УДК 517.9

# РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРА НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ БЕЗ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ*

**О. Капустян, Т. Юсипів**

*Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка*
*просп. акад. Глушкова, 4-Е, Київ, 03022, Україна*
*e-mail: alexkap@univ.kiev.ua*
*yusypivt7@gmail.com*

The qualitative behavior of a nonlinear wave equation with a nonsmooth interaction function subjected to the action of external bounded disturbances is considered. We prove that the global attractor of the multivalued semiflow generated by solutions of the unperturbed problem is stable in the sense of ISS with respect to disturbances.

Розглянуто якісну поведінку нелінійного хвильового рівняння з негладкою функцією взаємодії, що зазнає зовнішніх обмежених збурень. Доведено, що глобальний атрактор багатозначного напівпотоку, породженого розв'язками незбуреної задачі, є стійким у сенсі ISS стосовно збурень.

**Вступ.** Якісну поведінку нескінченновимірних еволюційних систем без єдиності, тобто коли поряд із глобальною розв'язністю можлива неєдиність розв'язку початкової крайової задачі, почали активно вивчати в рамках теорії атракторів із кінця 90-х років минулого століття [1 – 5]. Виявилося, що для широких класів еволюційних об'єктів за досить загальних умов на параметри вдається встановити існування у фазовому просторі компактної рівномірно-притягуючої множини — глобального атрактора. Його стійкість щодо збурень вивчалась у роботах [6 – 13]. Теорію стійкості від входу до стану (ISS), що характеризує відхилення розв'язків збуреної задачі від асимптотично стійкого положення рівноваги [14 – 17], було застосовано до нескінченновимірних дисипативних систем із нетривіальним атрактором у роботах [18 – 20]. Зокрема, встановлено властивість локальної стійкості від входу до стану (local ISS) і властивість асимптотичного підсилення (asymptotic gain, AG) для напівлінійних параболічних і хвильових рівнянь за умови коректності Задачі Коші.

У цій статті вперше одержано властивість AG для глобального атрактора динамічної системи без єдиності ($m$-напівпотоку), породженої розв'язками нелінійного хвильового рівняння з негладкою функцією взаємодії.

**Постановка задачі.** В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 3,$ розглядаємо задачу

$$\begin{cases} y_{tt} + \alpha y_t - \triangle y + f(y) = 0, \quad t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $\alpha > 0,\ f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}),$

$$\exists c > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad |f(s)| \leq c\Big(1 + |s|^{\frac{n}{n-2}}\Big), \tag{2}$$

* Виконано за підтримки DAAD, Bilateral Exchange of Academics (2022).

$$\underline{\lim}_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1, \tag{3}$$

де $\lambda_1 > 0$ — перше власне число оператора $-\triangle$ в $H_0^1(\Omega)$. Тоді відомо [7], що в фазовому просторі $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ задача (1) для кожного $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ має (можливо, неєдиний) розв'язок $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}([0,+\infty); X),\ z(0) = z_0$, і всі розв'язки (1) породжують багатозначний напівпотік ($m$-напівпотік) $G\colon \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$

$$G(t, z_0) = \big\{ z(t) \mid z(\cdot) \text{ розв'язок (1)}, \ \ z(0) = z_0 \big\},$$

для якого в $X$ існує глобальний атрактор.

**Означення 1** [3]. *Нехай $G$ — $m$-напівпотік, тобто*

$$\forall x \in X \quad \forall t, s \geq 0 \qquad G(0, x) = x, \quad G(t+s, x) \subset G(t, G(s,t)).$$

*Компактна множина $\Theta \subset X$ називається глобальним атрактором $G$, якщо:*

1) $\Theta \subset G(t, \Theta)\ \forall t \geq 0$;

2) *для будь-якої обмеженої множини $B \subset X$ $\operatorname{dist}(G(t,B), \Theta) \to 0,\ t \to \infty$, де тут і далі*

$$G(t, B) = \bigcup_{z \in B} G(t, z),$$

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{z_1 \in A} \inf_{z_2 \in B} \|z_1 - z_2\|_X.$$

Тепер розглянемо збурену задачу

$$\begin{cases} y_{tt} + \alpha y_t - \triangle y + f(y) = h(x)u(t), \quad t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де $h \in L^2(\Omega),\ u \in L^\infty(0, +\infty)$ — вхідний (збурюючий) сигнал.

