УДК 517.54; 517.12

ФУНКЦІОНАЛЬНА АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ КОШІ – РІМАНА – БЕЛЬТРАМІ

Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: ruslan.salimov1@gmail.com
stefanmv43@gmail.com

A series of theorems on the asymptotic behavior of regular homeomorphic solutions of the nonlinear Cauchy – Riemann – Beltrami-type equation is proved. Sufficient conditions for logarithmic and exponential growth of regular solutions are found.

Доведено ряд теорем про асимптотичну поведінку регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійного рівняння типу Коші – Рімана – Бельтрамі. Знайдено достатні умови логарифмічного та експоненціального зростання регулярних розв'язків.

1. Вступ. Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. Нагадаємо, що *рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}(f_x + i f_y),\ f_z = \dfrac{1}{2}(f_x - i f_y),\ z = x + iy,\ f_x$ і f_y — частинні похідні відображення f по x і y відповідно.

Локальні та межові властивості гомеоморфних розв'язків лінійних і квазілінійних вироджених рівнянь Бельтрамі вивчались у роботах [1 – 5].

Нехай $\sigma : G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція і $m \geq 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) рівняння

$$f_r = \sigma\Big(re^{i\theta}\Big)\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ відповідно. Враховуючи формули (21.25) з [6, с. 611], маємо

$$r f_r = z f_z + \overline{z} f_{\overline{z}}, \quad f_\theta = i(z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}).$$

Зауважимо, якщо $\overline{z}(\sigma(z)\,|z| i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + 1) \neq 0$, то рівняння (2) можна записати у комплексній формі

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\sigma(z)\,|z|\, i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\, i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{3}$$

При $m = 0$ рівняння (3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1). Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Нелінійне рівняння (3) є частковим випадком нелінійної системи двох дійсних рівнянь у частинних похідних (див. [7], співвідношення (1), [8], а також [9]). Зауважимо, що нелінійні системи рівнянь у частинних похідних зараз, як і раніше, вивчаються у різноманітних аспектах (див., наприклад, [6 – 25]).

Нагадаємо деякі означення. Відображення $f : G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ (див., наприклад, I.1.6 у [26]). Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с. *Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння* (3) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f : G \to \mathbb{C}$, який м.с. у області G задовольняє рівняння (3).

Всюди далі будемо вважати, що

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$$

і

$$\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = r\}, \quad \mathbb{A}(0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \colon r_1 < |z| < r_2\}.$$

Доведення наступного твердження можна знайти у роботі [24] (теорема 2.1).

Твердження 1. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Тоді для деякого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ виконується умова*

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} \right)^{\frac{1}{m}} \leq c_0 < \infty, \tag{4}$$

де

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \Big(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)} \Big)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \qquad i \qquad c_0 = (2\pi)^{-\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}}.$$

2. Основні результати. У цьому пункті доведено основну лему про функціональну асимптотику розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі (3).

Справедлива така лема.

Лема 1. *Нехай $m > 0$, $0 < r_1 < r_2 < 1$ і $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, r_1, r_2)$. Якщо*

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \Big(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)} \Big)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \neq \infty$$

для м.в. $t \in (0,1)$, то виконується оцінка

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} \right)^{-\frac{1}{m+1}} \leq \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\zeta^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\, dxdy}{|z| \Big(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)} \Big)^{\frac{1}{m+1}}} \tag{5}$$

для довільної вимірної функції $\zeta \colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що $\int_{r_1}^{r_2} \zeta(t) dt = 1$.

Доведення. Зауважимо, що

$$1=\int\limits_{r_1}^{r_2}\zeta(t)\,dt=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{(I_{m,\sigma}(t))^{\frac{1}{m+2}}}\,(I_{m,\sigma}(t))^{\frac{1}{m+2}}\zeta(t)\,dt.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера з показниками $q=m+2,\ q'=\dfrac{m+2}{m+1}$ і теорему Фубіні, отримуємо оцінку

$$1\leq\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{\frac{1}{m+2}}\left(\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{\zeta^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{\frac{m+1}{m+2}},$$

з якої і випливає нерівність (5).

