УДК 517.5+511.72

G-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ І ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

М. В. Працьовитий

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: prats4444@gmail.com

І. М. Лисенко, Ю. П. Маслова, О. О. Требенко

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com
julia0609mas@gmail.c
trebenko@npu.edu.ua

We study two-symbol numeral system with two bases having different signs $g_0 = \frac{1}{2}$ and $g_1 = -\frac{1}{2}$, which is an analogue of the binary and nega-binary numeral systems. We prove that the new system also has zero redundancy, namely, an arbitrary number $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ has at most two expansions in a series

$$x = g_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} \right) = g_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{(-2)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} 2^{k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)}} \right) = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_n\ldots},$$

where $\alpha_k \in A = \{0; 1\}$, moreover, there exists only a countable everywhere dense set in $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (of so-called G-binary) numbers that have two expansions $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 01(0)} = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 11(0)}$.

We describe the geometry of this representation (properties of cylinder and tail sets), establish a connection with the classical binary representation, i.e., formulas for transition from one representation to another are offered. Structural, variational, integral, and fractal properties of the projection of the G-representation of numbers to classical binary representation, i.e., the function defined by the equality $p(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, are studied. It is proved that the projection continuous at G-unary points and discontinuous at G-binary points is a function of unbounded variation and has a self-similar graph.

Вивчається двосимвольна система числення з двома різнознаковими основами $g_0 = \frac{1}{2}$ і $g_1 = -\frac{1}{2}$, яка є аналогом двійкової та нега-двійкової систем числення. Доведено, що нова система теж має нульову надлишковість, а саме: довільне число $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ має не більше двох розкладів у ряд

$$x = g_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} \right) = g_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{(-2)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} 2^{k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)}} \right) = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\alpha_k \in A = \{0;1\}$, причому існує лише зліченна всюди щільна в $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ множина (так званих G-бінарних) чисел, які мають два зображення: $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 01(0)} = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 11(0)}$.

Описано геометрію цього зображення (властивості циліндричних і хвостових множин), встановлено зв'язок із класичним двійковим зображенням, а саме: наведено формули переходу від одного зображення до іншого.

Розглянуто структурні, варіаційні, інтегральні та фрактальні властивості проєктора G-зображення чисел у класичне двійкове зображення, тобто функції, означеної рівністю $p(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Доведено, що проєктор, неперервний у G-унарних точках і розривний у G-бінарних точках, є функцією необмеженої варіації і має самоподібний графік.

1. Вступ. У двосимвольній системі кодування дійсних чисел засобами алфавіту $A = \{0;1\}$ моделлю числа x є послідовність $(\alpha_n) \in L \equiv A \times A \times \ldots$. Існує багато різних двосимвольних систем зображення чисел і їхніх різнопланових застосувань [1 – 3], зокрема для конструювання локально складних математичних об'єктів (числових множин, функцій, мір, динамічних систем тощо) з фрактальними властивостями. Завдяки мінімальності (двосимвольності) алфавіту такі системи заслуговують окремої уваги.

У [4] обґрунтовано розклад довільного числа $x \in [0; g_0]$, де g_0 — фіксоване число з інтервалу $\left(\frac{1}{2};1\right]$, у ряд

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i}\right) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $g_1 = g_0 - 1$, який задає двосимвольне кодування $\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ числа x, назване G_2-зображенням [5]. Ця система зображення чисел має дві різнознакові основи g_0 і g_1, оскільки виконується рівність $\prod_{i=1}^{m} g_{\alpha_i} = g_1^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} g_0^{m-(\alpha_1+\ldots+\alpha_m)}$. Залишився поза увагою випадок $g_0 = \frac{1}{2}$, який здавався раніше неможливим, а недосконалістю конструкції G_2-зображення було те, що розглядалося зображення чисел не відрізка $[0;1]$, а лише його частини.