Позначимо

$$S_u(t, 0, z_0) = \{ z(t) \mid z(\cdot) \text{ розв'язок (4)},\ z(0) = z_0 \}.$$

Основним результатом роботи є встановлення властивості асимптотичного підсилення (AG) відносно атрактора $\Theta$ незбуреної ($u \equiv 0$) системи [19]:

$$\exists \gamma \in \mathcal{K} \quad \forall z_0 \in X \quad \forall u \in U \subseteq L^\infty(0, +\infty)\colon$$
$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \operatorname{dist}(S_u(t, 0, z_0), \Theta) \leq \gamma(\|u\|_\infty),$$

де $U$ — деяка трансляційно інваріантна множина вхідних сигналів, $\mathcal{K}$ — клас неперервних монотонно зростаючих функцій із $\gamma(0) = 0$ [21], $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} |u(t)|$.

**Робастна стійкість і атрактори багатозначних напівпотоків.** Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахів простір, $\mathbb{R}_{\geq} = \{(t,\tau) \mid t \geq \tau \geq 0\}$, $\Sigma$ — довільна трансляційно-інваріантна множина, тобто

$$\forall \sigma \in \Sigma \quad \forall h \geq 0 : \sigma(\cdot + h) \in \Sigma.$$

**Означення 2** [6]. *Сім'я багатозначних відображень*

$$\left\{S_\sigma : \mathbb{R}_{\geq} \times X \mapsto 2^X\right\}_{\sigma \in \Sigma}$$

*називається сім'єю $m$-напівпроцесів, якщо*

$$\forall \sigma \in \Sigma \quad \forall x \in X \quad \forall t \geq s \geq \tau \geq 0 \quad \forall h \geq 0$$

$$S_\sigma(\tau, \tau, x) = x, \qquad S_\sigma(t, \tau, x) \subset S_\sigma(t, s, S_\sigma(s, \tau, x)),$$

$$S_\sigma(t + h, \tau + h, x) \subset S_{\sigma(\cdot + h)}(t, \tau, x).$$

Позначимо $S_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$.

**Означення 3** [6]. *Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset X$ називається рівномірним атрактором $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, якщо для будь-якої обмеженої множини $B \subset X$*

$$\operatorname{dist}\left(S_\Sigma(t, 0, B), \Theta_\Sigma\right) \to 0, \quad t \to \infty,$$

*і $\Theta_\Sigma$ є мінімальною у класі таких множин.*

***Зауваження 1.*** Якщо $\Sigma = \{0\}$, то для $G(t, x) := S_0(t, 0, x)$ маємо властивості

$$G(0, x) = S_0(0, 0, x) = x,$$

$$G(t + s, x) = S_0(t + s, 0, x) \subset S_0(t + s, s, S_0(s, 0, x)) \subset S_0(t, 0, S_0(s, 0, x)) = \\ = G(t, G(s, x)),$$

отже, $G$ є $m$-напівпотоком.

Наступна лема гарантує існування рівномірного атрактора у $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$.

**Лема 1** [6]. *Нехай $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ — сім'я $m$-напівпроцесів, $\Sigma$ — трансляційно-інваріантна підмножина деякого метричного простору і виконуються умови:*

1) *існує обмежена множина $B_0 \subset X$ така, що для будь-якої обмеженої множини $B \subset X$ існує $T = T(B)$ таке, що $\forall t \geq T$ $S_\Sigma(t, 0, B) \subset B_0$;*

2) $\forall \{\sigma_n\} \subset \Sigma$ $\forall t_n \nearrow \infty$ *для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\} \subset X$ послідовність $\{\xi_n \in S_{\sigma_n}(t_n, 0, x_n)\}_{n \geq 1}$ передкомпактна.*

