

## РІВНОВАЖНІ СТАНИ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ ДЛЯ ТРЬОХ ГРАВЦІВ ІЗ ПАРАМЕТРОМ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА\*

**Т. В. Каратаєва**

*Ин-т математики НАН України  
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна  
e-mail: karat@imath.kiev.ua*

**В. Д. Кошманенко**

*Ин-т математики НАН України  
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна  
Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова  
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна  
e-mail: koshman63@gmail.com*

We study the mathematical model of an abstract society in the form of a complex dynamical system with a conflict interaction between its elements. New existence conditions for equilibrium (compromise) states (fixed points) in the presence of a permanent environment influence are found. The main results concern systems with three elements (players). In this case, we describe all equilibrium states, investigate their stability depending on the parameter of external influence, and partially describe basins of attraction for one-point attractors. Several computer examples are given.

Досліджується математична модель абстрактного суспільства у вигляді складної динамічної системи з конфліктною взаємодією між її елементами. Знайдено нові умови існування рівноважних (компромисних) станів (fixed points) при наявності постійного впливу зовнішнього середовища. Основні результати стосуються системи з трьома елементами (гравцями). У цьому випадку дано опис усіх рівноважних станів, досліджено їх стійкість залежно від параметра зовнішнього впливу та частково описані басейни притягання одноточкових атракторів. Наведено ряд комп'ютерних прикладів.

**1. Вступ.** За означенням (див. [1–4], а також [5, 6]) динамічна система конфлікту (ДСК) є складною динамічною системою, яка описує зміни у часі розподілів двох або декількох мір  $\mu, \nu, \dots$  на спільному просторі  $\Omega$  під дією фіксованого закону конфліктної взаємодії (нелінійного перетворення на просторі ймовірнісних мір). Міри  $\mu, \nu, \dots$  мають інтерпретацію розподілів конкуруючих опонентів на ресурсному просторі  $\Omega$ . Отже, стани ДСК складаються з двох  $(\mu^t, \nu^t)$  або декількох мір, залежних від часу. Наявність конфлікту математично означає, що носії цих мір у початковий момент часу  $\mu^{t=0} = \mu, \nu^{t=0} = \nu$  перетинаються,  $\text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(\nu) \neq \emptyset$ . Конфлікт вичерпується, якщо асимптотично, при

---

\* Виконано при частковій фінансовій підтримці за проектом “Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні” (№ держ. реєстрації 0122U000670) у рамках програми “Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022–2023 рр.”.

$t \rightarrow \infty$ , міри стають ортогональними:  $\mu^{t=\infty} \perp \nu^{t=\infty}$ . Відповідні граничні розподіли описують рівноважні стани (нерухомі точки динамічної системи). Встановлення умов існування всіх рівноважних станів, не обов'язково асимптотичних, є однією із задач цієї статті.

Раніше ми вже розглядали ряд ДСК як чисто абстрактних [7–14], так і модельних [15–18]. Наш підхід має аналоги в таких публікаціях, як [19–31], але істотно відрізняється більш прозорою інтерпретацією математичних побудов. Частково запропонований підхід переключається з ідеологією, розвинутою ще в монографії [32]. Варто відзначити, що у випадку лише внутрішнього конфлікту (автономної системи) типовим результатом конкурентної боротьби є існування єдиного переможця (winner take all). Принципово новим результатом ефекту впливу зовнішнього середовища є “виживання” початково слабшого.

Опишемо детальніше наші побудови. Тут, як і в [15–18], ми розглядаємо лише дискретні міри, які є стохастичними векторами  $\mu = \mathbf{p}$ ,  $\nu = \mathbf{r} \in \mathbb{R}_{1,+}^m$ .

Нехай  $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $1 < m < \infty$ , є множиною подібних елементів (індивідів) абстрактного конфліктного суспільства (соціуму). Конфліктність означає наявність альтернативної конкурентної взаємодії між індивідами  $a_i$  за свій соціальний статус — енергію життєвого ресурсу. Для зручності математичного моделювання, життєвий ресурс усієї множини  $\mathcal{A}$  ми нормуємо на 1. Тому енергетичний статус окремого індивіда  $a_i$  вимірюється невід'ємним числом  $0 \leq p_i^t \leq 1$ , де  $t$  означає час. При цьому завжди  $\sum_{i=1}^m p_i^t = 1$ .

Залежність функцій  $p_i^t$  від часу задається універсальним законом конфліктної взаємодії (див. далі формулу (2)). Еволюція  $p_i^t$  визначається двома параметрами — початковим значенням  $p_i = p_i^{t=0}$  і величиною зовнішнього впливу  $b_i^t$ , який можна тлумачити як енергетичне підживлення. У цій роботі ми розглядаємо найпростішу ситуацію, коли зовнішній вплив є постійною величиною,  $0 < b_i^t = b < 1$ , однаковою для всіх індивідів. І навіть у такому випадку теорія є досить нетривіальною.

Отже, стан системи  $\mathcal{A}$  у кожен момент часу описується стохастичним вектором

$$\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_m^t), \quad p_1^t + \dots + p_m^t = 1.$$

Покладаємо, що соціум  $\mathcal{A}$  є цілком конфліктним. Це означає, що для кожного індивіда  $a_i$  його конкуруючим оточенням є множина всіх інших індивідів  $\mathcal{A}_i^\perp := \{a_k\}_{k \neq i}$ . Виконується принцип “кожен сам за себе і проти всіх”. Тому альтернативна енергія умовного конкурента для  $a_i$  (позначимо її через  $r_i^t$ ) визначається як середнє значення енергій усіх індивідів із оточення  $\mathcal{A}_i^\perp$ . Отже,

$$r_i^t = \frac{\sum_{k \neq i} p_k^t}{m-1}.$$

Таким чином, виникає вектор енергій конфліктного оточення

$$\mathbf{r}^t = \{r_i^t\}_{i=1}^m, \quad r_i^t = \frac{1 - p_i^t}{m-1}, \quad r_i^t \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m r_i^t = 1.$$

Еволюція станів  $\mathbf{p}^t$  соціуму  $\mathcal{A}$  породжує динамічну систему конфлікту (ДСК) у дискретному часі. Формально цю еволюцію задає деяке нелінійне перетворення  $T$  у просторі стохастичних векторів  $\mathbb{R}_{1,+}^m$ ,

$$T: \mathbf{p}^t \longrightarrow \mathbf{p}^{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

яке задають різницеві рівняння у термінах координат:

$$p_i^{t+1} = Tp_i^t := \frac{(p_i^t + b)(1 - r_i^t)}{z^t}, \quad p_i^0 = p_i, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де параметр  $0 < b < 1$  позначає зовнішній вплив, а  $z^t$  — нормувальний знаменник. Неважко показати, що  $z^t = \sum_k (p_k^t + b)(1 - r_k^t)$ .

Якщо формулу (2) переписати у вигляді

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t}{z^t} + \frac{b}{z^t} - \frac{p_i^t r_i^t}{z^t} - \frac{b r_i^t}{z^t},$$

то її доданки припускають таку інтерпретацію. А саме: перші два члени  $\frac{p_i^t}{z^t} + \frac{b}{z^t}$  можемо розуміти як надбання додаткової ресурсної енергії індивідом  $a_i$ , зокрема, завдяки впливу зовнішнього середовища, а  $-\frac{p_i^t r_i^t}{z^t} - \frac{b r_i^t}{z^t}$  як втрати за один крок конфліктної взаємодії з конкурентним оточенням, яке також має вплив зовнішнього середовища.

**2. Умови існування рівноважних станів.** Одна з основних задач нелінійної динаміки — пошук рівноважних станів, які відповідають нерухомим точкам (fixed points). Ця задача аналогічна пошуку власних векторів для операторів у лінійному аналізі.

Прямо з (2) випливає, що стохастичний вектор  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{1,+}^m$ , у якого всі координати однакові ( $q_i = q_k$ ,  $i, k \in \overline{1, m}$ , позначимо цей вектор  $\mathbf{q}^C := (1/m, \dots, 1/m)$ ), є нерухомим станом ДСК при довільному  $b$ . Цей стан ми називаємо тривіальним.

Для знаходження усіх інших векторів, координати яких є незмінними при перетворенні (2), перепишемо цю формулу в іншому вигляді. А саме, підставимо в (2) координати  $r_i = (1 - p_i)/(m - 1)$  вектора  $\mathbf{r}$ . Тоді, після спрощень, одержуємо систему рівнянь

$$p_i^{t+1} = \frac{(p_i^t + b)(p_i^t + m - 2)}{L^t + (m - 1)^2 b + m - 2}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де

$$L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2 = \sum_{k=1}^m p_k^t{}^2.$$

Неважко знайти умови постійності вектора з  $\mathbb{R}_{1,+}^m$  при відображенні (3). А саме: стохастичний вектор  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{1,+}^m$ ,  $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_m\}$ ,  $0 \leq q_i \leq 1$ , є нерухомою точкою (рівноважним станом) ДСК із відображенням (3) тоді й лише тоді, коли його координати задовольняють систему рівнянь

$$(q_i - q_k)[q_i q_k - (m - 2)b] = 0, \quad i, k = \overline{1, m} \quad \forall i, k. \quad (4)$$

Зрозуміло, що серед усіх рівнянь у системі (4) незалежні лише  $m - 1$ . Залишивши рівняння з  $i = 1$  та  $k = 2, \dots, m$ , одержуємо еквівалентну систему

$$(q_1 - q_k)[q_1 q_k - (m - 2)b] = 0, \quad k = \overline{2, m}, \quad q_1 + \dots + q_m = 1. \quad (5)$$

Відзначимо, що нерухомий вектор  $\mathbf{q}^C$  відповідає ситуації, коли в (5) усі перші множники дорівнюють нулю,  $q_1 = q_k$ . Тоді  $q_1 = \dots = q_m = 1/m$ .

