \sigma(\Lambda_k) \right) \cap S = \varnothing. \tag{6}$$

При цьому відповідний до обмеженої послідовності $\hat{y}$ єдиний обмежений розв'язок $\hat{x}$ рівняння (1) зображується у вигляді

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{p} G_{\Lambda_k} * \Phi D_{1k} D^{-1} \hat{y}, \tag{7}$$

де для кожного $1 \leq k \leq p$

$$D_{1k} = (-1)^{k+1} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq p \\ i \neq k,\ j \neq k}} (\Lambda_i - \Lambda_j),$$

— алгебраїчне доповнення до елемента Λ_k^{p-1} першого рядка матриці, за допомогою якої визначається W, $D_{1k} D^{-1} \hat{y} = \big\{D_{1k} D^{-1} y_n,\ n \in \mathbb{Z}\big\}$.

Доведення. Оскільки рівняння (2) має вигляд (4), то еквівалентність умови обмеженості для рівняння (1) й умови (6) випливає з теореми 1 і твердження (j$_3$) теореми 2.

Перевіримо правильність зображення (7). З урахуванням попарної комутовності коренів $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$, як і для числових визначників, для всіх $0 \le j \le p-2$ виконуються рівності

$$\sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^j D_{1k} = O,$$

а також

$$\sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^{p-1} D_{1k} = D.$$

Покладемо

$$\hat{x}(k) = G_{\Lambda_k} * \Phi D_{1k} D^{-1} \hat{y}, \quad 1 \le k \le p.$$

Внаслідок (4), (5) для довільних $1 \le k \le p,\ n \in \mathbb{Z}$

$$x_{n+1}(k) = \Lambda_k x_n(k) + D_{1k} D^{-1} y_n. \tag{8}$$

Тому з (7), (8) випливає, що при фіксованому $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{p} x_n(k), \tag{9}$$

для кожного $1 \le j \le p-1$

$$\begin{aligned} x_{n+j} &= \sum_{k=1}^{p} x_{n+j}(k) = \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k x_{n+j-1}(k) + \left(\sum_{k=1}^{p} I D_{1k} \right) D^{-1} y_{n+j-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^2 x_{n+j-2}(k) + \left(\sum_{k=1}^{p} \Lambda_k D_{1k} \right) D^{-1} y_{n+j-2} = \ldots \\ &\ldots = \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^j x_n(k) + \left(\sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^{j-1} D_{1k} \right) D^{-1} y_n = \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^j x_n(k), \end{aligned}$$

$$x_{n+p} = \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^p x_n(k) + \left(\sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^{p-1} D_{1k} \right) D^{-1} y_n = \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k^p x_n(k) + y_n. \tag{10}$$

Оскільки $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$ — корені операторного рівняння (3), то внаслідок рівностей (9), (10) для кожного $n \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\begin{aligned} & x_{n+p} - A_1 x_{n+p-1} - A_2 x_{n+p-2} - \ldots - A_p x_n = \\ & = \sum_{k=1}^{p} \Big(\Lambda_k^p - A_1 \Lambda_k^{p-1} - \ldots - A_{p-1} \Lambda_k - A_p \Big) x_n(k) + y_n = y_n, \end{aligned}$$

а отже, визначена за допомогою формули (7) послідовність $\hat{x}$ справді є відповідним до $\hat{y}$ обмеженим розв'язком різницевого рівняння (1).

Зауваження. Якщо $p = 2$, то згідно із зауваженням 1.3 роботи [2] незалежно від комутовності коренів $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ оператор W неперервно оборотний тоді й тільки тоді, коли оператор $\Lambda_1 - \Lambda_2$ неперервно оборотний. У цьому випадку безпосередньо перевіряємо, що замість припущення 1 у формулюванні теореми 3 досить вимагати, щоб операторне рівняння $\Lambda^2 - A_1\Lambda - A_2 = O$ мало розділені корені $\Lambda_1,\ \Lambda_2$.