Випадок $g_0 = \frac{1}{2}$ є унікальним сам по собі і заслуговує окремої уваги, оскільки він приводить до аналогу двійкового та нега-двійкового зображень чисел [6] і в сім'ї всіх G_2-зображень має найпростішу геометрію. Особливістю цього зображення чисел є те, що оператор лівостороннього зсуву цифр є неперервною функцією, інверсор цифр є функцією розривною і має необмежену варіацію, а бінарні точки належать до однієї хвостової множини.

У цій роботі ми усуваємо вказану неповноту і здійснюємо порівняльний аналіз наведеного зображення з класичним двійковим за допомогою вивчення структурних, варіаційних, тополого-метричних і фрактальних [7] властивостей проєктора цифр одного зображення в інше.

2. *G*-зображення чисел. Нехай $A \equiv \{0,1\}$ — алфавіт (набір цифр) двосимвольної системи кодування (зображення) дійсних чисел; $L \equiv A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць). Очевидними є такі твердження.

1) Якщо (α_k) — довільна послідовність простору L, $\sigma_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}$, то значення виразу $u_k \equiv (-1)^{\sigma_k}\frac{\alpha_k}{2^k}$ є нулем тоді й тільки тоді, коли $\alpha_k = 0$; додатним числом, коли σ_k — число парне; від'ємним числом, коли σ_k непарне.

2) Підпослідовність $u_1 = \dfrac{\alpha_1}{2}$, $u_{n+1} = (-1)^{\sigma_{n+1}} \dfrac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}$ ненульових членів послідовності (u_n) є знакопочережною.

Лема 1. *Для будь-якої послідовності* $(\alpha_n) \in L$ *ряд*

$$\frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}(-1)^{\sigma_k} = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^{k-\sigma_k}(-2)^{\sigma_k}} = S, \quad \sigma_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}, \tag{1}$$

є абсолютно збіжним, його сума S *є невід'ємною і не перевищує першого відмінного від нуля члена ряду (1), причому*

$$S = S_m + 2^{-m}(-1)^{\sigma_{m+1}} R_m, \quad \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}; \tag{2}$$

$$S_m = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}; \qquad R_m = \frac{\alpha_{m+1}}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{m+i} 2^{-i}(-1)^{\sigma_{m+i}-\sigma_{m+1}}.$$

Доведення. Оскільки $\sum_{k=2}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{2^k} \leq \dfrac{1}{2}$, то ряд (1) є абсолютно збіжним.

Оскільки ненульові члени ряду (1) утворюють знакопочережну нескінченно спадну послідовність, то згідно з теоремою Лейбніца сума ряду (1) не перевищує першого відмінного від нуля члена ряду. Рівність (2) є очевидною.

Теорема 1 [8]. *Для будь-якого числа* $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ *існує послідовність* $(\alpha_k) \in L$ *така, що*

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \Big[\alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}\Big] \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \quad \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}. \tag{3}$$

Доведення. Зауважимо, що для будь-якої послідовності $(c_n) \in L$ виконується рівність $\Delta^G_{c_1\ldots c_{m-1}01(0)} = \Delta^G_{c_1\ldots c_{m-1}11(0)}$. Дійсно,

$$\Delta^G_{c_1\ldots c_{m-1}11(0)} - \Delta^G_{c_1\ldots .c_{m-1}01(0)} = 2^{-m-1}(-1)^{\sigma_m}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right] = 0.$$

Очевидними є розклади $0 = \Delta^G_{(0)}$, $\dfrac{1}{2} = \Delta^G_{1(0)}$. Для обґрунтування розкладу числа $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ у ряд (3) вкажемо алгоритм визначення членів послідовності (α_n).

Крок 1. Оскільки $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{0}{2^2}; \dfrac{1}{2^2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2^2}; \dfrac{1}{2}\right)$, то, очевидно, існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $x \in \left[\dfrac{\alpha_1}{2^2}; \dfrac{\alpha_1 + 1}{2^2}\right] \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{2^2} \leq x \leq \dfrac{\alpha_1 + 1}{2^2}$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, тобто $0 < x \leq \dfrac{1}{2^2}$, то покладемо $x_1 \equiv x$.