*Тоді $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ має рівномірний атрактор $\Theta_\Sigma$.*

*Якщо, крім того, виконується умова:*

3) *відображення $\Sigma \times X \ni (\sigma, x) \mapsto S_\sigma(t, 0, x) \subset X$ має замкнений графік,*
*то*

$$\Theta_\Sigma \subset S_\Sigma(t, 0, \Theta_\Sigma).$$

***Зауваження 2.*** В умові 1) можна вважати, що $B_0 = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq R_0\}$.

***Зауваження 3.*** Для $\Sigma = \{0\}$ умови 1) – 3) набувають вигляду

$\forall t \geq T$ $G(t, B) \subset B_0$;

кожна послідовність $\xi_n \in G(t_n, B)$ передкомпактна;

відображення $x \mapsto G(t, x)$ має замкнений графік;

і гарантують [3], що $\Theta := \Theta_{\{0\}}$ — глобальний атрактор $m$-напівпотоку $G$.

**Теорема 1.** *Нехай для кожного $u \in U \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ існує трансляційно-інваріантна множина $\Sigma(u)$ така, що сім'я $m$-напівпроцесів $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma(u)}$ задовольняє умови 1) – 3) леми 1,*

$$\Sigma(0) = \{0\} \quad \forall u \in U, \quad u \in \Sigma(u),$$

$$\forall r_0 > 0 \ \text{ існує множина } \ B_0 \ \text{ така, що умова 1) леми 1 виконується } \ \forall \|u\|_\infty \le r_0,$$

*тобто*

$$\exists T = T(r_0, B) \quad \forall t \ge T \bigcup_{\|u\|_\infty \le r_0} S_{\Sigma(u)}(t, 0, B) \subset B_0, \tag{5}$$

*і, крім того, виконуються умови:*

1) *множина* $\|u_k\|_\infty \to 0,\ t_k \to \infty \Rightarrow \xi_k \in S_{\Sigma(u_k)}(t_k, 0, B_0)$ *передкомпактна;*

2) $\|u_k\|_\infty \to 0,\ x_k \to x,\ \xi_k \in S_{\Sigma(u_k)}(t, 0, x_k),\ \xi_k \to \xi \Rightarrow \xi \in S_0(t, 0, x)$.

*Тоді*

$$\exists \gamma \in \mathcal{K} \quad \forall x \in X \quad \forall u \in U \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \operatorname{dist}(S_u(t, 0, x), \Theta) \le \gamma(\|u\|_\infty).$$

***Доведення.*** Спочатку доведемо, що

$$\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(u)}, \Theta) \to 0, \quad \|u\|_\infty \to 0. \tag{6}$$

Нехай це не так. Тоді $\exists u_k \to 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists z_k \in \Theta_{\Sigma(u_k)}$ такі, що $\operatorname{dist}(z_k, \Theta) \ge \varepsilon$. Згідно з 1) по підпослідовності $z_k \to z$. Дійсно,

$$z_k \in \Theta_{\Sigma(u_k)} \subset S_{\Sigma(u_k)}(t_k, 0, \Theta_{\Sigma(u_k)}) \subset S_{\Sigma(u_k)}(t_k, 0, B_0).$$

Виберемо $t > 0$ так, щоб $\operatorname{dist}(G(t, B_0), \Theta) < \varepsilon$. Тоді $z_k \in \Theta_{\Sigma(u_k)} \subset S_{\Sigma(u_k)}(t_k, 0, \Theta_{\Sigma(u_k)})$, тобто $\exists \eta_k \in \Theta_{\Sigma(u_k)} \subset B_0$ таке, що $z_k \in S_{\Sigma(u_k)}(t, 0, \eta_k)$. Згідно з 1) по підпослідовності $\eta_k \to \eta \in B_0$. Тоді з 2)

$$z_k \to z \in G(t, \eta) \subset G(t, B_0) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить припущенню.

