УДК 517.9

ПРО НЕПЕРЕРВНІ ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ierominat@ukr.net
olena_sivak@ukr.net

We obtain existence conditions of continuous solutions of a class of systems of linear functional-difference equations with many deviations of the argument, propose a method for construction of these solutions, and investigate the structure of their set.

Отримано умови існування неперервних розв'язків одного класу систем лінійних різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу, запропоновано метод побудови таких розв'язків і досліджено структуру їхньої множини.

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x(qt) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)x(t + \Delta_j(t)) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R},\ A,\ B_j(t),\ j = 1,\ldots,k,$ — деякі дійсні $(n \times n)$-вимірні матриці, q — деяка дійсна стала, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності $n,\ \Delta_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,k.$ Системи лінійних різницевих і різницево-функціональних рівнянь розглянуто, зокрема, в $[1-8]$. Дослідимо питання існування неперервних обмежених при $t \geq T$ розв'язків такої системи у випадку, коли виконуються умови:

1) всі елементи матриць $B_j(t),\ j = 1,\ldots,k,$ і вектора $F(t)$ є обмеженими при $t \geq T$ функціями;

2) функції $\Delta_j(t),\ j = 1,\ldots,k,$ є неперервними обмеженими при $t \geq T,\ \Delta_j(t) \geq 1,$ $q \neq 0;$

3) $\sup_t |B_j(t)| = b_j,\ j = 1,\ldots,k,\ \sup_t |F(t)| = M,\ |A| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = a < 1;$

4) $\tilde{\Delta} = \dfrac{\sum_{l=1}^{k} b_l}{1-a} < 1.$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1) – 4). Тоді система рівнянь (1) має єдиний неперервний обмежений при $t \geq T$ розв'язок $x(t)$ у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t),\ i = 0,1,\ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \geq T$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = A\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+\Delta_j(t)) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(qt) = Ax_0(t) + F(t), \tag{3_0}$$

$$x_i(qt) = Ax_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)x_{i-1}(t+\Delta_j(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3_i}$$

то ряд (2) є формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Безпосередньою підстановкою в (3_0) можна переконатися, що ряд

$$x_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j F\big(q^{-(j+1)}t\big), \tag{4_0}$$

є формальним розв'язком системи рівнянь (4_0). Більш цього, завдяки умовам 1) – 4) ряд (4_0) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$|x_0(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \big|A^j\big| \Big|F\big(q^{-(j+1)}t\big)\Big| \le M\sum_{j=0}^{\infty} a^j \le \frac{M}{1-a} = M'.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j\left(\sum_{l=1}^{k} B_l\big(q^{-(j+1)}t\big)x_{i-1}\Big(q^{-(j+1)}t + \Delta_j\big(q^{-(j+1)}t\big)\Big)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ які є розв'язками відповідних систем (3_i), $i = 1, 2, \ldots,$ і задовольняють умови

$$|x_i(t)| \le M'\tilde{\Delta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5_i}$$

Дійсно, завдяки (4_1) і умовам 1) – 4) отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \Big|B_l\big(q^{-(j+1)}t\big)\Big| \Big|x_0\Big(q^{-(j+1)}t + \Delta_j\big(q^{-(j+1)}t\big)\Big)\Big|\right) \le$$

$$\le M'\sum_{j=0}^{\infty} a^j \sum_{l=1}^{k} b_l \le M'\frac{\sum_{l=1}^{k} b_l}{1-a} = M'\tilde{\Delta}$$

і, отже, оцінка (5_1) має місце. За індукцією припустимо, що оцінку (5_i) доведено вже для деякого $i \ge 1,$ і покажемо її справедливість для $i+1.$ Справді, зважаючи на (4_{i+1}), (5_i) й умови тереми, знаходимо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \Big|B_l\big(q^{-(j+1)}t\big)\Big| \Big|x_{i-1}\Big(q^{-(j+1)}t + \Delta_j\big(q^{-(j+1)}t\big)\Big)\Big|\right) \le$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} a^j \left(\sum_{l=1}^{k} b_l \right) M' \tilde{\Delta}^i \leq M' \frac{\sum_{l=1}^{k} b_l}{1-a} \tilde{\Delta}^i = M' \tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, оцінки (5_i) виконуються для всіх $i \geq 1$.