Якщо $\alpha_1 = 1$, тобто $\dfrac{1}{2^2} \leq x < \dfrac{1}{2}$, то покладемо $x_1 \equiv \dfrac{1}{2} - x$.

В обох випадках $x_1 \in \left(0; \dfrac{1}{2^2}\right]$. Якщо $x_1 = \dfrac{1}{2^2}$, то за умови $\alpha_1 = 0$ маємо $x = x_1 = \dfrac{1}{2^2} = \Delta^G_{01(0)}$, а за умови $\alpha_1 = 1$ маємо $x = \dfrac{1}{2} - x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} = \Delta^G_{11(0)}$. При $x_1 \neq \dfrac{1}{2^2}$ міркування повторюються, але стосовно x_1.

Крок 2. Оскільки $x_1 \in \left(0; \frac{1}{2^2}\right) = \left(\frac{0}{2^3}; \frac{1}{2^3}\right] \cup \left[\frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^2}\right)$, то, очевидно, існує $\alpha_2 \in A$ таке, що

$$x_1 \in \left[\frac{\alpha_2}{2^3}; \frac{\alpha_3 + 1}{2^2}\right] \Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{2^3} \le x_1 \le \frac{\alpha_2 + 1}{2^3}.$$

Якщо $\alpha_2 = 0$, тобто $0 < x_1 \le \frac{1}{2^3}$, то покладемо $x_2 \equiv x_1$.

Якщо $\alpha_2 = 1$, тобто $\frac{1}{2^3} \le x_1 < \frac{1}{2^2}$, то покладемо $x_2 \equiv \frac{1}{2^2} - x_1$.

В обох випадках $x_2 \in \left(0; \frac{1}{2^3}\right]$. Якщо $x_2 = \frac{1}{2^3}$, то $x_2 = \Delta^G_{001(0)} = \Delta^G_{011(0)}$.

За підсумками двох кроків маємо:

якщо $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$, то $x = x_2 = \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + (-1)^{0+0} x_2$;

якщо $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$, то $x = x_1 = \frac{1}{2^2} - x_2 = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + (-1)^{0+1} x_2$;

якщо $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0$, то $x = \frac{1}{2} - x_1 = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + (-1)^{1+0} x_2$;

якщо $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, то $x = \frac{1}{2} - x_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2^2} - x_2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + (-1)^{1+1} x_2$.

Процес розкладу числа x продовжуватиметься, аж поки ми не отримаємо $x_n = \frac{1}{2^{n+1}}$. Якщо ж цього не відбудеться, то він нескінченний. У цьому випадку збіжність процесу є наслідком того, що $x_n \le \frac{1}{2^{n+1}} \to 0,\ n \to \infty$.

Розклад (3) числа x встановлено.

Означення 1. *Розклад числа $x \in [0; 0{,}5]$ у ряд (3) називається G-розкладом, а його скорочений запис $\Delta^G_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}$ — G-зображенням числа x. При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ю цифрою цього зображення.*

Наслідок 1. *Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in L$ така, що*

$$x = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\alpha_k 2^{-k} (-1)^{\sigma_k}\right] \equiv \Delta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \qquad \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}.$$

Зауваження 1. Наведене доведення теореми 1 є конструктивним, воно дає алгоритм розкладу числа у ряд (G-зображення) і обчислення цифр G-зображення числа, а також частково висвітлює їхню геометрію.