Далі наведено загальну лему про оцінку нижньої границі спотворення модуля відображення при умовах на сингулярний інтеграл, що є аналогом відомої леми Ікоми – Шварца (див. теорему 2 у [27]).

Лема 2. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $I_{m,\sigma}(t)\neq\infty$ *для м.в.* $t\in(0,1)$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C>0,\ \varepsilon_0\in(0,1)$ *та деякої вимірної (за Лебегом) невід'ємної на* $(0,\varepsilon_0)$ *функції* $\psi(t)$ *такої, що* $0<\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty$ *для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}\leq C\,F(\varepsilon,\varepsilon_0),\tag{6}$$

де $F(\varepsilon,\varepsilon_0)$ *— деяка додатна та скінченна функція для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{\Phi(|z|)}\leq c_0\,C^{\frac{m+1}{m}}<\infty,\tag{7}$$

де $\Phi(\varepsilon)=\left(\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{-\frac{m+2}{m}}F^{\frac{m+1}{m}}(\varepsilon,\varepsilon_0)$ *і* c_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m, *із твердження 1.*

Доведення. За лемою 1 отримаємо

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{1}{m+1}}\leq\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{\zeta^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}\tag{8}$$

для будь-якої вимірної функції $\zeta:(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\zeta(t)dt=1.\tag{9}$$

Відмітимо, що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ функція $\zeta(t) = \dfrac{\psi(t)}{\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt}$ задовольняє умову нормування вигляду (9).

Тому із співвідношення (8) отримаємо нерівність

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{1}{m+1}} \leq \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^{-\frac{m+2}{m+1}} \int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}.$$

Використовуючи умову (6), будемо мати

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{-\frac{1}{m+1}} \leq C\,F(\varepsilon, \varepsilon_0)\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^{-\frac{m+2}{m+1}}.$$

Звідси за твердженням 1 отримуємо

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^{\frac{m+2}{m}} F^{-\frac{m+1}{m}}(|z|, \varepsilon_0) \leq$$

$$\leq C^{\frac{m+1}{m}} \liminf_{z\to 0} |f(z)|\left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{\frac{1}{m}} \leq c_0\,C^{\frac{m+1}{m}},$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із твердження 1.

Наслідок 1. *Нехай $m > 0$, $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$ і $I_{m,\sigma}(t) \neq \infty$ для м.в. $t \in (0, 1)$. Припустимо, що для деяких чисел $C > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ та деякої вимірної (за Лебегом) невід'ємної на $(0, \varepsilon_0)$ функції $\psi(t)$ такої, що $0 < \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty$ для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується умова*

$$\int\limits_{B_{\varepsilon_0}} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}} \leq C < \infty. \qquad (10)$$

Тоді

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^{\frac{m+2}{m}} \leq c_0\,C^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \qquad (11)$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із твердження 1.

Доведення. Дійсно, з нерівності (10) отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}} \leq \int\limits_{B_{\varepsilon_0}} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}} \leq C,$$

звідки випливає виконання умови (6) при $F(\varepsilon,\varepsilon_0)=1.$ Далі, застосовуючи лему 2, приходимо до оцінки (11).

Наслідок 2. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W_{\rm loc}^{1,2}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $\mathrm{Im}\,\overline{\sigma\big(re^{i\theta}\big)}\geq\lambda(r)$ *для м.в.* $r\in(0,\varepsilon_0),$ $\varepsilon_0\in(0,1),$ *де* $\lambda(r)$ *— додатна скінченна м.с. на* $(0,\varepsilon_0)$ *вимірна функція. Припустимо, що для деякого числа* $K>0$ *і деякої вимірної невід'ємної на* $(0,\varepsilon_0)$ *функції* $\psi(t)$ *такої, що* $0<\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty$ *для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(t)\,dt}{\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)}\leq K\,J(\varepsilon,\varepsilon_0), \tag{12}$$