Тепер для фіксованих $u \in U,\ x \in X$ маємо

$$\operatorname{dist}(S_u(t, 0, x), \Theta) \le \operatorname{dist}(S_u(t, 0, x), z) + \operatorname{dist}(z, \Theta).$$

Але $S_u(t, 0, x) \subset S_{\Sigma(u)}(t, 0, x)$. Отже,

$$\operatorname{dist}(S_u(t, 0, x), \Theta) \le \operatorname{dist}(S_{\Sigma(u)}(t, 0, x), \Theta_{\Sigma(u)}) + \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(u)}, \Theta).$$

З властивості притягнення

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \operatorname{dist}(S_{\Sigma(u)}(t, 0, x), \Theta_{\Sigma(u)}) = 0. \tag{7}$$

Покладемо

$$\gamma_0(s) := \sup_{\|u\|_\infty \le s} \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(u)}, \Theta).$$

Тоді

$$\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(u)}, \Theta) \le \gamma_0(\|u\|_\infty).$$

Функція $\gamma_0(s)$ набуває скінченних значень для кожного $s > 0$. Дійсно,

$$\gamma_0(s) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(u_n)}, \Theta), \quad \|u_n\|_\infty \le s.$$

Тоді згідно з (5) існує замкнена куля $B = B(s)$ така, що $\forall n \ge 1\ \Theta_{\Sigma(u_n)} \subset B$.

Отже, $\gamma_0(s) \le \operatorname{dist}(B, \Theta) + 1 < \infty$.

Таким чином, $\gamma_0 \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ неспадна, $\gamma_0(0) = 0$ і, згідно з (6), $\gamma_0(s) \to 0$, $s \to 0$. Тоді з [22] випливає існування $\gamma \in \mathcal{K}$ такої, що $\forall s \ge 0\ \gamma_0(s) \le \gamma(s)$. Отже, згідно з (7)

$$\forall u \in U \quad \forall x \in X \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \operatorname{dist}(S_u(t, 0, x), \Theta) \le \gamma(\|u\|_\infty).$$

Теорему 1 доведено.

**Застосування до збуреного хвильового рівняння.** Розглядаємо збурену задачу (4). Підсилимо умову (3) до такої: $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ такі, що для $F(s) := \int_0^s f(p)dp$ для всіх $s \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$F(s) \ge -ms^2 - c_1, \quad f(s)s - c_2F(s) + ms^2 \ge c_3, \tag{8}$$

де $m \in (0, \lambda_1)$ достатньо мале.

За умов (2), (8) відомо [6], що $\forall \tau \ge 0\ \forall z_\tau \in X\ \forall u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ задача (4) має принаймні один розв'язок $z \in \mathbb{C}([\tau, +\infty); X) \colon z(\tau) = z_\tau$. Більш того, сім'я відображень $\left\{S_u \colon \mathbb{R}_\ge \times X \mapsto 2^X\right\}$ таких, що

$$S_u(t, \tau, z_\tau) = \{z(t) \mid z(\cdot) \text{ розв'язок (4) і } z(\tau) = z_\tau\}, \tag{9}$$

породжує сім'ю $m$-напівпроцесів для будь-якої трансляційно-інваріантної $U \subset L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Крім того, для кожного розв'язку (4) $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ справедлива оцінка

$$\|y_t(t)\|^2_{L^2} + \|y(t)\|^2_{H^1_0} \le c_4\Bigg(\left(\|y_t(\tau)\|^2_{L^2} + \|y(\tau)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_{H^1_0}\right)e^{-\delta(t-\tau)} + \\ + 1 + \int_\tau^t |u(p)|^2 e^{-\delta(t-p)}dp\Bigg) \quad \forall t \ge \tau \ge 0,$$

де $c_4 > 0$, $\delta > 0$ не залежать від $z$.