Лема 2. *Кожне число $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ має не більше двох G-зображень і лише зліченна множина чисел має їх два: числа з зображеннями $\Delta^G_{c_1 \ldots c_m 01(0)} = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 11(0)}$.*

Доведення. Розглянемо числа $x_1 = \Delta^G_{c_1 \ldots c_{m-1} 0 b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$, $x_2 = \Delta^G_{c_1 \ldots c_{m-1} 1 d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}$ та їхню різницю

$$x_2 - x_1 = \frac{(-1)^{\sigma_m}}{2^m} \left[\left(1 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2 (-1)^{d_1}}{2^2} - \frac{d_3 (-1)^{d_1 + d_2}}{2^3} - \ldots\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2 (-1)^{b_1}}{2^2} + \frac{b_3 (-1)^{b_1 + b_2}}{2^3} + \ldots\right)\right].$$

Якщо $\sigma_m = c_1 + \ldots + c_{m-1}$ — парне число, то

$$x_2 - x_1 \geq \frac{1}{2^m}\left[(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\right] = 0,$$

причому рівність виконується тоді, коли $d_1 = 1 = b_1,\ d_n = 0 = b_n$ при $n > 1$.

Якщо ж $\sigma_m = c_1 + \ldots + c_{m-1}$ — непарне число, то

$$x_2 - x_1 \geq \frac{1}{2^m}\left[\frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{2})\right] = 0.$$

Лему 2 доведено.

Зауваження 2. Особливістю G-зображення чисел є те, що оператор лівостороннього зсуву $\omega(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ є неперервною коректно означеною кусково-лінійною функцією $\omega\big(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = (-1)^{\alpha_1}(2x - \alpha_1)$.

3. Циліндричні та хвостові множини. Геометричні (тополого-метричні) властивості G-зображення чисел відображають властивості циліндричних і хвостових множин. Нагадаємо їх [8].

Означення 2. *Циліндром (G-циліндром) рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in [0; 0{,}5]$, які мають G-зображення $\Delta^G_{c_1\ldots c_m a_1 a_2\ldots}$, $(a_n) \in L$.*

З означення G-циліндра випливають рівності:

1) $\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1}$;
2) $[0; 0{,}5] = \bigcup\limits_{c_1\in A} \ldots \bigcup\limits_{c_m\in A} \Delta^G_{c_1\ldots c_m}$.

Лема 3. *Циліндр $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a; b]$, де*

$$a = \min \Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^G_{c_1\ldots c_m(0)}, & \textit{якщо } c_1 + \ldots + c_m \equiv N_1 \textit{ парне}, \\ \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1(0)}, & \textit{якщо } N_1 \textit{ непарне;} \end{cases}$$

$$b = \max \Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1(0)}, & \textit{якщо } N_1 \textit{ парне}, \\ \Delta^G_{c_1\ldots c_m(0)}, & \textit{якщо } N_1 \textit{ непарне}. \end{cases}$$

Доведення. Це твердження випливає з означень G-зображення числа і G-циліндра, а також із леми про порівняння чисел за їхніми G-зображеннями [8].

Наслідок 2. *Довжина G-циліндра $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ рангу m обчислюється за формулою*

$$|\Delta^G_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Наслідок 3. *Основне метричне відношення для G-зображення чисел має вигляд*

$$\frac{|\Delta^G_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^G_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{1}{2}.$$

Наслідок 4. *Для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L$*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Наслідок 5. *Якщо* $c_1 + \ldots + c_m$ *— парне число, то* $\max \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0} = \min \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1}$, *якщо ж воно не парне, то* $\max \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1} = \min \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0}$.

Внутрішність циліндра $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ позначатимемо через $\nabla^G_{c_1\ldots c_m}$;

$\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \Delta^G_{d_1\ldots d_m} \Leftrightarrow c_i = d_i,\ i = \overline{1,m}$;

$$\nabla^G_{x_1\ldots c_m} \cap \nabla^G_{d_1\ldots d_m\ldots d_n} = \begin{cases} \nabla^G_{d_1\ldots d_m\ldots d_n}, & \text{якщо } d_i = c_i,\ \ i = \overline{1,m}, \\ \varnothing, & \text{якщо існує } d_i \neq c_i,\ \ i \leq m. \end{cases}$$

Означення 3. *Кажуть, що* G*-зображення чисел* $x_1 = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ *і* $x_2 = \Delta^G_{\beta_1\ldots\beta_n\ldots}$ *мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні* k *і* m *такі, що* $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ *для будь-якого* $j \in N$ *(символічно:* $x_1 \sim x_2$*). Якщо* k *і* m *— найменші числа, для яких виконується попередня умова, то число* $z \equiv x \wedge y = \Delta^{G_2}_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} = \Delta^{G_2}_{\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots}$ *називається спільним хвостом чисел* x *і* y.