де $J(\varepsilon,\varepsilon_0)$ *— деяка додатна та скінченна функція для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$ *Тоді*

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{\Phi(|z|)}\leq K^{\frac{m+1}{m}}m^{-\frac{1}{m}}<\infty, \tag{13}$$

де

$$\Phi(\varepsilon)=\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{-\frac{m+2}{m}}J^{\frac{m+1}{m}}(\varepsilon,\varepsilon_0).$$

Доведення. Дійсно, застосовуючи умову $\mathrm{Im}\ \overline{\sigma(re^{i\theta})}\geq\lambda(r)$ для м.в. $r\in(0,\varepsilon_0)$ і теорему Фубіні, маємо оцінку

$$\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\mathrm{Im}\ \overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}\leq\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\,\lambda^{\frac{1}{m+1}}(|z|)}=2\pi\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(t)\,dt}{\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)},$$

де $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0).$ Звідси та з умови (12) отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\Big(\mathrm{Im}\ \overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}\leqslant 2\pi KJ(\varepsilon,\varepsilon_0).$$

Далі, застосовуючи лему 2 з $C=2\pi K$ і $F(\varepsilon,\varepsilon_0)=J(\varepsilon,\varepsilon_0),$ приходимо до оцінки

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{\Phi(|z|)}\leq c_0(2\pi K)^{\frac{m+1}{m}}=m^{-\frac{1}{m}}K^{\frac{m+1}{m}}<\infty,$$

де

$$\Phi(\varepsilon)=\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{-\frac{m+2}{m}}J^{\frac{m+1}{m}}(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\text{і}\qquad c_0=(2\pi)^{-\frac{m+1}{m}}m^{-\frac{1}{m}}.$$

Поклавши у наслідку 2 $J(\varepsilon,\varepsilon_0)=1,$ одержуємо наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $m > 0,\ f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $\operatorname{Im} \overline{\sigma(re^{i\theta})} \geq \lambda(r)$ *для м.в.* $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, *де* $\lambda(r)$ *— додатна скінченна м.с. на* $(0, \varepsilon_0)$ *вимірна функція. Припустимо, що для деякого числа* $K > 0$ *і деякої вимірної невід'ємної на* $(0, \varepsilon_0)$ *функції* $\psi(t)$ *такої, що* $0 < \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$ *для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *виконується умова*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(t)\, dt}{\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)} \leq K < \infty. \tag{14}$$

Тоді

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{m+2}{m}} \leq K^{\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}} < \infty. \tag{15}$$

Далі наведено теореми про функціональну асимптотику розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі (3).

Теорема 1. *Нехай* $m > 0,\ f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $I_{m,\sigma}(t) \neq \infty$ *для м.в.* $t \in (0, 1)$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C > 0,\ 0 \leq \alpha \leq \dfrac{m+2}{m+1}$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ *і деякої вимірної (за Лебегом) невід'ємної на* $(0, \varepsilon_0)$ *функції* $\psi(t)$ *такої, що* $0 < \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$ *для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\, dxdy}{|z| \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} \leq C \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \right)^{\alpha}. \tag{16}$$

Тоді

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \right)^{\beta} \leq c_0\, C^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \tag{17}$$

де $\beta = \dfrac{m + 2 - \alpha(m+1)}{m}$, *а* c_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m, *із твердження 1.*

Доведення. Вибираючи

$$F(\varepsilon, \varepsilon_0) = \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \right)^{\alpha}$$

і застосовуючи лему 2, одержуємо оцінку (17).

Теорема 2. *Нехай* $m > 0,\ f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $\operatorname{Im} \overline{\sigma(re^{i\theta})} \geq \lambda(r)$ *для м.в.* $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, *де* $\lambda(r)$ *— додатна скінченна м.с. на* $(0, \varepsilon_0)$ *вимірна функція. Припустимо, що* *для деяких чисел* $K>0,\ 0\le\alpha\le\dfrac{m+2}{m+1}$ *і деякої вимірної невід'ємної на* $(0,\varepsilon_0)$ *функції* $\psi(t)$ *такої, що* $0<\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty$ *для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, *виконується умова*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(t)\,dt}{\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)}\le K\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{\alpha}. \tag{18}$$

Тоді

$$\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{\beta}\le m^{-\frac{1}{m}}K^{\frac{m+1}{m}}<\infty, \tag{19}$$

де $\beta=\dfrac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$.