Зокрема, якщо

$$\sup_{t\ge0} \int_t^{t+1} |u(p)|^2 dp < \infty,$$

то

$$\forall t \ge \tau \ge 0 \quad \|z(t)\|^2_X \le c_5\left(\|z(\tau)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_X e^{-\delta(t-\tau)} + 1 + \sup_{t\ge0}\int_t^{t+1} |u(p)|^2 dp\right). \tag{10}$$

Як $U$ виберемо всі функції з $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, для яких

$$\sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}|u(s+l)-u(s)|^2\,ds\leq \varkappa(|l|), \tag{11}$$

де $\varkappa$ може залежати від $u$ і $\varkappa(p)\to 0,\ p\to 0+$.

Відомо [6], що $\forall u\in U$ множина

$$\Sigma(u):=cl_{L^2_{\rm loc}}\{u(\cdot+h)\mid h\geq 0\}$$

є трансляційно-інваріантною, компактною в $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}_+),\ u\in\Sigma(u),\ \Sigma(0)=\{0\}$ і, крім того,

$$\forall v\in\Sigma(u)\quad \sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}|v(s)|^2ds\leq \sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}|u(s)|^2ds\leq\|u\|^2_\infty. \tag{12}$$

При виконанні (11) сім'я $m$-напівпроцесів $\{S_v\}_{v\in\Sigma(u)}$, означена в (9), задовольняє умови 1)–3) леми 1, а отже, має рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(u)}$. При цьому згідно з (10) і (12) виконується умова (5).

**Теорема 2.** *Нехай параметри збуреної задачі (4) задовольняють умови (2), (8), (11). Тоді*

$$\exists\gamma\in\mathcal{K}\quad\forall z_0\in X\quad\forall u\in U\qquad \varlimsup_{t\to\infty}{\rm dist}\,(S_u(t,0,z_0),\Theta)\leq\gamma(\|u\|_\infty),$$

*де $\Theta$ — глобальний атрактор незбуреної задачі (1).*

***Доведення.*** Перевіримо умови 1), 2) теореми 1. Нехай $\|u_k\|_\infty\to 0,\ v_k\in\Sigma(u_k)$. Тоді згідно з (12) $v_k\to 0$ у $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$. Якщо для $t>0,\ \xi_k\in S_{v_k}\big(t,0,z_k^0\big),\ z_k^0\to z^0,\ \xi_k\to\xi$, то $\xi_k=z_k(t)$, де $z_k(\cdot)$ — розв'язок (4) зі збуренням $v_k$ і початково заданим $z_k^0$.

Для подальших міркувань використаємо такий результат.

**Лема 2** [23]**.** *Нехай* $z_k(\cdot)=\begin{pmatrix}y_k(\cdot)\\ y_{k_t}(\cdot)\end{pmatrix}$ *— розв'язки (4) з* $u=v_k,\ z_k(0)=z_k^0$*, причому для* $T>0$

$$v_k\to v\quad \textit{слабко в}\ \ L^2(0,T),\qquad z_k^0\to z^0\quad \textit{слабко в}\quad X. \tag{13}$$

*Тоді по підпослідовності*

$$y_k\to y\quad \textit{в}\quad \mathbb{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\cap\big(H_0^1(\Omega)\big)_w\big),$$
$$y_{k_t}\to y_t\quad \textit{в}\quad \mathbb{C}\big([0,T];H^{-1}(\Omega)\cap(L_2(\Omega))_w\big),$$

*де індекс $w$ означає простір із топологією слабкої збіжності,* $z(\cdot)=\begin{pmatrix}y(\cdot)\\ y_t(\cdot)\end{pmatrix}$ *— розв'язок (4) з* $u=v,\ z(0)=z^0$*. Якщо збіжності в (13) сильні, то*

$$z_k\to z\ \ \textit{в}\ \ \mathbb{C}([0,T];X).$$

Використовуючи цю лему, одержуємо

$$\xi_k = z_k(t) \to \xi = z(t) \in S_0(t, 0, z_0),$$

що й означає виконання умови 2).

Тепер нехай $v_k \to 0$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+),\ t_k \nearrow \infty,\ \xi_k \in S_{v_k}\big(t_k, 0, z_k^0\big),\ \big\|z_k^0\big\|_X \le r_0.$

Тоді по підпослідовності $z_k^0 \to z^0$ слабко в $X$.