Бінарне відношення “мати однаковий хвіст” є відношенням еквівалентності. Зауважимо, що всі G-бінарні числа належать одному класу еквівалентності, що є особливістю цієї двосимвольної системи кодування чисел. Кожен клас еквівалентності є зліченною всюди щільною в $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ множиною.

Зауважимо, що G-зображення чисел x, $\omega^n(x)$ і $\delta_{c_1\ldots c_m}(x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n}) \equiv \Delta^G_{c_1\ldots c_m\alpha_1\ldots\alpha_n}$ належать одній хвостовій множині.

Можна довести, що множина всіх неперервних перетворень відрізка $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ щодо операції “суперпозиція перетворень” утворює некомутативну групу. Це робиться аналогічно до наведеної аргументації у роботі [9].

4. Взаємозв’язок G-зображення з класичним двійковим.

Теорема 2 (основний результат). *Для довільної послідовності* $(\alpha_n) \in L$ *виконується рівність*

$$\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^2_{0a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \tag{4}$$

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad \alpha_1 = 0, \\ 1, & \textit{якщо} \quad \alpha_1 = 1; \end{cases} \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \alpha_{n+1}, & \textit{якщо } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \textit{ парне}, \\ 1 - \alpha_{n+1}, & \textit{якщо } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \textit{ непарне}. \end{cases} \tag{5}$$

Доведення. Введемо позначення $x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $y = \Delta^2_{0a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ і покажемо, що $y = x$.

Означення функції $y = f(x)$ рівностями (4) і (5) є коректним, оскільки значення виразу $y = f(x)$ від двох різних зображень G-бінарного числа x збігаються. Справді,

$f(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 01(0)}) = \Delta^2_{0a_1\ldots a_n 0(1)}$, якщо $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ парне,

$f(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 11(0)}) = \Delta^2_{0a_1\ldots a_n 1(0)}$, якщо $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ непарне,

то в першому та другому випадку відповідно матимемо

$$f(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 11(0)}) = \Delta^2_{0a_1\ldots a_n 1(0)} \qquad \text{і} \qquad f(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 11(0)}) = \Delta^2_{0a_1\ldots a_n 0(1)}.$$

Доведемо, що рівність $y = x$ виконується для довільного G-бінарного числа $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n 01(0)}$ методом математичної індукції (за числом n).

Очевидними є рівності $x = \Delta^G_{01(0)} = \frac{1}{4} = \Delta^G_{001(0)} = \Delta^2_{00(1)} = \frac{1}{2^3} = \Delta^G_{111(0)}$, тобто рівність при $n = 1$ виконується.

Припустимо, що рівність (4) виконується для $n = k$, а саме: для будь-якого набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ нулів і одиниць і набору цифр $(a_1, \ldots, a_k)$, отриманих за формулами (5), маємо $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 01(0)} - \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 1(0)} = 0$ незалежно від парності та непарності числа $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Розглянемо $n = k+1$, тобто G-бінарне число $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}01(0)}$ рангу $k+1$ і йому відповідне значення функції $y = f(x) = \Delta^2_{0a_1\ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}(c)}$.

Можливі випадки.