Доведення. Вибираючи

$$J(\varepsilon,\varepsilon_0)=\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{\alpha}$$

і застосовуючи наслідок 2, отримуємо оцінку (19).

3. Логарифмічна асимптотика. У цьому пункті доведено ряд теорем про логарифмічну асимптотику розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі (3).

Теорема 3. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $I_{m,\sigma}(t)\ne\infty$ *для м.в.* $t\in(0,1)$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C>0,\ 0\le\alpha\le\dfrac{m+2}{m+1}$ *і* $\varepsilon_0\in(0,1)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}}\Big(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}}\le C\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \tag{20}$$

для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}}\le c_0\,C^{\frac{m+1}{m}}<\infty, \tag{21}$$

де c_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m, *із твердження 1.*

Доведення. Вибираючи $\psi(t)=\dfrac{1}{t},\ F(\varepsilon,\varepsilon_0)=\left(\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}$ та застосовуючи лему 2, одержуємо

$$\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}}=$$

$$=\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{\varepsilon_0}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m}}\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{\alpha(m+1)}{m}}\lim_{z\to0}\left(\frac{\ln\dfrac{1}{|z|}}{\ln\dfrac{\varepsilon_0}{|z|}}\right)^{\frac{m+2}{m}}=$$

$$= \liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{m+2}{m}} F^{-\frac{m+1}{m}}(|z|, \varepsilon_0) \le c_0\, C^{\frac{m+1}{m}},$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із твердження 1.

Приклад 1. Нехай $m \in (0, 2)$. Розглянемо рівняння

$$f_r = -\frac{i}{mr}\, |f_\theta|^m f_\theta \tag{22}$$

в одиничному крузі $\mathbb{B}$. Покажемо, що відображення $f = \left(\ln \dfrac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}} e^{i\theta}$ належить простору $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$. Дійсно, f є гомеоморфізмом класу C^1 у $\mathbb{B} \setminus \{0\}$, звідси, зокрема, випливає, що $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B} \setminus \{0\})$. Покладемо $\overline{B}_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le r_0\}$, $r_0 \in (0, 1)$. Знаходимо частинні похідні відображення f:

$$f_r = \frac{1}{mr}\left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{m+1}{m}} e^{i\theta}, \qquad f_\theta = i\left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}} e^{i\theta},$$

за формулою з [6, с. 611] маємо

$$\int_{\overline{B}_{r_0}} \left(|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2\right) dxdy = \frac{1}{2} \int_{\overline{B}_{r_0}} \left(|f_r|^2 + r^{-2}|f_\theta|^2\right) r dr d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{m^2} \int_0^{r_0} \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{2m+2}{m}} \frac{dr}{r} + \pi \int_0^{r_0} \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{2}{m}} \frac{dr}{r}.$$

Очевидно, що при $m \in (0, 2)$ обидва інтеграли збігаються.

Перевіримо, що відображення $f = \left(\ln \dfrac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{m}} e^{i\theta}$ є розв'язком рівняння (22). Дійсно, маємо рівність $\sigma = \dfrac{f_r}{f_\theta |f_\theta|^m} = -\dfrac{i}{mr}$. Далі знаходимо

$$\left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}} = (mr)^{-\frac{1}{m+1}}.$$

Перевіримо, що умова (20) виконується. Дійсно, при $\alpha = 1$

$$\int_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} = 2\pi m^{\frac{1}{m+1}} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r} = 2\pi m^{\frac{1}{m+1}} \ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \le 2\pi m^{\frac{1}{m+1}} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

З іншого боку, легко бачити, що $\lim_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \dfrac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}} = 1.$