Таким чином, $\xi_k = z_k(t_k),\ z_k(\cdot)$ — розв'язок (4) з $u = v_k,\ z_k(0) = z_k^0.$

З оцінок (10), (12) виводимо, що $\xi_k$ обмежена в $X$, отже, по підпослідовності

$$\xi_k \to \xi \quad \text{слабко в } X.$$

Більш того, можемо вибрати підпослідовність так, що

$$\forall N \ge 1 \quad z_k(t_k - N) \to \xi_N \quad \text{слабко в } X.$$

Крім того, $\forall t \ge 0$ для достатньо великих $k$ маємо

$$z_k(t_k - N + t) \in S_{v_k}(t_k - N + t, t_k - N, z_k(t_k - N)) \subset S_{v_k(\cdot + t_k - N)}(t, 0, z_k(t_k - N)).$$

Покладемо $\bar{v_k}(t) := v_k(t + t_k - N)$. Тоді

$$\forall T > 0 \quad \int\limits_0^T \bar{v_k}^2(t)\,dt = \int\limits_{t_k - N}^{T + t_k - N} v_k^2(s)\,ds \le T \sup_{t \ge 0} \int\limits_t^{t+1} v_k^2(s)\,ds \le T\|u_k\|_\infty^2.$$

Отже, $\bar{v_k} \to 0$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Тоді з леми 2 для $\bar{z_k}(t) = z_k(t + t_k - N)$ маємо

$$\forall t \ge 0 \quad \bar{z_k}(t) \to \bar{z}(t) \quad \text{слабко в } X,$$
$$\bar{z}(t) \in S_0(t, 0, \xi_N).$$

Зокрема,

$$\bar{z_k}(N) = \xi_k \to \bar{z}(N) = \xi \quad \text{слабко в } X.$$

Відомо, що кожен розв'язок (4) $z(\cdot)$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt} I(z(t)) + \alpha I(z(t)) = H_u(t, z(t)), \tag{14}$$

де

$$I(z) = \frac{1}{2}\|y_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla y\|_{L^2}^2 + (F(y), 1)_{L^2} + \frac{\alpha}{2}(y_t, y)_{L^2},$$
$$H_u(t, z) = \alpha(F(y), 1)_{L^2} - \frac{\alpha}{2}(f(y), y)_{L^2} + \frac{\alpha}{2} u(t)(h, y)_{L^2} + u(t)(h, y_t)_{L^2}.$$

Запишемо (14) для $\bar{z_k}$. Після інтегрування по $[0, N]$ одержуємо

$$I(\xi_k) = I(z_k(t_k - N))e^{-\alpha N} + \int\limits_0^N e^{\alpha(p - N)} H_{\bar{v_k}}(p, \bar{z_k}(p))\,dp. \tag{15}$$

Оскільки $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, то з оцінки (10) та умови (2) випливає, що послідовності $\{F(\bar{y_k})\}$, $\{f(\bar{y_k})\bar{y_k}\}$ обмежені в $L^{\frac{2n}{2n-2}}((0,N)\times\Omega)$.

Тоді за Лемою Обена – Ліонса

$$\forall N \geq 0 \quad \int_0^N e^{\alpha(p-N)} H_{\bar{v_k}}(p, \bar{z_k}(p))dp \to \int_0^N e^{\alpha(p-N)} H_0(\bar{z}(p))dp, \quad k \to \infty,$$

де

$$H_0(\bar{z}) = \alpha(F(\bar{y}), 1) - \frac{\alpha}{2}\,(f(\bar{y}), \bar{y}).$$

З оцінки (10)

$$\exists c_6 > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad |I(z_k(t))| \leq c_6, \tag{16}$$

де $c_6$ не залежить від $N$.