Таким чином, ряди (4_i), $i = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ для яких виконуються оцінки (5_i), $i = 0, 1, \ldots.$ Тоді безпосередньо із (5_i), $i = 0, 1, \ldots,$ випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1).

Припустимо тепер, що система (1) має ще один розв'язок $y(t)$ такий, що $y(t) \neq x(t)$. Оскільки

$$y(qt) \equiv Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y(t + \Delta_j(t)) + F(t),$$

то, беручи до уваги умови теореми 1, одержимо

$$|x(qt) - y(qt)| \leq |A|\, |x(t) - y(t)| + \sum_{j=1}^{k} |B_j(t)|\, |x(t + \Delta_j(t)) - y(t + \Delta_j(t))| \leq$$

$$\leq \left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

де $\|x(t) - y(t)\| = \max_t |x(t) - y(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

яке згідно з умовами теореми може мати місце лише у випадку, коли $y(t) \equiv x(t)$. Отримана суперечність закінчує доведення.

Виконуючи в (1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — побудований вище неперервний обмежений при $t \geq T$ розв'язок системи (1), дослідження системи рівнянь (1) можна звести до дослідження системи рівнянь

$$y(qt) = Ay(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y(t + \Delta_j(t)).$$

При виконанні умов теореми 1 ця система рівнянь має єдиний неперервний при $t \in \in \mathbb{R}$ розв'язок $y \equiv 0$. Проте при деяких додаткових умовах вона має нескінченно багато неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків. Це ми покажемо (для простоти) у випадку, коли $\Delta_j(t) \equiv j,\ j = 1, \ldots, k,$ а матриця А має вигляд $A = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Отже, розглянемо систему рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y(t+j) \tag{6}$$

і доведемо, що для неї справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ q > 1$;

2) $\bar{\Delta} = \dfrac{\sum_{l=1}^{k} b_j}{1 - \lambda^*} < 1$, *де* $b_j = \sup_t |B_j(t)|,\ j = 1, \ldots, k,\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (6) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежить від довільної неперервної* 1*-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (6) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{7}$$

де $y_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (7) у (6), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+j).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{8_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y_{i-1}(t+j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{8_i}$$

то ряд (7) буде формальним розв'язком системи рівнянь (6).

Система рівнянь (8_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{9_0}$$

де $\omega(\tau) = \big(\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau)\big),\ \omega_i(\tau),\ i = 1, \ldots, n,$ — довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = \mathrm{diag}\left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (8_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \sum_{l=1}^{k} B_l\big(q^{-(j+1)} t\big) y_{i-1}\big(q^{-(j+1)} t + l + 1\big), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{9_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми ряди (9_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq \tilde{M}\bar{\Delta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \leq |t^v||\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} \tilde{M},$$

де $\tilde{M} = \max_\tau |\omega(\tau)|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, то завдяки ($8_i$) і $\dfrac{\ln \lambda_*}{\ln q} < 0$ отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \Big| B_l\big(q^{-(j+1)}t\big) \Big| \Big| y_0\big(q^{-(j+1)}t + l + 1\big) \Big| \right) \leq$$

$$\leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left(\sum_{l=1}^{k} |b_l| \left(\frac{t}{q^{j+1}} + l + 1 \right)^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} \right) \leq$$

$$\leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \sum_{l=1}^{k} |b_l| \leq \tilde{M} \frac{\sum_{l=1}^{k} |b_l|}{1 - \lambda^*} \leq \tilde{M}\bar{\Delta}.$$

Отже, оцінка (10) має місце при $i = 1$. Припустимо, що її доведено вже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Завдяки співвідношенням (9_{i+1}), (10), $i = 1, 2, \ldots$, маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \left(\sum_{l=1}^{k} \Big| B_l\big(q^{-(j+1)}t\big) \Big| \Big| y_i\big(q^{-(j+1)}t + l + 1\big) \Big| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^*|^j \left(\tilde{M} \sum_{l=1}^{k} |b_l| \right) \bar{\Delta}^i \leq \tilde{M} \, \frac{\sum_{l=1}^{k} |b_l|}{1 - \lambda^*} \, \bar{\Delta}^i = \tilde{M}\bar{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, оцінки (10) виконуються для всіх $i \geq 1$ і ряди (9_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тобто ми довели, що ряд (7) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (6) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq \tilde{M} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Delta}^i \leq \frac{\tilde{M}}{1 - \bar{\Delta}}.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 і умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;