Наслідок 4. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(re^{i\theta})}\geq\lambda(r)$ *для м.в.* $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in(0,1)$, *де* $\lambda(r)$ *— додатна скінченна м.с. на* $(0,\varepsilon_0)$ *вимірна функція. Припустимо, що для деяких чисел* $K>0,\ 0\leq\alpha\leq\dfrac{m+2}{m+1}$ *і для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t^{\frac{m+2}{m+1}}\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)}\leq K\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}. \tag{23}$$

Тоді

$$\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\beta}\leq m^{-\frac{1}{m}}K^{\frac{m+1}{m}}<\infty, \tag{24}$$

де $\beta=\dfrac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$.

Доведення. Вибираючи $\psi(t)=\dfrac{1}{t},\ J(\varepsilon,\varepsilon_0)=\left(\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}$ і застосовуючи наслідок 2, отримуємо

$$\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}}=$$

$$=\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\ln\frac{\varepsilon_0}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m}}\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{\alpha(m+1)}{m}}\lim_{z\to0}\left(\frac{\ln\frac{1}{|z|}}{\ln\frac{\varepsilon_0}{|z|}}\right)^{\frac{m+2}{m}}=$$

$$=\liminf_{z\to0}|f(z)|\left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{m+2}{m}}J^{-\frac{m+1}{m}}(|z|,\varepsilon_0)\leq m^{-\frac{1}{m}}K^{\frac{m+1}{m}}.$$

Далі наведено асимптотичну поведінку регулярних розв'язків рівняння (3) у термінах ітераційної шкали логарифмів.

Уведемо такі позначення:

$$e_1=e,e_2=e^{e},\ldots,e_{k+1}=e^{e_k},$$

$$\ln_1 t=\ln t,\ln_2 t=\ln\ln t,\ldots,\ln_{k+1}t=\ln\ln_k t,$$

де $k\geq1$ — натуральні числа.

Теорема 4. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $I_{m,\sigma}(t)\neq\infty$ *для м.в.* $t\in(0,e_n^{-1})$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C>0,\ 0\leq\alpha\leq\dfrac{m+2}{m+1}$ *і* $\varepsilon_0\in(0,e_n^{-1})$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}}\left(\prod_{k=1}^{n}\ln_k\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\leq C\left(\ln_{n+1}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \tag{25}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln_{n+1} \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}} \le c_0\, C^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \tag{26}$$

де c_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m, *із твердження 1.*

Доведення. Для функції

$$\psi(t) = \frac{1}{t \prod_{k=1}^{n} \ln_k \frac{1}{t}}$$

знаходимо інтеграл

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t \prod_{k=1}^{n} \ln_k \frac{1}{t}} = \int\limits_{\frac{1}{\varepsilon_0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{du}{u \prod_{k=1}^{n} \ln_k u} = \ln_{n+1} \frac{1}{\varepsilon} - \ln_{n+1} \frac{1}{\varepsilon_0} = \ln \frac{\ln_n \frac{1}{\varepsilon}}{\ln_n \frac{1}{\varepsilon_0}}. \tag{27}$$

Далі, застосовуючи лему 2 з функціями

$$\psi(t) = \frac{1}{t \prod_{k=1}^{n} \ln_k \frac{1}{t}}, \qquad F(\varepsilon, \varepsilon_0) = \left(\ln_{n+1} \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha},$$

отримуємо

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{\ln_n \frac{1}{|z|}}{\ln_n \frac{1}{\varepsilon_0}}\right)^{\frac{m+2}{m}} \left(\ln_{n+1} \frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{\alpha(m+1)}{m}} \le c_0\, C^{\frac{m+1}{m}}.$$

Звідси випливає оцінка

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln_{n+1} \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}} =$$

$$= \liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{\ln_n \frac{1}{|z|}}{\ln_n \frac{1}{\varepsilon_0}}\right)^{\frac{m+2}{m}} \left(\ln_{n+1} \frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{\alpha(m+1)}{m}} \lim_{z\to 0} \left(\frac{\ln_{n+1} \frac{1}{|z|}}{\ln \frac{\ln_n(1/|z|)}{\ln_n(1/\varepsilon_0)}}\right)^{\frac{m+2}{m}} \le c_0 C^{\frac{m+1}{m}}.$$

Поклавши у теоремі 4 $n = 1$, будемо мати таке твердження.