Визначимо, як звичайно, скінченні різниці вперед за допомогою рівностей

$$\triangle^1 x_n = x_{n+1} - x_n,$$

$$\triangle^j x_n = \triangle^{j-1} x_{n+1} - \triangle^{j-1} x_n, \quad j \geq 2.$$

Позначимо через

$$u_k = e^{\frac{2\pi k i}{p}}, \quad 0 \leq k \leq p-1, \tag{11}$$

корені p-го степеня з одиниці. Розглянемо різницеве рівняння

$$\triangle^p x_n = A^p x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

в якому A — фіксований оператор із $L(X)$. Рівнянню (12) відповідає операторне рівняння $(\Lambda - I)^p - A^p = O$, яке має попарно комутовні корені

$$U_k = I + u_k A, \quad 0 \leq k \leq p-1. \tag{13}$$

Теорема 4. *Для того щоб різницеве рівняння (12) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб*

$$\left(\bigcup_{k=0}^{p-1} \{1 + u_k z \mid z \in \sigma(A)\} \right) \cap S = \varnothing. \tag{14}$$

При цьому відповідний до обмеженої послідовності $\hat{y}$ єдиний обмежений розв'язок $\hat{x}$ рівняння (12) зображується у вигляді

$$\hat{x} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k G_{U_k} * \Phi A^{-p+1} \hat{y}. \tag{15}$$

Доведення. *Необхідність.* З умови обмеженості для рівняння (12) і теореми 1 випливає, що оператор $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^p - A^p$ неперервно оборотний для кожного $\lambda \in S$. Оскільки $\Delta(1) = -A^p$, то оператор A має неперервний обернений оператор A^{-1}, а отже, із рівностей $U_i - U_j = (u_i - u_j)A,\ 0 \leq i < j \leq p-1$, випливає, що корені $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$ розділені. Тому з урахуванням рівностей (13) співвідношення (14) виконується за теоремою 3.

Достатність. Із (14) випливає, що оператор A неперервно оборотний, а отже, для різницевого рівняння (12) виконуються умови теореми 3. Тому воно задовольняє умову обмеженості.

Перевіримо, що для рівняння (12) формула (7) записується у вигляді (15). Справді з урахуванням рівностей (11) для кожного $1 \leq k \leq p$ матимемо

$$D_{1k} D^{-1} = (-1)^{1+k} A^{-p+1} \prod_{0 \leq j \leq k-2} (u_j - u_{k-1})^{-1} \prod_{k \leq j \leq p-1} (u_{k-1} - u_j)^{-1} =$$

$$= A^{-p+1}u_{k-1}^{-p+1}\prod_{\substack{0\le j\le p-1\\ j\ne k-1}}\left(u_0-\frac{u_j}{u_{k-1}}\right)^{-1}=$$

$$= A^{-p+1}u_{k-1}^{-p+1}\prod_{1\le\ l\ \le p-1}(u_0-u_l)^{-1}=u_{k-1}^{-p+1}D_{11}D^{-1}.$$

Тому

$$D=\sum_{k=1}^{p}U_{k-1}^{p-1}D_{1k}=\sum_{k=1}^{p}(I+u_{k-1}A)^{p-1}u_{k-1}^{-p+1}D_{11}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=0}^{p-1}C_{p-1}^{j}u_{k-1}^{j-p+1}A^{j}\right)D_{11}=\sum_{j=0}^{p-1}C_{p-1}^{j}A^{j}D_{11}\left(\sum_{k=1}^{p}u_{k-1}^{j-p+1}\right)=pA^{p-1}D_{11},$$

де через C_{p-1}^{j} позначено відповідний біноміальний коефіцієнт. Звідси випливає, що $D_{1k}D^{-1}=\dfrac{u_{k-1}}{p}A^{-p+1}$ для кожного $1\le k\le p$, тобто зображення (15) є правильним.

Література

1. М. Ф. Городний, *Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 41 – 46 (1991).
2. А. С. Маркус, И. В. Мереуца, *О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному операторному пучку*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **37**, вып. 5, 1108 – 1131 (1973).
3. Л. Ю. Кабанцова, *Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов*, Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, **17**, вып. 3, 285 – 293 (2017).
4. А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран, Т. И. Смагина, *Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов*, Изв. выс. учеб. заведений. Математика, № 10, 38 – 49 (2017).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 822 – 841 (2020).
6. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, Utrecht, VSP, Boston (2004).
7. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
8. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).

Одержано 10.06.22