**3. ДСК із парою опонентів,  $m = 2$ .** У випадку, коли стан ДСК описує вектор  $\mathbf{p}^t \in \mathbb{R}_{1,+}^2$  із двома координатами,  $\mathbf{p}^t = (p_1^t, p_2^t)$ , рівняння (3) набувають вигляду

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(p_i^t + b)}{z^t}, \quad z^t = (p_1^t)^2 + (p_2^t)^2 + b, \quad i = 1, 2.$$

Із цих рівнянь, розглядаючи співвідношення  $p_1^t/p_2^t$ , легко зрозуміти, що при будь-якому  $b > 0$  існують ті ж самі рівноважні стани, що й при  $b = 0$ . А саме: два асимптотично стійкі,  $\mathbf{q}_{1,0}^* = (1, 0)$ ,  $\mathbf{q}_{0,1}^* = (0, 1)$ , і один не стійкий,  $\mathbf{q}_{1/2,1/2}^* = (1/2, 1/2)$ . При цьому басейн притягання точки  $\mathbf{q}_{1,0}^*$  складається з усіх векторів  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  таких, що  $p_1 > p_2$ , а басейном  $\mathbf{q}_{0,1}^*$  є вектори  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  із  $p_1 < p_2$ .

Ситуація змінюється, якщо вплив середовища у кожного з опонентів є різним. Тоді рівняння динаміки мають вигляд

$$\begin{aligned} p_1^{t+1} &= \frac{p_1^t(p_1^t + b_1)}{z^t}, & p_2^{t+1} &= \frac{p_2^t(p_2^t + b_2)}{z^t}, \\ z^t &= (p_1^t)^2 + (p_2^t)^2 + b_1 p_1^t + b_2 p_2^t, & 0 < b_1, b_2 &\leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Нескладно переконатися у справедливості такого твердження.

**Твердження 1.** Для ДСК із двома опонентами, які згідно з рівняннями (6) мають різні зовнішні впливи, існують три рівноважні стани: один нестійкий

$$\mathbf{q}^* = (q_1, q_2), \quad q_1 = \frac{1 + b_2 - b_1}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - b_2 + b_1}{2}$$

та два стійкі

$$\mathbf{q}_{1,0}^* = (1, 0), \quad \mathbf{q}_{0,1}^* = (0, 1),$$

із басейнами притягання, які складаються з векторів  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  таких, що  $p_1 > p_2 + b_2 - b_1$ ,  $p_1 < p_2 + b_2 - b_1$ , відповідно.

Отже, якою б не була перевага одного з опонентів над другим у початковий момент часу, скажімо,  $p_1 > p_2$ , це не гарантує йому перемоги в конфлікті. Дійсно, згідно з твердженням 1 він зазнає поразки, якщо зовнішній вплив другого опонента задовольняє рівняння  $b_2 + p_2 > b_1 + p_1$ .

**4. Рівноважні стани системи з трьома гравцями.** Розглянемо детальніше опис нерухомих точок (рівноважних станів) ДСК із трьома альтернативними опонентами при наявності постійного зовнішнього впливу  $b > 0$ .

У випадку  $m = 3$  для знаходження незмінних векторів відображення  $T$  перепишемо формули (3) у вигляді системи трьох рівнянь

$$p_i^{t+1} = \frac{(p_i^t + b)(p_i^t + 1)}{1 + L^t + 4b}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

де

$$L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2 = \sum_{k=1}^3 p_k^{t^2}.$$

Тепер згідно з (5) для знаходження координат нерухомих векторів достатньо розглянути систему трьох рівнянь

$$(q_1 - q_2)(q_1 q_2 - b) = 0, \quad (q_1 - q_3)(q_1 q_3 - b) = 0, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Якщо  $q_1 - q_2 = 0$ ,  $q_1 - q_3 = 0$ , то, очевидно,  $q_2 = q_3$  й усі координати є однаковими. Зрозуміло, що відповідний вектор, який ми позначаємо  $\mathbf{q}^C = (1/3, 1/3, 1/3)$ , буде нерухомим при будь-якому  $b$  (тривіальний рівноважний стан).

Припустимо, що  $q_1 \neq q_2$ ,  $q_1 q_2 = b$ ,  $q_1 q_3 = b$ . Тоді знову  $q_2 = q_3$ , а з  $q_1 q_2 = b$ ,  $q_1 + 2q_2 = 1$  одержуємо квадратне рівняння для  $q_1$ :  $q_1^2 - q_1 + 2b = 0$ . Його розв'язки мають вигляд

$$q_{1,\pm} = \frac{1 \pm D}{2}, \quad D = D(b) := \sqrt{1 - 8b}.$$

При  $b > 1/8$  величина  $D(b)$  є уявною й відповідні розв'язки не мають сенсу для нашої задачі, тому ми їх не розглядаємо.

Коли ж  $b$  зростає від 0 до  $1/8$ , тоді величина  $D(b)$  спадає від 1 до 0. Виникає серія нерухомих векторів, які ми позначаємо  $\mathbf{q}_{1,\pm}^*$ , де індекс 1 означає, що  $q_2 = q_3$ . Аналогічні (симетричні) серії нерухомих векторів  $\mathbf{q}_{2,\pm}^*$  і  $\mathbf{q}_{3,\pm}^*$  виникають при умовах  $q_1 = q_3$  і  $q_1 = q_2$ , коли відповідно

$$q_{2,\pm} = \frac{1 \pm D}{2}, \quad q_{3,\pm} = \frac{1 \pm D}{2}.$$

Наступна теорема містить опис усіх нерухомих векторів і їхніх координат для різних значень параметра  $b$  у випадку системи з трьома гравцями.

**Теорема 1.** При всіх строго додатних значеннях параметра зовнішнього впливу,  $b > 0$ , у динамічній системі, заданої рівняннями (7), існують рівноважні стани, яким відповідають окрім  $\mathbf{q}^C$  нерухомі вектори  $\mathbf{q}_{i,\pm}^*$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , із простору  $\mathbb{R}_{1,+}^3$ . Їхня кількість, як і значення координат, залежать від величини параметра  $b$ .

А саме: при  $0 < b < 1/9$  і  $1/9 < b < 1/8$  існують сім нерухомих векторів

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^C, \mathbf{q}_{1,\pm}^* &= \left( \frac{1 \pm D}{2}, \frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \mp D}{4} \right), \\ \mathbf{q}_{2,\pm}^* &= \left( \frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \pm D}{2}, \frac{1 \mp D}{4} \right), \\ \mathbf{q}_{3,\pm}^* &= \left( \frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \pm D}{2} \right), \quad D = \sqrt{1 - 8b}. \end{aligned}$$

При  $b = 1/9$  динамічна система має чотири нерухомі точки: одну тривіальну

$$\mathbf{q}^C = \mathbf{q}_{i,-}^*, \quad i = \overline{1,3},$$

і три симетричні

$$\mathbf{q}_{1,+}^* = \{2/3, 1/6, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{2,+}^* = \{1/6, 2/3, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{3,+}^* = \{1/6, 1/6, 2/3\}.$$

При  $b = 1/8$  існують також чотири нерухомі точки

$$\mathbf{q}^C, \quad \mathbf{q}_1^* = \{1/2, 1/4, 1/4\}, \quad \mathbf{q}_2^* = \{1/4, 1/2, 1/4\}, \quad \mathbf{q}_3^* = \{1/4, 1/4, 1/2\},$$

де  $\mathbf{q}_i^* := \mathbf{q}_{i,+}^* = \mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,

Насамкінець, при  $b > 1/8$  система має єдину тривіальну нерухому точку  $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ .

**5. Питання стійкості рівноважних станів,  $m = 3$ .** Добре відомий метод дослідження стійкості рівноважних станів (див., наприклад, [25, 33, 34]) ґрунтується на обчисленні власних значень матриці Якобі перетворення, яке генерує динамічну систему в нерухомій точці. За означенням нерухома точка буде асимптотично стійкою, якщо модулі всіх власних значень матриці Якобі (позначимо їх  $\mu_i$ ), обчисленої в цій точці, менші за 1. Використовуємо цей метод для дослідження асимптотичної стійкості точок, які відповідають рівноважним станам, наведеним у теоремі 1.

Ця динамічна система генерується перетворенням (1), яке в термінах координат задається однією й тією ж функцією

$$f_i(p_1^t, p_2^t, p_3^t) = (p_i^t + b) \frac{1 + p_i^t}{1 + \sum_{k=1}^3 p_k^t + 4b}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Тому матриця Якобі має вигляд  $J = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$  з елементами, визначеними за похідними

$$a_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial p_i} = \frac{1}{z} \left[ (1 + p_i) + (p_i + b) \left( 1 - \frac{2p_i(1 + p_i)}{z} \right) \right],$$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j} = -\frac{2p_j(1 + p_i)(p_i + b)}{z^2},$$

де  $z = 1 + \sum_{k=1}^3 p_k^2 + 4b$ .