Наслідок 5. *Нехай* $m > 0$, $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $I_{m,\sigma}(t) \ne \infty$ *для м.в.* $t \in (0, e^{-1})$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C > 0$, $0 \le \alpha \le \dfrac{m+2}{m+1}$ *і* $\varepsilon_0 \in (0, e^{-1})$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m+1}} \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \le C \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \tag{28}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}} \le c_0 C^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \tag{29}$$

де c_0 — *додатна стала, яка залежить тільки від* m, *із твердження 1.*

Наслідок 6. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ — *регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $\operatorname{Im}\overline{\sigma(re^{i\theta})}\ge\lambda(r)$ *для м.в.* $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in(0,e_n^{-1})$, *де* $\lambda(r)$ — *додатна скінченна м.с. на* $(0,\varepsilon_0)$ *вимірна функція. Припустимо, що для деяких чисел* $K>0,\ 0\le\alpha\le\dfrac{m+2}{m+1}$ *і для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{\left(t\prod_{k=1}^{n}\ln_k\frac{1}{t}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)} \le K\left(\ln_{n+1}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}. \tag{30}$$

Тоді

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln_{n+1}\frac{1}{|z|}\right)^{\beta} \le m^{-\frac{1}{m}} K^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \tag{31}$$

де $\beta = \dfrac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$.

Доведення. Вибираючи

$$\psi(t)=\frac{1}{t\prod_{k=1}^{n}\ln_k\frac{1}{t}},\qquad J(\varepsilon,\varepsilon_0)=\left(\ln_{n+1}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}$$

і застосовуючи формулу (27), за наслідком 2 отримуємо

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln_{n+1}\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}} =$$

$$=\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln\frac{\ln_n\frac{1}{|z|}}{\ln_n\frac{1}{\varepsilon_0}}\right)^{\frac{m+2}{m}}\left(\ln_{n+1}\frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{\alpha(m+1)}{m}}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln_{n+1}\frac{1}{|z|}}{\ln\frac{\ln_n(1/|z|)}{\ln_n(1/\varepsilon_0)}}\right)^{\frac{m+2}{m}} =$$

$$=\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{m+2}{m}} J^{-\frac{m+1}{m}}(|z|,\varepsilon_0)\le m^{-\frac{1}{m}}K^{\frac{m+1}{m}}.$$

Поклавши у наслідку 6 $n=1$, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 7. *Нехай* $m>0,\ f:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ — *регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0)=0$ *і* $\operatorname{Im}\overline{\sigma(re^{i\theta})}\ge\lambda(r)$ *для м.в.* $r\in(0,\varepsilon_0)$,

$\varepsilon_0 \in (0, e^{-1})$, де $\lambda(r)$ — додатна скінченна м.с. на $(0, \varepsilon_0)$ вимірна функція. Припустимо, що для деяких чисел $K > 0,\ 0 \le \alpha \le \dfrac{m+2}{m+1}$ і для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується умова

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{\left(t \ln \frac{1}{t}\right)^{\frac{m+2}{m+1}} \lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)} \le K \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}. \tag{32}$$

Тоді

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln \ln \frac{1}{|z|}\right)^{\beta} \le m^{-\frac{1}{m}} K^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \tag{33}$$

де $\beta = \dfrac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$.

4. Експоненціальна асимптотика. У цьому пункті знайдено достатні умови експоненціальної асимптотики розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі (3).