Тоді з (15), (16) маємо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, I(\xi_k) \leq c_6 e^{\alpha N} + \int_0^N e^{-\alpha(p-N)} H_0(\bar{z}(p))\,dp =$$

$$= c_6 e^{-\alpha N} + I(\xi) - I(\xi_N)e^{-\alpha N} \leq 2c_6 e^{-\alpha N} + I(\xi).$$

Звідси

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{1}{2}\|\xi_k\|_X^2 \leq 2c_6 e^{-\alpha N} + \frac{1}{2}\|\xi\|_X^2.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $N \to \infty$, отримуємо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \|\xi_k\|_X \leq \|\xi\|_X.$$

Враховуючи слабку збіжність, одержуємо передкомпактність $\{\xi_k\}$ у $X$.

Теорему 2 доведено.

## Література


1. R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York (1997).
2. J. C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
3. В. С. Мельник, *Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем*, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН України, Киев, **94**, 12 – 17 (1994); (Препринт, НАН Украины, Ин-т кибернетики; 94-17).
4. V. S. Melnik, J. Valero, *On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, Set-Valued Anal., **6**, № 1, 83 – 111 (1998).
5. V. S. Melnik, A. V. Kapustyan, *On global attractors of multivalued semidynamic systems and their approximations*, Dokl. Akad. Nauk, **366**, 445 – 448 (1999).
6. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, American Mathematical Society, Providence, RI (2002).
7. J. M. Ball, *Global attractors for damped semilinear wave equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **10**, № 1-2, 31 – 52 (2004).

8. О. А. Капустян, О. В. Капустян, А. В. Сукретна, *Наближена стабілізація для нелінійної параболічної крайової задачі*, Укр. мат. журн., **63**, № 5, 654 – 661 (2011); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **63**, № 5, 759 – 767 (2011).

9. P. O. Kasyanov, V. S. Mel'nik, S. Toscano, *Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued* $\omega_{\lambda_0}$*-pseudomonotone maps*, J. Differential Equations, **249**, 1258 – 1287 (2010).

10. N. V. Gorban, A. V. Kapustyan, E. A. Kapustyan, O. V. Khomenko, *Strong global attractors for the three-dimensional Navier – Stokes system of equations in unbounded domain of channel type*, J. Autom. Inform. Sci., **47**, 48 – 59 (2015).

11. О. В. Капустян, М. О. Перестюк, *Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем*, Укр. мат. журн., **68**, 517 – 528 (2016).

12. S. Dashkovskiy, O. V. Kapustyan, I. V. Romaniuk, *Global attractors of impulsive parabolic inclusions*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **22**, 1875 – 1886 (2017).

13. S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan, I. Romaniuk, *Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl., **458**, 193 – 218 (2018).

14. E. D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Trans. Automat. Control, **34**, № 4, 435 – 443 (1989).

15. E. D. Sontag, Y. Wang, *On characterizations of the input-to-state stability property*, Systems Control Lett., **24**, 351 – 359 (1995).

16. S. Dashkovskiy, A. Mironchenko, *Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems*, Math. Control Signals Systems, **25**, 1 – 35 (2013).

17. A. Mironchenko, *Local input-to-state stability: Characterizations and counterexamples*, Systems Control Lett., **87**, 23 – 28 (2016).

18. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, J. Schmid, *A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations*, Math. Control Signals Systems, **32**, № 3, 309 – 326 (2020).

19. J. Schmid, O. Kapustyan, S. Dashkovskiy, *Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems*, Math. Control Relat. Fields, **12**, № 3, 763 (2021).

20. О. В. Капустян, Т. В. Юсипів, *Стійкість до збурень для атрактора дисипативної системи типу PDE – ODE*, Нелін. коливання, **24**, № 3, 336 – 341 (2021).

21. H. K. Khalil, *Nonlinear systems. Third edition*, Prentice Hall, New Jersey (2002).

22. H. I. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis (Fourth Edition)*, China Machine Press (2010).

23. M. Z. Zgurovsky, P. O. Kasyanov, O. V. Kapustyan, J. Valero, N. V. Zadoianchuk, M. Z. Zgurovsky, *Evolution inclusions and variation inequalities for earth data processing III. Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis*, Springer, Heidelberg (2012).

*Одержано 17.08.22*