Підставляючи у формули для  $a_{ii}$ ,  $a_{ij}$  координати фіксованого нерухомого вектора  $\mathbf{q}^C$  або  $\mathbf{q}_{i,\pm}^*$  з теореми 1 з конкретним значенням параметра  $b$ , знаходимо явно елементи матриці Якобі. Для безпосереднього обчислення власних значень  $\mu_i$  матриці  $J$  ми використовували Scilab — пакет прикладних математичних програм (<https://en.wikipedia.org/wiki/Scilab>).

Так, для вектора  $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$  при значеннях  $b$  у границях  $1/9 < b \leq 1/8$ , а також  $b > 1/8$ , модулі всіх власних значень матриці  $J$  не перевищують 1,  $|\mu_i| < 1$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , що забезпечує стійкість відповідного стану.

Таким же способом переконаємося, що при  $b \in (0, 1/8)$  нерухомі точки  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , будуть асимптотично стійкими, а  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — нестійкими.

Значення параметрів  $b = 1/9$ ,  $b = 1/8$  є біфуркаційно критичними. В них істотно змінюється топологічний портрет системи. Так, при  $b = 1/8$  модуль одного з власних значень матриці  $J$  у точках, відповідних векторам  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ , дорівнює 1:

$$\mu_1 = 0,6, \quad \mu_2 = 0,8666667, \quad \mu_3 = 1.$$

Тому ці точки будуть нестійкими. При цьому ж значенні  $b$  точка  $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ , як вже зазначалося, буде асимптотично стійкою, тому що для неї всі  $|\mu_i| < 1$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

При  $b = 1/9$  симетричні відносно перестановок координат нерухомі точки  $\mathbf{q}_{1,+}^* = (2/3, 1/6, 1/6)$ ,  $\mathbf{q}_{2,+}^* = (1/6, 2/3, 1/6)$ ,  $\mathbf{q}_{3,+}^* = (1/6, 1/6, 2/3)$  є асимптотично стійкими. При тому  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , які збігаються з точкою  $\mathbf{q}^C$ , будуть нестійкими.

Сформулюємо ці факти у вигляді такої теореми.

**Теорема 2.** При кожному значенні параметра зовнішнього впливу в границях  $0 < b < 1/8$ , за виключенням  $b = 1/9$ , існує сім рівноважних станів:  $\mathbf{q}^C$ ,  $\mathbf{q}_{i,\pm}^*$ ,  $i \in \overline{1, 3}$ . При цьому три з них,  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ , є стійкими атрactorами з різними басейнами притягання. Інші три нерухомі

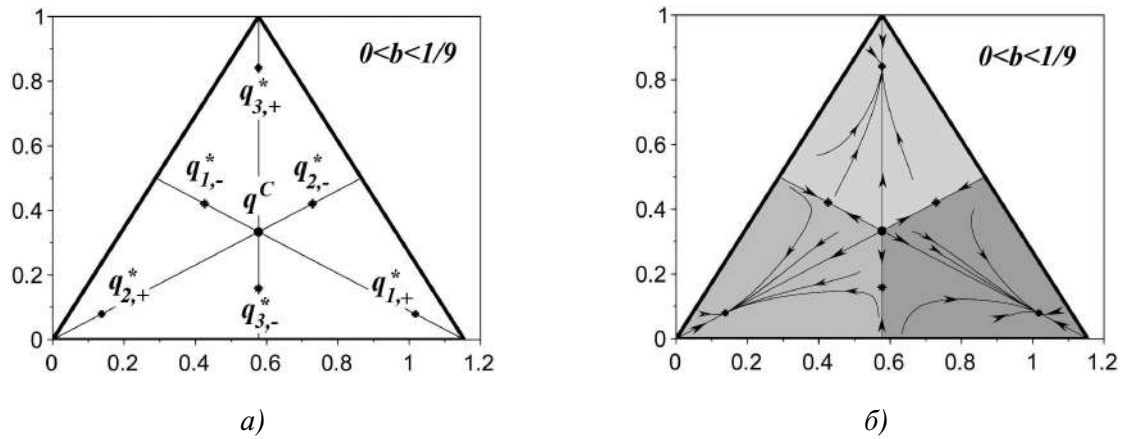


Рис. 1. (а) Розташування семи нерухомих точок у випадку, коли параметр зовнішнього впливу не перевищує першого біфуркаційного порогу,  $0 < b < 1/9$ ; (б) типова динаміка траєкторій на симетричних басейнах притягання.

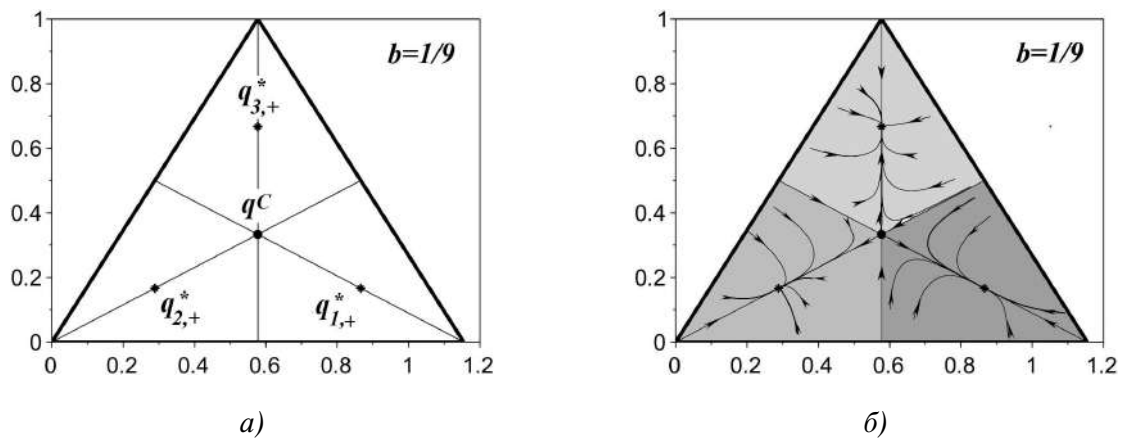


Рис. 2. Перший поріг біфуркації,  $b_1 = 1/9$ . (а) 3 рівноважні стани,  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i = \overline{1,3}$ , і  $\mathbf{q}^C$  стають тотожними; (б) поведінка траєкторій суттєво змінилась: у точки  $\mathbf{q}^C$  виникли басейни притягання у вигляді відрізків  $B_{\mathbf{q}_{i,-}^*}$  (див. (9)).

стани  $\mathbf{q}_{i,-}^*$  є нестійкими, переважно вони є репелерами, але в них є й нетривіальні басейни притягання (див. рис. 1–3).

Вектор  $\mathbf{q}^C$  при  $0 < b < 1/9$  є чистим репелером (абсолютно нестійким станом). У той час, як при  $b = 1/9$ , коли з ним ототожнюються три вектори  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ , у нього з'являється деякий басейн притягання (див. рис. 2).

Отже, при  $b = 1/9$  динамічна система має три стійкі рівноважні точки

$$\mathbf{q}_{1,+}^* = \{2/3, 1/6, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{2,+}^* = \{1/6, 2/3, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{3,+}^* = \{1/6, 1/6, 2/3\},$$

та одну нестійку:  $\mathbf{q}^C = \mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i \in \overline{1,3}$ .

При  $b = 1/8$  вектори  $\mathbf{q}_{i,+}^*$  і  $\mathbf{q}_{i,-}^*$  стають тотожними. Їм відповідають три нестійкі рівноважні стани, які позначено через  $\mathbf{q}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Вони розташовані на сепаратрисах, які поділяють простір  $\mathbb{R}_{+,1}^3$  на регіони притягання до  $\mathbf{q}_i$  та  $\mathbf{q}^C$  відповідно (див. рис. 4).

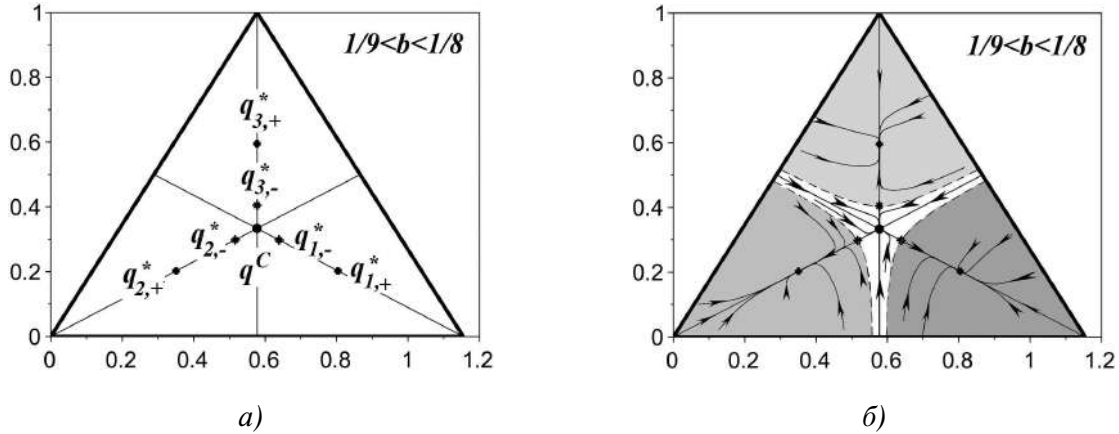


Рис. 3. (а) У кожному з рівноважних станів  $q_{i,+}^*$ ,  $q_{i,-}^*$ ,  $i = \overline{1,3}$ , є тільки одна найбільша координата  $q_{i,+}$ ,  $q_{i,-} > 1/3$ ; (б) окрім  $q_{i,+}^*$ , точка  $q^C$  стає аттрактором,  $q_{i,-}^*$  є повними репелерами.