1. Число $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ парне і при цьому $\alpha_{k+1} = 0$. Тоді $a_{k+1} = a_{k+2} = 0$, $a_{k+3} = 1$, $c = 1$, тобто $y = \Delta^2_{0a_1\ldots a_l 01(0)}$;

$$x - y = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 001(0)} - \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 01(0)} =$$
$$= \left(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 01(0)} - \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) - \left(\Delta^2_{0a_1\ldots a_k 01(0)} - \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) = 0.$$

2. Число $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ парне, $\alpha_{k+1} = 1$. Тоді $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 101(0)}$; $a_{n+1} = 1$, $a_{k+2} = 1$, $a_{k+3} = 0$, $c = 0$, тобто $y = \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 11(0)}$;

$$x - y = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 101(0)} - \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 11(0)} =$$
$$= \left(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k (01(0))} - \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+3}}\right) - \left(\Delta^2_{0a_1\ldots a_k 1(0)} - \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) = 0.$$

3. Число $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ непарне, $\alpha_{k+1} = 0$. Тоді $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 001(0)}$, $a_{k+1} = 1$, $a_{k+2} = 1$, $a_{k+3} = 0$, $c = 0$, $y = \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 11(0)}$;

$$x - y = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 001(0)} - \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 11(0)} =$$
$$= \left(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k (01(0))} + \frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{2^{k+3}}\right) - \left(\Delta^2_{0a_1\ldots a_k 1(0)} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) = 0.$$

4. Число $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ непарне, $\alpha_{k+1} = 1$. Тоді $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 101(0)}$, $a_{k+1} = 0$, $a_{k+2} = 0$, $a_{k+3} = 1$, $c = 1$ $y = \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 01(0)}$;

$$x - y = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k 101(0)} - \Delta^2_{0a_1\ldots a_k 01(0)} =$$
$$= \left(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_k (01(0))} + \frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) - \left(\Delta^2_{0a_1\ldots a_k 1(0)} - \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+3}}\right) = 0.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції для G-бінарного числа x довільного рангу n маємо $y = f(x) = x$.

Відповідно до доведеного $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} = \Delta^2_{0a_1\ldots a_n(a_{n+1})}$, де $a_k = \alpha_k$, якщо число $\alpha_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_{n-1}$ парне і $a = 1 - \alpha_k$, якщо число $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$ непарне. Оскільки $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}$, то виконується рівність $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^2_{0a_1\ldots a_n\ldots}$, отримана за правилами (5).

Теорему 2 доведено.

Зауваження 3. Завдяки відомому [6] взаємозв'язку класичного двійкового зображення з нега-двійковим: $\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^{-2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2[1-\alpha_3]\alpha_4\ldots[1-\alpha_{2k-1}]\alpha_{2k}}\ldots$, де

$$[0;1] \ni x = \Delta^{-2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots} \equiv \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-2)^n},$$

легко встановлюється зв'язок між нега-двійковим і G-зображенням.

5. Проєктор G-зображення чисел у класичне двійкове зображення. Класичне двійкове зображення чисел відрізка $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ має вигляд

$$x = \frac{0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{0a_2a_3\ldots a_n\ldots}, \quad a_n \in A.$$

Взаємозв'язок цих зображень частково прослідковується у їхніх геометричних, у першу чергу метричних, властивостях. Іншим засобом порівняльного аналізу зображень є проєктор одного з них у інше.

Означення 4. *Проєктором G-зображення чисел у класичне двійкове зображення називається функція p, означена рівністю*

$$p\big(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = \Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{6}$$

Коректність означення проєктора p неможлива без домовленості використовувати лише одне із зображень G-бінарних чисел, а саме $\Delta^G_{c_1\ldots c_{m-1}01(0)}$, оскільки для різних зображень G-бінарного числа формула (6) визначає різні значення.

Легко бачити, що:

1) $\min\limits_{x\in[0;\frac{1}{2}]} p(x) = p\big(0 = \Delta^G_{(0)}\big) = 0$; $\sup\limits_{x\in[0;\frac{1}{2}]} p(x) = p\left(\frac{1}{3} = \Delta^G_{(1)}\right) = \frac{1}{2}$.