2) $\bar{\Delta} = \dfrac{\sum_{l=1}^{k} b_j}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $b_j = \sup_t |B_j(t)|$, $j = 1, \ldots, k$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (6) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної* 1*-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (6) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{11}$$

де $y_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (11) у (6), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+j).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{12_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \sum_{j=1}^{k} B_j(t) y_{i-1}(t+j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{12_i}$$

то ряд (11) буде формальним розв'язком системи рівнянь (6).

Система рівнянь (12_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{13_0}$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau)),\ \omega_i(\tau),\ i = 1, \ldots, n,$ — довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = \operatorname{diag}\left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (12_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \sum_{l=1}^{k} B_l(q^j t) y_{i-1}(q^j t + l + 1), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{13_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми ряди (13_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq \tilde{M} \bar{\Delta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \leq |t^{v}||\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} \tilde{M} \leq \frac{\tilde{M}}{t^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}},$$

де $\tilde{M} = \max_\tau |\omega(\tau)|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, то завдяки (12_1) і $\dfrac{\ln \lambda_*}{\ln q} < 0$ одержуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} \left|B_l(q^j t)\right| \left|y_0(q^j t + l + 1)\right| \right) \leq$$

$$\leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} |b_l| \frac{1}{\left(q^j t + l + 1\right)^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M} \sum_{l=1}^{k} |b_l|}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j} \leq \frac{\tilde{M} \sum_{l=1}^{k} |b_l|}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\lambda_*}} \leq \tilde{M} \frac{\sum_{l=1}^{k} |b_l|}{\lambda_* - 1} \leq \tilde{M} \bar{\Delta}.$$

Отже, оцінка (14) має місце при $i = 1$. Припустимо, що її доведено вже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, згідно з (13_{i+1}) і (14), $i = 1, 2, \ldots$, маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} \left|B_l(q^j t)\right| \left|y_i(q^j t + l + 1)\right| \right) \leq \tilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j+1} \left(\sum_{l=1}^{k} |b_l| \Delta^i \right) \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j} \left(\sum_{l=1}^{k} |b_l| \Delta^i \right) \leq \frac{\tilde{M} \sum_{l=1}^{k} |b_l|}{\lambda_*} \frac{\Delta^i}{1 - \dfrac{1}{\lambda_*}} \leq \tilde{M} \frac{\sum_{l=1}^{k} |b_l|}{\lambda_* - 1} \Delta^i \leq \tilde{M} \bar{\Delta}^{i+1}.$$

Тобто оцінки (14) виконуються для всіх $i \geq 1$ і ряди (13_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Цим ми довели, що ряд (11) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (6) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq \tilde{M} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Delta}^i \leq \frac{\tilde{M}}{1 - \bar{\Delta}}.$$

Теорему 3 доведено.

Література

1. G. D. Birkhoff, *General theory of linear difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **12**, No. 2, 243 – 284 (1911).
2. R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities, theory, methods and applications. Second edition*, Monogr. Textb. Pure Appl. Math., **228**, Marcel Dekker, Inc., New York (2000).
3. W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of linear q-difference equations*, Acta Math., **61**, No. 1, 1 – 38 (1933); DOI: 10.1007/BF02547785.
4. Д. И. Мартынюк, *Лекции по качественной теории разностных уравнений*, Наук. думка, Киев (1972).
5. А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов, *Линейные неоднородные разностные уравнения*, Наука, Москва (1986).
6. Г. П. Пелюх, *К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом*, Докл. АН, **73**, № 2, 269 – 272 (2006).
7. Г. П. Пелюх, О. А. Сивак, *Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом*, Нелін. коливання, **13**, № 1, 75 – 95 (2010).
8. Т. О. Єрьоміна, *Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь*, Нелін. коливання, **17**, № 3, 341 – 350 (2014).

Одержано 12.07.22