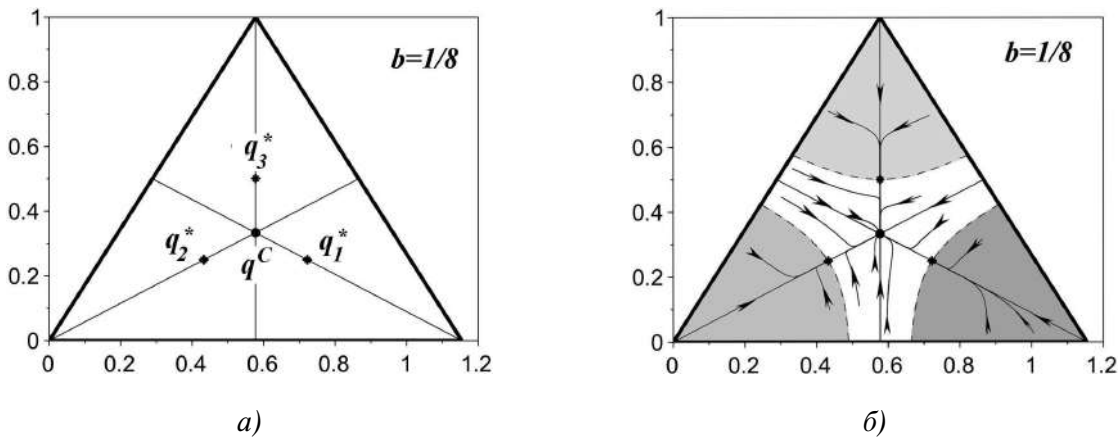


Рис. 4. Другий біфуркаційний поріг,  $b = b_2 = 1/8$ . (а) Рівноважні стани  $q_{i,+}^*$  і  $q_{i,-}^*$ ,  $i = \overline{1,3}$ , стають тотожними і позначенні через  $q_i^*$ ; (б) точка  $q^C$  залишається повним аттрактором, а рівноважні стани  $q_i^*$  є нестійкими і мають лише односторонні басейни притягання.

Далі, в усіх трьох випадках,  $1/9 < b < 1/8$ ,  $b = 1/8$ ,  $b > 1/8$ , вектор  $q^C$  є одноточковим аттрактором із різними басейнами притягання (див. рис. 3–5). При цьому при  $b > 1/8$  він залишається єдиним стійким рівноважним станом.

Із наведених фактів випливає, що значення параметра зовнішнього впливу  $b = b_1 = 1/9$  є першим біфуркаційним порогом. При цьому фазовий портрет змінюється таким чином. Центральний нерухомий стан, заданий вектором  $q^C$ , який був репелером при всіх  $b < 1/9$ , частково стає аттрактором, а при  $b > 1/9$  — повним аттрактором.

Більш того, при  $b_1 = 1/9$  чотири вектори стають тотожними,  $q^C(b = 1/9) = q_{i,-}^*(b = 1/9)$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , й утворюють один нестійкий стан. При  $b > 1/9$  вектори  $q^C(b > 1/9)$  і  $q_{i,-}^*(b > 1/9)$  знову розходяться:  $q^C(b > 1/9)$  стає аттрактором, а  $q_{i,-}^*(b > 1/9)$  продовжують зближатися:  $q_{i,+}^*(b > 1/9)$ .

Значення параметра  $b = b_2 = 1/8$  є другим біфуркаційним порогом. При ньому виникає лише чотири нерухомі точки. А саме: вектори  $q_{i,-}^*$  і  $q_{i,+}^*$  ототожнюються і



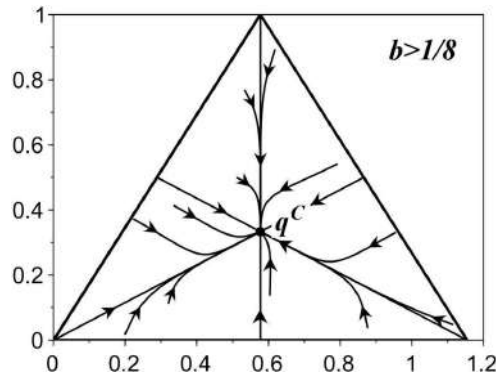


Рис. 5. При  $b > 1/8$  існує лише один стійкий рівноважний стан  $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$  з басейном притягання  $\mathbb{R}_{+,1}^3$ .

позначаються через  $\mathbf{q}_i$ , який має координати  $q_i = 1/2$ ,  $q_{k \neq i} = 1/4$ . Відповідні стани є односторонніми атракторами та односторонніми репелерами. При  $b > 1/8$  зазначені пари векторів взаємно “анігілюються”. Залишається лише один тривіальний рівноважний стан,  $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ , який є стійким атрактором із басейном притягання  $B^C(b > 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3$ .

**6. Опис басейнів притягання рівноважних станів для системи з трьома гравцями.** Питання про басейни притягання та зони відштовхування для рівноважних станів ДСК є одним із головних у теорії динамічних систем [33 – 35].

Для ДСК із трьома гравцями при постійному зовнішньому впливі  $0 < b$  існує п’ять режимів поведінки, що залежать від значення параметра  $b$ . Далі наведено детальний опис цих режимів.

**1.** При  $0 < b < 1/9$  існує сім рівноважних станів із характеристиками, описаними в такому твердженні.

**Твердження 2.** Три рівноважні стани  $\mathbf{q}_{i,+}^* = \mathbf{q}_{i,+}^*(0 < b < 1/9)$  є атракторами з басейнами притягання

$$B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(0 < b < 1/9) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i > p_k, k \neq i\}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (8)$$

При цьому  $i$ -й гравець досягає найвищого статусу в границях  $2/3 < q_{i,+} < 1$ , а його конкуренти стають рівними,  $q_{k,+} = q_{k',+}$ ,  $i \neq k, k'$ , у границях  $0 < q_{k,+} = q_{k',+} < 1/6$ . Вектори  $\mathbf{q}_{i,-}^* = \mathbf{q}_{i,-}^*(0 < b < 1/9)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , переважно є репелерами, але мають деякі басейни притягання у вигляді напіввідкритих відрізків:

$$B_{\mathbf{q}_{i,-}^*}(0 < b < 1/9) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i \in [0, 1/3), p_k = p_{k'}, k, k' \neq i\}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9)$$

Рівноважний стан  $\mathbf{q}^C$  є повним одноточковим репелером (див. рис. 1).

**Доведення.** Для доведення (8) зафіксуємо  $i$ , наприклад, покладемо  $i = 3$ , і припустимо, що початкові координати впорядковані:  $p_1 \leq p_2 < p_3$  або  $p_2 \leq p_1 < p_3$ . Зрозуміло, що цей порядок буде зберігатися зі зростанням  $t$ . Далі розглянемо лише перший варіант упорядкування і припустимо спочатку, що  $p_1 = p_2 < p_3$ . Тоді, аналізуючи різницю

$$d_{32}^{t+1} := p_3^{t+1} - p_2^{t+1} = (p_3^t - p_2^t) \frac{1 + p_3^t + p_2^t + b}{1 + L^t + 4b},$$

переконаємося, що  $p_3^t$  буде зростати чи спадати, залежно від розташування початкової координати  $p_3$ , під чи над значенням  $q_{3,+}$  (див. рис. 1). А саме, збільшення  $d_{32}^t = d_{31}^t$  має доводити зростання  $p_3^t$  до  $q_{3,+}$ , а зменшення  $d_{32}^t$ , відповідно, спад  $p_3^t$  до  $q_{3,+}$ . Зрозуміло, що поведінка  $d_{32}^t$  залежить від знака нерівності:

$$p_3^t + p_2^t \geq L^t + 3b.$$

Позначимо  $p_3^t$  через  $x$ . Тоді  $p_2^t = 1/2(1 - x)$  й остання нерівність набуває такого вигляду:

$$x^2 - x + 2b \leq 0.$$

Оскільки коренями рівняння  $x^2 - x + 2b = 0$  є як раз координати  $q_{3,+}$  і  $q_{3,-}$ , то для всіх  $x > q_{3,+}$  виконується  $x^2 - x + 2b > 0$ , тобто  $p_3^t + p_2^t < L^t + 3b$ , що означає зменшення  $d_{32}^t$  і збіжність зверху  $p_3^t$  до  $q_{3,+}$ . Навпаки, якщо  $1/3 < x < q_{3,+}$ , то  $x^2 - x + 2b < 0$ , тобто  $p_3^t + p_2^t > L^t + 3b$ , що означає збільшення різниці  $d_{32}^t$  і доводить збіжність знизу  $p_3^t$  до  $q_{3,+}$ .