2) $p\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2}p(t) \Leftrightarrow p\big(\Delta^G_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = \frac{1}{2}p\big(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big)$;

3) $p\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p(t) \Leftrightarrow p(\Delta^G_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p\big(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big)$.

Теорема 3. *Функція p неперервна по множині U всіх G-унарних чисел. Стрибок ρ функції $\rho(x)$ у G-бінарній точці рангу m дорівнює $\frac{1}{2^m}$.*

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^G_{c_1\ldots c_n\ldots}$ — фіксована G-унарна точка, $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільна, але достатньо близька до x_0 точка, $x \neq x_0$. Тоді існує номер m такий, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$. Зрозуміло, що умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тому

$$|p(x) - p(x_0)| = \left|\frac{\alpha_m - c_m}{2^m} + \frac{\alpha_{m+1} - c_{m+1}}{2^{m+1}} + \ldots\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{|\alpha_i - c_i|}{2^i} = \frac{1}{2^{m-1}} \to 0, \quad m \to \infty,$$

що рівносильно неперервності функції p у точці x_0.

Скачок $\rho(x_0)$ функції p у G-бінарній точці $x_0 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)}$ обчислюється, як легко бачити, за формулою

$$\rho(x_0) = \lim_{k\to\infty} p\left(\Delta^G_{c_1\ldots c_m 11\underbrace{0\ldots 0}_{k} a_1\ldots a_n\ldots}\right) - p\Big(\Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m}.$$

Теорему 3 доведено.

Наслідок 6. *Проєктор p є функцією необмеженої варіації.*

Справді, оскільки існує 2^m G-бінарних точок рангу m, то сума всіх стрибків функції p у цих точках дорівнює 1. Тоді сума всіх стрибків у G-бінарних точках є нескінченною.

Теорема 4. *Для проєктора p виконується рівність* $\int_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \frac{1}{8}$.

Доведення. За адитивною властивістю інтеграла $\int_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} p(x)dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} p(x)dx$.

Виразимо кожен із інтегралів окремо, звівши його до інтеграла по відрізку $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

1. З $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right] = \Delta^G_0$ маємо $x = \Delta^G_{0a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \frac{1}{2}t$, де $t = \Delta^G_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, $(a_n) \in L$ і $p(x) = p\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2}p(x)$.

2. З $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] = \Delta^G_1$ випливає, що $x = \Delta^G_{1a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$, де $t = \Delta^G_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, і $t = \frac{1}{2}$, якщо $x = \frac{1}{4}$; $t = 0$, якщо $x = \frac{1}{2}$, при цьому $p(x) = p\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p(x)$. Тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} p\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p(t)\right] dt = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx.$$

Звідси

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx.$$

Отже, $\int_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \frac{1}{8}$.

Лема 4. *Множиною значень функції $p(x)$ є відрізок* $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Доведення. Нехай y_0 — довільна точка відрізка $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, $y_0 = \Delta^2_{0\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$.

Очевидно, що $y_0 = p\big(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}\big)$, якщо $(\alpha_n) \neq (\alpha_1,\ldots,\alpha_m,1,1,0,0,\ldots)$. Якщо ж $(\alpha_n) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m,1,1,0,0,\ldots)$, то $y_0 = p\big(\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_m 10(1)}\big)$.

Лема 5. *Графік Γ_p функції $p(x)$, $x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, має самоподібну структуру*

$$\Gamma_p = \varphi_0(\Gamma_p) \cup \varphi_1(\Gamma_p),$$

де φ_0 і φ_1 — перетворення подібностей:

$$\varphi_0\colon \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x, \\ y' = \dfrac{1}{2}y, \end{cases} \qquad \varphi_1\colon \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x, \\ y' = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

Доведення. Введемо позначення $\Phi \equiv \varphi_0(\Gamma_p)\cup\varphi_1(\Gamma_1)$. Спочатку покажемо, що $\varphi_i(\Gamma_p) \subset \Gamma_p$.