Аналогічні міркування, як неважко переконатися, справедливі й для випадку  $p_1 \neq p_2$ , тобто коли  $p_1 < p_2 < p_3$ . Тоді для всіх точок  $\mathbf{p}$  таких, що  $1/3 < p_3 < q_{3,+}$ , будуть виконуватися нерівності  $p_3^t + p_2^t > L^t + 3b$ , тому що на кожному кроці їх можна записати у вигляді  $p_3^t + (1 - p_3^t)/2 + \delta > L_\delta^t + 3b$ ,  $0 < \delta < 1/3$ , і скористатися вже встановленою нерівністю при  $p_1 = p_2$ , оскільки  $L_\delta^t = L^t + 2\delta^2$ , де, очевидно,  $\delta > 2\delta^2$ , а  $L^t$  має те ж саме значення, що й при  $p_1 = p_2$ . Тому і в цьому випадку  $d_{32}^t$  збільшується з часом. Це означає зменшення координати  $p_2^t$ , зростання  $p_3^t$  і збіжність  $\mathbf{p}^t$  до  $\mathbf{q}_{3,+}^*$ . Подібним чином проводиться доведення збіжності  $\mathbf{p}^t$  до  $\mathbf{q}_{3,+}^*$  у випадку  $q_{3,+} < p_3 \leq 1$ .

Із доведених фактів зокрема впливає, що три рівноважні стани  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , із координатами  $0 < q_{i,-} < 1/3$ ,  $1/3 < q_{k \neq i} = q_{k' \neq i} < 1/2$ , які розташовані на відкритих відрізках, описаних у (9), є репелерами для всіх точок фазового трикутника, окрім точок із цих відрізків. А для доведення справедливості (9) достатньо провести міркування, аналогічні проведеним вище, лише для випадку, коли  $p_3 < p_1 = p_2$ .

Те, що вектор  $\mathbf{q}^C$  — односточковий репелер, є логічним висновком із усіх попередніх фактів. Це також підтверджується обчисленням власних значень матриці Якобі (див. теорему (2)).

**2.** Значення параметра  $b = 1/9$  є першим біфуркаційним порогом, позначимо його через  $b_1$ . Із семи попередніх рівноважних станів, коли  $b < 1/9$ , залишається лише чотири (див. рис. 2). Три з них, які відповідають векторам  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ , є стійкими атракторами. Їхні басейни притягання ті ж, що й у попередньому режимі поведінки:

$$B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(b_1 = 1/9) = B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(0 < b < 1/9).$$

Три вектори  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , стають тотожними й збігаються з центральною рівноважною точкою, тобто  $\mathbf{q}^C = \mathbf{q}_{i,-}^*$ , яка є репелером у всіх напрямках за виключенням трьох відрізків  $[p_i, p_k = p_{k'}]$ ,  $0 \leq p_i < 1/3$ ,  $k, k' \neq i$ . На цих відрізках точка  $\mathbf{q}^C$  є атрактором.

**Твердження 3.** При  $b_1 = 1/9$  існують чотири рівноважні стани: три з них,  $\mathbf{q}_{i,+}^*(b = 1/9)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , з координатами  $q_{i,+} = 2/3$ ,  $q_{k,+} = 1/6$ ,  $k \neq i$ , є атракторами з басейнами притягання вигляду (8), а четвертий стан, який відповідає векторам  $\mathbf{q}^C = \mathbf{q}_{i,-}^*(b = 1/9)$ , є нестійким (див. рис. 2). Він є репелером у всіх напрямках, окрім множини (басейну притягання) у вигляді об'єднання трьох відрізків вигляду (9):

$$B_{\mathbf{q}^C}(b_1 = 1/9) = \bigcup_{i=1}^3 B_{\mathbf{q}_{i,-}^*}(0 < b < 1/9) = \bigcup_{i=1}^3 \mathbb{R}_{+,1}^3 \setminus B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(0 < b \leq 1/9). \quad (10)$$

**Доведення.** Треба встановити лише справедливність (10), тобто те, що координата  $p_i^t$  на зазначених відрізках завжди зростає. Для цього достатньо показати, що для  $p_i < 1/3$  виконується нерівність  $p_i^{t=1} - p_i > 0$ . Згідно з (7) ця нерівність еквівалентна такій (де ми перепозначили  $p_i \equiv p$ ):

$$I(p, b) := p^2 + p + pb + b - p(1 + L + 4b) > 0,$$

де  $L = 3/2p^2 - p + 1/2$ . Після підстановки  $b = 1/9$  отримуємо

$$I(p, 1/9) = -3/2p^3 + 2p^2 - 5/6p + 1/3.$$

Тепер безпосередньо переконуємося, що для всіх  $p < 1/3$ ,  $I(p, 1/9) > 0$ .

Зазначимо, що  $I(p, 1/9) > 0$  і при  $1/3 < p < 2/3$ . Тому й у цьому випадку координати  $p_i^t$  зростають. Але якщо  $2/3 < p < 1$ , то  $I(p, 1/9) < 0$ . Тоді ці ж координати будуть спадати, адже точки  $\mathbf{q}_{i,+}^*$  є атрactorами. Звичайно  $I(1/3, 1/9) = 0 = I(2/3, 1/9)$ , оскільки точки  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ ,  $\mathbf{q}^C$  є нерухомими.

**3.** При  $1/9 < b < 1/8$  знову виникає сім'я рівноважних станів (див. рис. 3). Вектори  $\mathbf{q}_{i,+}^* = \mathbf{q}_{i,+}^*(1/9 < b < 1/8)$  продовжують бути атрactorами, але їхні басейни притягання зменшуються. Центральна точка  $\mathbf{q}^C(1/9 < b < 1/8)$  стає повним атрactorом із басейном притягання, відділеним трьома кривими лініями (сепаратрисами) від басейнів трьох точок  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ . Нерухомі точки  $\mathbf{q}_{i,-}^*(1/9 < b < 1/8)$  розташовані на цих сепаратрисах. Поведінка траєкторій ДСК у цьому випадку визначається твердженням, у якому, без зменшення загальності, покладається  $i = 3$ .

**Твердження 4.** Якщо  $p_1 \leq p_2 < p_3$  або  $p_2 \leq p_1 < p_3$ , то при всіх  $b > 1/9$  маємо

$$|p_2^t - p_1^t| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

**Доведення.** Достатньо розглянути випадок  $p_1 < p_2 < p_3$ . При всіх  $1/9 \geq b > 0$  одержуємо

$$p_2^{t+1} - p_1^{t+1} = (p_2 - p_1) \prod_{\tau=1}^t k_{1,2}^\tau, \quad k_{1,2}^\tau := \frac{1 + p_1^\tau + p_2^\tau + b}{1 + L^\tau + 4b}, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

де  $L^t > 1/3$ . Оскільки  $b > 1/9$ , то, записуючи  $b = 1/9 + \delta/3$  з деяким  $\delta > 0$  і використовуючи (11), можемо стверджувати, що

$$L^t + 3b > 2/3 + \delta \quad \forall t.$$

Враховуючи, що  $p_1^t + p_2^t < 2/3$ , тому що  $p_3^t > 1/3$ , знаходимо, що всі  $k_{1,2}^\tau < 1 - \delta'$ , де  $0 < \delta' < \delta$ . Тому  $\prod_{\tau=1}^t k_{1,2}^\tau \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Отже,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} p_2^t,$$

що й закінчує доведення.

**4.** Другий поріг біфуркаційної поведінки ДСК із трьома гравцями виникає при значенні параметра зовнішнього впливу  $b = b_2 = 1/8$  (див. рис. 4).

**Твердження 5.** При  $b = b_2 = 1/8$  залишаються чотири рівноважні стани: центральний,  $\mathbf{q}^C(b = 1/8)$ , і три симетричних,  $\mathbf{q}_i^* := \mathbf{q}_{i,+}^*(b = 1/8) = \mathbf{q}_{i,-}^*(b = 1/8)$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , з координатами  $q_i = 1/2$ ,  $q_{k \neq i} = q_{k' \neq i} = 1/4$ . При цьому  $\mathbf{q}^C$  є стійким односточковим атрактором, а  $\mathbf{q}_i^*$  є атракторами лише зі сторони більшої координати та репелерами з протилежної сторони. Простір  $\mathbb{R}_{+,1}^3$  ділиться на чотири басейни притягання:  $B_{\mathbf{q}^C}$  і  $B_{\mathbf{q}_i^*}$ , де

$$B_{\mathbf{q}^C} = B_{\mathbf{q}^C}(b = 1/8) := \bigcup_i^3 \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_k, p_{k'} < p_i, k, k' \neq i, p_i^t \rightarrow 1/3, t \rightarrow \infty \},$$

а

$$B_{\mathbf{q}_i^*} = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i > 1/2 + \varepsilon_2(p_k, p_{k'}) \} \quad (12)$$

з функцією сепаратриси  $0 \leq \varepsilon_2(p_k, p_{k'}) < 1/2$ .

**Доведення.** Покажемо, що кожна точка  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{1,+}^3$  належить одному із зазначених басейнів притягання. Це випливає з того, що для довільної точки  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{1,+}^3 \setminus \mathbf{q}^C$  її найбільша координата або нерухома, або спадає зі зростанням  $t$ . Припустимо, не зменшуючи загальності, що для початкового вектора його координати впорядковані,  $p_1 \leq p_2 < p_3$ . Тоді треба переконатися, що  $p_3^{t+1} - p_3^t < 0$  для всіх  $t$ . Дійсно, згідно з (7) одержуємо

$$p_3^{t+1} - p_3^t = 1/z^t \left[ p_3^{t^2} + b(1 + p_3^t) - p_3^t(L^t + 4b) \right],$$

де  $z^t = 1 + L^t + 4b$ . Покажемо, що чисельник у останньому виразі завжди від'ємний. Із цією метою введемо позначення

$$\varepsilon^t := p_2^t - p_1^t.$$

Тоді з рівності  $1 = p_1^t + p_2^t + p_3^t$  випливає справедливність зображень

$$p_1^t = 1/2(1 - p_3^t - \varepsilon^t), \quad p_2^t = 1/2(1 - p_3^t + \varepsilon^t),$$

а також

$$L^t = 3/2(p_3^t)^2 - p_3^t + 1/2 + \frac{(\varepsilon^t)^2}{2}. \quad (13)$$

Використовуючи (13), маємо

$$\begin{aligned} (p_3^t)^2 + b(1 + p_3^t) - p_3^t(L^t + 4b) &= \\ &= p_3^{t^2} + b(1 + p_3^t) - p_3^t \left( 3/2 p_3^{t^2} - p_3^t + 1/2 + \varepsilon^{t^2}/2 + 4b \right). \end{aligned}$$

Підставляючи  $b = 1/8$ , знаходимо

$$\begin{aligned} (p_3^t)^2 + 1/8 + p_3^t/8 - p_3^t(L^t + 1/2) &= \\ &= -3/2 p_3^{t^3} + 2 p_3^{t^2} - 7/8 p_3^t + 1/8 - (\varepsilon^t)^2/2 p_3^t = \\ &= -(p_3 - 1/2)^3 - 1/2 p_3 (p_3 - 1/2)^2 - \frac{\varepsilon^{t^2}}{2} p_3^t = \end{aligned}$$

$$= -(p_3 - 1/2)^2(3/2p_3 - 1/2) - \frac{\varepsilon^{t^2}}{2}p_3^t < 0,$$

оскільки зрозуміло, що  $p_3^t > 1/3$ . Це доводить спадання найбільшої координати (у цьому випадку це  $p_3^t$ ) при  $b = 1/8$ .

При цьому якщо  $p_1 \leq p_2 < p_3 \leq 1/2$ , то з необхідністю  $\mathbf{p}^t \rightarrow \mathbf{q}^C$ . Щоб це довести, достатньо переконатися, що різниця  $p_3^t - p_1^t$  збігається до нуля. Тобто, що

$$p_3^{t+1} - p_1^{t+1} = (p_3 - p_1) \prod_{\tau=1}^t \frac{1 + p_1^\tau + p_3^\tau + 1/8}{1 + L^\tau + 1/2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Це справджується, оскільки  $k_{1,3}^\tau = \frac{1 + p_1^\tau + p_3^\tau + 1/8}{1 + L^\tau + 1/2} < 1 - \delta'$  для деякого  $\delta' > 0$ . Останнє випливає з того, що

$$p_1^\tau + p_3^\tau - L^\tau - 3/8 = 1/2p_3^\tau + 1/8 - L^\tau - \varepsilon^\tau/2 < -\delta' - \varepsilon^\tau/2 < 0,$$

де ми використали введені вище зображення  $p_1^\tau = 1/2(1 - p_3^\tau - \varepsilon^\tau)$ ,  $p_3^\tau = 1/2 - \delta^\tau$ ,  $0 < \delta^\tau < \delta < 1/6$ , а також той факт, що величина  $-L^\tau$  набуває мінімального значення, коли  $p_1^\tau = 1/4$ ,  $p_2^\tau = 1/4 + \delta^\tau$ . Враховуючи тепер твердження 4, робимо висновок, що різниця між усіма трьома координатами прямує до 0.

Отже,  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1/3$ ,  $i \in \overline{1,3}$ . Тому  $\mathbf{p}^t \rightarrow \mathbf{q}^C$ .

Насправді,  $\mathbf{p}^t \rightarrow \mathbf{q}^C$  і для деяких векторів, у яких координата  $p_3 = 1/2 + \varepsilon_2$ , де функція  $\varepsilon_2(p_1, p_2)$  певним чином залежить від  $p_1, p_2$ . Зокрема, якщо  $p_1 = 0$ , то, як легко переконатися безпосередньо, при  $p_2 = 1/34$  вже на першому кроці координата  $p_3^1 = 1/2$ . Тому траєкторія з цієї початкової точки буде збігатися до  $\mathbf{q}^C$ . Знайти залежність  $\varepsilon_2(p_1, p_2)$  від  $p_1, p_2$  не так просто. Фактично ця залежність визначає сепаратрису, яка поділяє басейни притягання нерухомих точок  $\mathbf{q}_{i=3}^*$  і  $\mathbf{q}^C$ . Зрозуміло, що траєкторія  $\mathbf{p}^t$  буде збігатися до точки  $\mathbf{q}_3^*$ , лише якщо початкова координата  $p_3 > 1/2 + \varepsilon_2(p_1, p_2)$ .

**5.** При  $b > 1/8$  всі траєкторії ДСК з  $m = 3$ , які починаються з довільної точки  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3$ , збігаються до єдиного рівноважного стану  $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$  (див. рис. 5). Це випливає з наступного твердження.

**Твердження 6.** При  $b > 1/8$  три координати  $p_i^t$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , мають однакові границі:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = p_i^\infty = 1/3.$$

**Доведення.** Достатньо показати, що границі між усіма координатами збігаються до нуля. Не зменшуючи загальності, покладаємо, що  $p_1 \leq p_2 < p_3$ . Тоді треба довести, що  $p_3^t - p_1^t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Згідно з (7)

$$p_3^t - p_1^t = (p_3 - p_1) \prod_{\tau=1}^{t-1} k_{1,3}^\tau, \quad k_{1,3}^\tau = \frac{1 + p_1^\tau + p_3^\tau + b}{1 + L^\tau + 4b}.$$

Покажемо, що для всіх  $\tau$  виконуються строгі нерівності  $L^\tau + 3b > p_1^\tau + p_3^\tau$ . Більш того,

$$L^\tau - p_1^\tau - p_3^\tau + 3b > \delta, \quad \delta > 0 \quad \forall \tau.$$

Щоб це довести, скористаємося справедливістю зображень, які випливають з рівності  $1 = p_1^\tau + p_2^\tau + p_3^\tau$ :

$$p_1^\tau = 1/2(1 - p_3^\tau - \varepsilon^\tau), \quad p_2^\tau = 1/2(1 - p_3^\tau + \varepsilon^\tau),$$

$$L^\tau = 3/2(p_3^\tau)^2 - p_3^\tau + 1/2 + \frac{(\varepsilon^\tau)^2}{2},$$

де введено позначення  $\varepsilon^\tau := p_2^\tau - p_1^\tau$ . Тоді одержуємо

$$L^\tau - p_1^\tau - p_2^\tau + 3b = 3/2(p_3^\tau)^2 - 3/2p_3^\tau + (\varepsilon^\tau)^2/2 + \varepsilon^\tau/2 + 3b.$$

Підставляючи  $b = 1/8 + \delta/3$  з довільним  $\delta > 0$ , одержуємо, що дійсно

$$L^\tau - p_1^\tau - p_2^\tau + 3b = 3/2(p_3^\tau - 1/4)^2 + (\varepsilon^\tau)^2/2 + \varepsilon^\tau/2 > \delta.$$

Звідси випливає, що завжди  $k_{1,3}^\tau < 1 - \delta'$ ,  $0 < \delta' < \delta$ . Тому  $\prod_{\tau=1}^{t-1} k_{1,3}^\tau \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$ . Отже, границі векторів  $p_1^t \in p_3^t$  однаковими, тому завдяки  $p_1 \leq p_2 < p_3$  робимо висновок, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_i^t = 1/3, \quad i \in \overline{1,3}.$$

Об'єднуючи всі попередні результати, сформулюємо таку теорему.

**Теорема 3.** Залежно від значення параметра зовнішнього впливу  $b > 0$  поведінка ДСК із трьома гравцями демонструє такі  $n$ 'ять режимів:

1. При  $0 < b < 1/9$  нерухомі точки  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , є односточковими атракторами з басейнами притягання вигляду (8). Стани, яким відповідають вектори  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ , є реперелерами лише частково, тому що мають басейни притягання у вигляді напіввідкритих відрізків вигляду (9). Центральний рівноважний стан  $\mathbf{q}^C$  є повним реперелером (див. рис. 1).

2. Значення  $b = b_1 = 1/9$  є першим біфуркаційним порогом. Чотири вектори  $\mathbf{q}^C$ ,  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , стають тотожними й утворюють один нестійкий рівноважний стан, який переважно є реперелером, але має басейн притягання у вигляді об'єднання трьох множин (10). Точки  $\mathbf{q}_{i,+}^*$  залишаються стійкими атракторами з попередніми басейнами притягання вигляду (8) (див. рис. 2).