Нехай $x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільна точка з $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, $y = p(x)$, тобто $M(x,y) \in \Gamma_p$. Тоді

$$x' = \frac{i}{2} + (-1)^i\frac{1}{2}x = \Delta^G_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} \in \Delta^G_i,$$

$$p(x') = \Delta^2_{0i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{i}{2^2} + \frac{1}{2}p(x) = y',$$

тобто $M'(x',y') \in \varphi_i(\Gamma_p)$. Отже, $\Phi \subset \Gamma_p$.

Тепер доведемо $\Gamma_p \subset \Phi$.

Нехай $M(x,y) \in \Gamma_p$. Тоді $x \in \Delta^G_0$ або $x \in \Delta^G_1$. Якщо $x \in \Delta^G_i$, то $x = \Delta^G_{i\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} = \dfrac{i}{2} + (-1)^i\dfrac{1}{2}x_*$, $y = p(x) = \dfrac{i}{4} + \dfrac{1}{2}y_*$, причому $p(x_*) = y_*$. Точка M є образом точки $M_*(x_*,y_*)$ під дією φ_i, тому $M \in \Phi$, тобто $\Gamma_p \subset \Phi$. Отже, $\Gamma_p = \Phi$.

Лему 5 доведено.

Наслідок 7. *Самоподібна розмірність графіка Γ_p функції p дорівнює 1.*

Теорема 5 (основний результат). *Проєктор p є майже скрізь неперервною функцією (за виключенням точок зліченної множини), яка є ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.*

Доведення. Очевидно, що для доведення ніде не монотонності функції p досить довести її немонотонність на довільному G-циліндрі.

Нехай $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ — довільний G-циліндр. Не порушуючи загальності міркувань, вважатимемо, що $c_1+\ldots+c_m$ — парне число (якщо це не так, то таким є циліндр $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 1} \subset \Delta^G_{c_1\ldots c_m}$).

Розглянемо три точки, що належать вказаному циліндру:

$$x_1 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)}, \qquad x_2 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1101(0)}, \qquad x_3 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 101(0)}.$$

Очевидно, що $x_1 < x_2 < x_3$. Оцінимо

$$p(x_2) - p(x_1) = \frac{1}{2^{m+1}}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}\right) - \frac{1}{2^2}\right] > 0,$$

$$p(x_3) - p(x_2) = \frac{1}{2^{m+1}}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}\right)\right] < 0.$$

Звідси

$$[p(x_2) - p(x_1)][p(x_3) - p(x_2)] < 0,$$

що є свідченням немонотонності функції p на G-циліндрі $\Delta^G_{c_1 \ldots c_m}$, а отже, й на всьому відрізку $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ завдяки довільності вибору циліндра.

Сума всіх стрибків функції p є нескінченною, тому вона має необмежену варіацію.

Література

1. J. Galambos, *Representations of real numbers by infinite series*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1976).
2. F. Schweiger, *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1995).
3. М. В. Працьовитий, *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел і їх застосування*, Наук. думка, Київ (2022).
4. М. В. Працьовитий, І. М. Лисенко, Ю. П. Маслова, *Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 132 – 146 (2018).
5. І. М. Лисенко, Ю. П. Маслова, М. В. Працьовитий, *Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **16**, № 2, 50 – 62 (2019).
6. М. В. Працьовитий, Я. В. Гончаренко, І. М. Лисенко, *Нега-двійкове зображення дійсних чисел і його застосування*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 01: Фіз.-мат. науки, № 17, 83 – 106 (2015).
7. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
8. М. В. Працьовитий, В. О. Дрозденко, І. М. Лисенко, Ю. П. Маслова, *Інверсор цифр G-зображення дійсних чисел і його структурна фрактальність*, Буковин. мат. журн., **10**, № 1, 100 – 109 (2022).
9. M. V. Pratsiovytyi, I. M. Lysenko, Yu. P. Maslova, *Group of continious transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of numbers*, Algebra Discrete Math., **29**, № 1, 99 – 108 (2020).

Одержано 01.11.22