3. При значеннях параметра зовнішнього впливу в границях  $1/9 < b < 1/8$  існує знову сім рівноважних станів  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ ,  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , і  $\mathbf{q}^C$  (див. рис. 3). При цьому, басейни притягання векторів  $\mathbf{q}_{i,+}^*$  звужуються:

$$B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(1/9 < b < 1/8) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i > q_{i,-} + \varepsilon_1(p_k, p_{k'}), k, k' \neq i\},$$

тут функція  $\varepsilon_1(p_k, p_{k'})$  задає сепаратриси між басейнами притягання точок  $\mathbf{q}_{i,+}^*$  і  $\mathbf{q}^C$ . Вектори  $\mathbf{q}_{i,-}^*$  стають повними реперелерами. Вектор  $\mathbf{q}^C$  перетворюється на односточковий атрактор із нетривіальним басейном притягання:

$$B_{\mathbf{q}^C}(1/9 < b < 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(1/9 < b < 1/8).$$

4. Значення параметра  $b = b_2 = 1/8$  є другим біфуркаційним порогом. Із попередніх семи нерухомих точок залишаються лише чотири:  $\mathbf{q}^C$  і  $\mathbf{q}_i^* := \mathbf{q}_{i,+}^*(b = 1/8) = \mathbf{q}_{i,-}^*(b = 1/8)$ ,  $i \in \overline{1,3}$ , з координатами  $q_i = 1/2, q_k = q_{k'} = 1/4$  (див. рис. 4). При цьому точки  $\mathbf{q}_i^*$  є нестійкими (односторонніми) атракторами з басейнами притягання вигляду (12), а точка  $\mathbf{q}^C(b = 1/8)$  є асимптотично стійким атрактором із басейном вигляду

$$B_{\mathbf{q}^C}(b = 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_{\mathbf{q}_i^*}.$$

5. При  $b > 1/8$  існує лише один рівноважний стан заданий вектором  $\mathbf{q}^C(b > 1/8) = \{1/3, 1/3, 1/3\}$  (див. рис. 5). Він є стійким атрактором із басейном притягання, який складається з множини всіх стохастичних векторів

$$B_{\mathbf{q}^C}(b > 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3.$$

**7. Якісний аналіз результатів.** Із погляду можливих застосувань наведені вище математичні результати про поведінку ДСК із різними значеннями величини зовнішнього впливу потребують якісного аналізу.

Фактично ми досліджуємо ДСК, у яких проявляється зіткнення двох протилежних тенденцій: відштовхування між індивідами як прояв конкурентної боротьби, та притягання, обумовлене зовнішнім надходженням, яке можна інтерпретувати як постійний прибуток, що нівелює переваги гравців. Математично ці тенденції задають різні різнищеві рівняння:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{z^t} \quad (14)$$

і

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t + b}{z^t}, \quad b > 0, \quad (15)$$

об'єднані в одну формулу (2), яка при  $m = 3$  набуває вигляду (7). Відзначимо, що у загальному випадку, коли кількість гравців  $m$  довільна, ДСК із взаємодією (7) неминуче розпадається на дві частини, аналогічні тим, які досліджуються в роботі [35]. При цьому рівноважні стани (нерухомі точки) для динамік, заданих формулами (14) і (15), мають різний зміст.

Так, у випадку конфліктної взаємодії чистого відштовхування (формула (14)) типовим результатом є збіжність траєкторій ДСК до стійкого нерухомого стану вигляду  $(0, 0, 1)$  із однією ненульовою координатою. Перемагає єдиний гравець із найбільшим початковим статусом. При цьому пара інших гравців програють повністю, тобто  $p_k^t \rightarrow 0, k \neq 3, t \rightarrow \infty$  (відповідна теорія і модельні приклади розвинено в [16], див. також [17]).

Навпаки, якщо динаміка залежить лише від додатного зовнішнього впливу (формула (15)), то неважко показати, що для будь-якої початкової точки  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3$  траєкторія ДСК збігається до стійкого рівноважного стану, заданого центральним вектором  $\mathbf{q}^C = (1/3, 1/3, 1/3)$ , тобто  $p_i^t \rightarrow 1/3 \forall i \in \overline{1,3}, t \rightarrow \infty$ . Цей результат має просту наочну інтерпретацію: постійне зовнішнє надходження без конкурентної боротьби вирівнює стартові переваги гравців.

У формулах (2), (7) ці дві протилежні тенденції стають суперечливими, динаміку вирівнювання переваг, обумовлену постійним "прибутком" за формулою (15), заперечує процес

зростання координат із більшими початковими значеннями й одночасним спаданням координат із меншими початковими значеннями згідно з формулою (14) (детальніше про таку поведінку для довільної кількості координат див. [1, 4–6]).

Чи можливий компроміс між цими тенденціями? Одержані вище результати показують, що рівноважні стани існують і в такій ситуації, але їхня кількість і характеристики стійкості (зокрема, її повної відсутності) суттєво залежать від величини параметра зовнішнього впливу  $b$ .

У цій роботі показано, що для динамічних систем із трьома гравцями виникають стійкі рівноважні стани двох типів. При відносно невеликих зовнішніх впливах  $0 < b < 1/8$  це стани  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ , коли стартову перевагу має лише один гравець, і стан  $\mathbf{q}^C$ , який є стійким атрактором при достатньо великих значеннях параметра  $b > 1/9$ . Точніше, стани  $\mathbf{q}_{i,+}^*$  є стійкими в режимах **1** та **2** при  $0 < b \leq 1/9$ , коли  $q_{k,+}, q_{k',+} < 1/3 < q_{i,+} \leq 1$ , і в режимі **3** при  $1/9 < b < 1/8$ , коли  $q_{k,+}, q_{k',+} < 1/2 < q_{i,+} \leq 1$ . А стан  $\mathbf{q}^C$  є стійким в усіх режимах окрім перших двох, коли вплив відносно малий.

Інші рівноважні стани, позначені через  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ , завжди є нестійкими. Для них у перших двох режимах виконуються нерівності  $q_{i,-} < 1/3 \leq q_{k,-} + q_{k',-}$  і  $q_{i,-} < 1/2 \leq q_{k,-} + q_{k',-}$ . З цього випливає, що сумарна стартова перевага двох рівних гравців унеможливує стійкість рівноважного стану. При найменшому збуренні така рівновага швидко порушується і траєкторія збігається до стану, в якому перевагу має лише один із гравців, або до стану, коли всі рівні. Такий природний принцип конфліктної динаміки — перевага двох рівних є нестійкою.

Варто зауважити, що окрім виявлених двох біфуркаційних порогів параметра зовнішнього впливу  $b_1 = 1/9$  і  $b_2 = 1/8$  його нульове значення,  $b = 0$ , також можна вважати біфуркаційним порогом. Адже при переході від ДСК, генерованих рівняннями (14), до динаміки з будь-якими ненульовими  $b$  однокочкові атрактори типу  $(0, 0, 1)$  (вершини фазового трикутника) зникають, точніше, вони зсуваються в точки вигляду  $\mathbf{q}_{i,+}^*$ , у яких усі координати є ненульовими. Звичайно, і в цьому стані істотну перевагу має лише один гравець,  $q_{i,+} \geq 2/3$ , але він не є абсолютним переможцем, тому що обидва інші гравці виживають,  $q_{k,+} = q_{k',+} > 0$ . Окрім цього, з'являється можливість поділити ресурс за іншим правилом, що відповідає точкам  $\mathbf{q}_{i,-}^*$ . При цьому з'являється один гравець, який програє,  $q_{i,+} \leq 1/3$ , і двоє, які перемагають у сумі,  $q_{k,+} + q_{k',+} \geq 2/3$ , при умові, що вони рівні. Такий стан дуже нестійкий, порушення рівності  $q_{k,+} = q_{k',+}$  неминуче веде до одноосібної переваги одного з них.

Центральний рівноважний стан  $\mathbf{q}^C$  є нестійким репелером при всіх  $0 \leq b < 1/9$ . Але при пороговому біфуркаційному значенні,  $b_1 = 1/9$ , цей стан починає притягувати траєкторії, які стартують із точок із рівними координатами, наприклад,  $p_1 = p_2$ , при додатковій умові, що ці координати в сумі мають істотну перевагу над третім гравцем:  $p_1 + p_2 > 2/3$ ,  $p_3 < 1/3$ . А при  $b > 1/9$  ця властивість стану  $\mathbf{q}^C$  різко посилюється, він повністю стає атрактором із нетривіальним басейном, який збільшується при зростанні параметра  $b$ . І вже при  $b > 1/8$  цей стан залишається єдиним рівноважним. Цей факт припускає таку інтерпретацію: конкуренція між опонентами втрачає сенс при достатньо великому прибутку.

Існує ряд інших цікавих ефектів, породжених зіткненням двох протилежних тенденцій у об'єднаній взаємодії відштовхування та притягання, які неможливо відобразити формулами, але вони проявляються при комп'ютерному моделюванні.



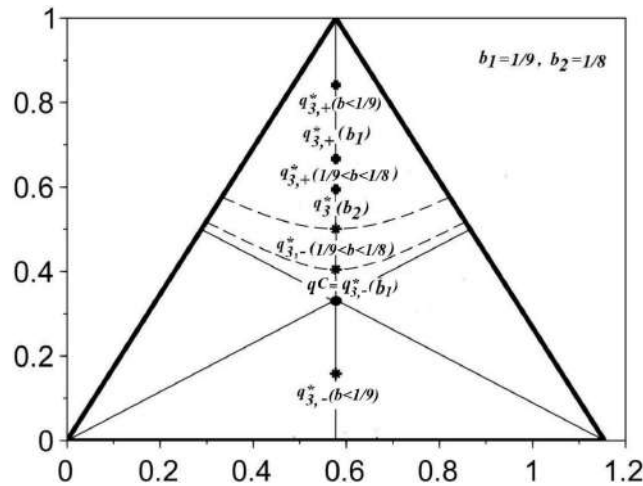


Рис. 6. При усіх значеннях  $0 < b < 1/8$  кожному стійкому рівноважному стану  $q_{3,+}^*(b)$  з координатами  $0 < q_{1,+} + q_{2,+} < 1/2 < q_{3,+}$  відповідає симетрично розташований нестійкий рівноважний стан  $q_{3,-}^*$  з координатами  $0 < q_{3,-} < 1/2 < q_{1,-} + q_{2,-}$ . Зокрема, при  $b = b_1 = 1/9$  стану  $q_{3,+}^*$  з координатою  $q_{3,+} = 2/3$  симетрично відповідає стан  $q_{3,-}^* = q^C$  з  $q_{3,-} = 1/3$ , а при  $b = b_2 = 1/8$  координати  $q_{3,+} = q_{3,-} = 1/2$  і стани  $q_{3,+}^*$  та  $q_{3,-}^*$  ототожнюються з  $q_{3,+}^*(b_2)$ .

Нарешті відзначимо, динамічна система, задана рівняннями (7), є симетричною відносно перестановок координат, оскільки параметр  $b$  є незалежним від координат. Тому аналіз властивостей рівноважних станів систематично зводили до ситуації, коли координати початкової точки впорядковані:  $p_1 \leq p_2 < p_3$  або  $p_2 \leq p_1 \leq p_3$ . Якщо обмежитися лише цим випадком (див. рис. 6), то можна виявити ще одну геометричну симетрію розташування рівноважних станів  $q_{i,+}^*$  і  $q_{i,-}^*$  відносно значення  $1/2$  при зміні параметра  $b$ . Звичайно, виявлені симетрії будуть втрачені, якщо  $b$  замінити на  $b_i$ , тобто коли у гравців зовнішні впливи будуть різними. Зрозуміло, що в такому випадку аналіз рівноважних станів стає значно складнішою задачею, хоча саме такого типу моделі є більш реальними у застосуваннях. І ще більш складні задачі виникають, якщо параметр зовнішнього впливу стає залежним від часу, наприклад, періодично, як це відбувається в моделях, близьких чи подібних до систем фазових осциляторів або нейронних мереж [36–38].

### Література

1. В. Д. Кошманенко, *Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів*, Укр. мат. журн., **55**, № 4, 555–560 (2003); **English translation:** Ukr. Math. J., **55**, № 4, 671–678 (2003).
2. В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко, *Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір*, Укр. мат. журн., **56**, № 7, 927–938 (2004); **English translation:** Ukr. Math. J., **56**, № 7, 1102–1116 (2004).
3. V. Koshmanenko, N. Kharchenko, *Spectral properties of image measures after conflict interactions*, Theory Stoch. Process, **10**, № 3-4, 73–81 (2004).
4. V. Koshmanenko, *The theorem of conflict for probability measures*. Math. Methods Oper. Res, **59**, № 2, 303–313 (2004).
5. В. Д. Кошманенко, *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*, Наук. думка, Київ (2016).
6. В. Д. Кошманенко, *Формула конфліктної динаміки*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **17**, № 2, 113–149 (2020).
7. S. Albeverio, V. Koshmanenko, I. Samoilenko, *The conflict interaction between two complex systems: cyclic migration*, J. Interdiscip. Math., **11**, № 2, 163–185 (2008).

8. В. Д. Кошманенко, І. В. Самойленко, *Модель динамічної системи конфліктної тріади*, Нелін. коливання, **14**, № 1, 55–75 (2011); **English translation**: *Nonlinear Oscil.* (N. Y.), **14**, № 1, 56–76 (2011).
9. V. Koshmanenko, *Existence theorems of the  $\omega$ -limit states for conflict dynamical systems*, *Methods Funct. Anal. Topology*, **20**, № 4, 379–390 (2014).
10. V. D. Koshmanenko, S. M. Petrenko, *Розклад Гана–Жордана як рівноважний стан системи конфлікту*, *Укр. мат. журн.*, **68**, № 1, 64–77 (2016); **English translation**: *Ukr. Math. J.*, **68**, № 1, 67–82 (2016).
11. V. Koshmanenko, T. Karataieva, N. Kharchenko, I. Verygina, *Models of the conflict redistribution of vital resources*, *Social Simulation Conference, Italy, Rome*, p. 4 (2016).
12. V. Koshmanenko, E. Pugacheva, *Conflict interactions with external intervention*, *Social Simulation Conference, Italy, Rome*, p. 4 (2016).
13. V. Koshmanenko, N. Kharchenko, *Fixed points of complex systems with attractive interaction*, *Methods Funct. Anal. Topology*, **23**, № 2, 164–176 (2017); <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=970>.
14. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко, *Явно розв'язувані моделі перерозподілу конфліктного простору*, Нелін. коливання, **20**, № 1, 98–112 (2017); **English translation**: *J. Math. Sci.*, **229**, № 4, 439–454 (2018); <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3688-1>.
15. І. В. Веригіна, В. Д. Кошманенко, *Задача про оптимальну стратегію в моделях конфліктного перерозподілу ресурсного простору*, *Укр. мат. журн.*, **69**, № 7, 905–911 (2017); **English translation**: *Ukr. Math. J.*, **69**, № 7, 1051–1059 (2017); <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1414-7>.
16. T. Karataieva, V. Koshmanenko, M. J. Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*, *Phys. A*, **525**, 535–547 (2019); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110>.
17. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту*, Нелін. коливання, **22**, № 1, 66–85 (2019); **English translation**: *J. Math. Sci.*, **247**, 291–313 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3>.
18. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Модель конфліктного соціуму з ефектами зовнішнього впливу*, Нелін. коливання, **24**, № 3, 342–362 (2021).
19. R. Axelrod, *The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization*, *J. Conflict Resolut.*, **41**, № 2, 203–226 (1997); <http://www.jstor.org/stable/174371>.
20. N. Bellomo, J. Soler, *On the mathematical theory of the dynamics of swarms viewed as complex systems*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**, 29 p. (2012).
21. N. Bellomo, M. Herrero, A. Tosin, *On the dynamics of social conflicts: looking for the black swan*, *Kinet. Relat. Models*, **6**, № 3, 459–479 (2013).
22. N. Bellomo, F. Brezzi, M. Pulvirenti, *Modeling behavioral social systems*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **27**, № 1, 1–11 (2017); DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202517020018>.
23. A. Flache, M. M'as, T. Feliciani, E. Chattoe-Brown, G. Deffuant, S. Huet, J. Lorenz, *Models of social influence: towards the next frontiers*, *J. Artif. Soc. Soc. Simul.*, **20**(4), 1–2 (2017).
24. Hu Haibo, *Competing opinion diffusion on social networks*, *R. Soc. Open Sci.*, **4**, 171160 (2017); DOI: <https://doi.org/dx.doi.org/10.1098/rsos.171160>.
25. J. M. Epstein, *Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science*, Addison-Wesley Publ. Co., Adv. Book Program, Reading, MA (1997).
26. J. M. Epstein, *Why Model?*, *J. Artif. Soc. Soc. Simul.*, **11**, № 412 (2008).
27. N. E. Friedkin, E. C. Johnsen, *Social influence network theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2011); DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976735>.
28. M. Jalili, *Social power and opinion formation in complex networks*, *Phys. A*, **392**, № 4, 959–966 (2013); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.10.013>.
29. S. MD. M. Khan, K. I. Takahashi, *Segregation through conflict*, *Adv. Appl. Sociol.*, **3**, № 8, 315–319 (2013).
30. K. I. Takahashi, K. MD. M. Salam, *Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent*, *J. Interdiscip. Math.*, **9**, № 3, 459–473 (2006).
31. S. A. Marvel, H. Hong, A. Papush, S. H. Strogatz, *Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict*, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 118702 (2012); DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.118702](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.118702).
32. T. C. Schelling, *The strategy of conflict*, Harvard Univ. Press (1980).

33. S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York (2003); DOI: 10.1007/b97481.
34. P. Glendinning, *Stability, instability and chaos*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
35. H. Hong, S. H. Strogatz, *Conformists and contrarians in a Kuramoto model with identical natural frequencies*, Phys. Rev. E, **84**, 046202 (2011).
36. P. Ashwin, C. Bick, O. Burylko, *Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling*, Front. Appl. Math. Stat., **2**, № 7 (2016).
37. О. А. Бурилко, *Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. I*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 165 – 195 (2019); **English translation:** J. Math. Sci., **249**, № 4, 573 – 600 (2020).
38. О. А. Бурилко, *Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. II*, Нелін. коливання, **22**, № 3, 312 – 340 (2019); **English translation:** J. Math. Sci., **253**, 204 – 229 (2021); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05223-7>.

Одержано 07.06.22