Теорема 5. *Нехай $m > 0,\ f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$ і $I_{m,\sigma}(t) \ne \infty$ для м.в. $t \in (0,1)$. Припустимо, що для деяких чисел $C > 0,\ p > 0,\ 0 \le \alpha \le \dfrac{m+2}{m+1}$ і $\varepsilon_0 \in (0,1)$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\Phi_p^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z| \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \le C\, e^{\frac{\alpha}{\varepsilon^p}} \tag{34}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де $\Phi_p(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}$. Тоді

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| e^{\frac{\beta}{|z|^p}} \le c_0\, p^{\frac{m+2}{m}} C^{\frac{m+1}{m}} < \infty, \tag{35}$$

де $\beta = \dfrac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$ і c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із твердження 1.

Доведення. Для функції $\psi(t) = \Phi_p(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}$ знаходимо інтеграл

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{e^{\frac{1}{t^p}}\, dt}{t^{p+1}} = \frac{e^{\varepsilon^{-p}} - e^{\varepsilon_0^{-p}}}{p}. \tag{36}$$

Тоді, застосовуючи лему 2 з функціями $\psi(t) = \Phi_p(t)$ і $F(\varepsilon, \varepsilon_0) = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon^p}}$, отримуємо

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)|\, e^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m|z|^p}} =$$

$$= p^{\frac{m+2}{m}} \liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\frac{e^{|z|^{-p}} - e^{\varepsilon_0^{-p}}}{p}\right)^{\frac{m+2}{m}} e^{-\frac{\alpha(m+1)}{m|z|^p}} \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^{|z|^{-p}} - e^{\varepsilon_0^{-p}}}{e^{|z|^{-p}}}\right)^{-\frac{m+2}{m}} =$$

$$= p^{\frac{m+2}{m}} \liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{m+2}{m}} F^{-\frac{m+1}{m}}(|z|, \varepsilon_0) \leq c_0\, p^{\frac{m+2}{m}} C^{\frac{m+1}{m}},$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із твердження 1.

Приклад 2. Нехай $m > 0$. Розглянемо рівняння

$$f_r = -\frac{e^{\frac{1}{r^m}}\, i}{r^{m+1}} |f_\theta|^m f_\theta \tag{37}$$

в одиничному крузі $\mathbb{B}$. Покажемо, що відображення $f = e^{-\frac{1}{m\, r^m}} e^{i\theta}$ належить простору $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$. Дійсно, f є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B} \setminus \{0\}$, звідки, зокрема, випливає, що $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B} \setminus \{0\})$. Покладемо $\overline{B}_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq r_0\}$, $r_0 \in (0, 1)$. Знайдемо частинні похідні відображення f:

$$f_r = \frac{e^{-\frac{1}{m\, r^m}} e^{i\theta}}{r^{m+1}}, \quad f_\theta = i e^{-\frac{1}{m\, r^m}} e^{i\theta}$$

і за формулою з [6, с. 611] маємо

$$\int\limits_{\overline{B}_{r_0}} \big(|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2\big) dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_{\overline{B}_{r_0}} \big(|f_r|^2 + r^{-2}|f_\theta|^2\big) r dr d\theta =$$

$$= \pi \int\limits_0^{r_0} e^{-\frac{2}{m\, r^m}} \frac{dr}{r^{2m+1}} + \pi \int\limits_0^{r_0} e^{-\frac{2}{m r^m}} \frac{dr}{r}.$$

Очевидно, що обидва інтеграли збігаються, якщо $m > 0$.

Перевіримо, що відображення $f = e^{-\frac{1}{m\, r^m}} e^{i\theta}$ є розв'язком рівняння (22). Тоді маємо рівність

$$\sigma = \frac{f_r}{f_\theta |f_\theta|^m} = -\frac{e^{\frac{1}{r^m}}\, i}{r^{m+1}}.$$

Далі знаходимо

$$\Big(\mathrm{Im}\, \overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}} = \frac{e^{\frac{1}{(m+1) r^m}}}{r}.$$

Перевіримо, що умова (34) виконується. Дійсно, при $\alpha = 1$

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\Phi_m^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\, dxdy}{|z| \Big(\mathrm{Im}\, \overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}} = \int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{e^{\frac{1}{|z|^m}}\, dxdy}{|z|^{m+2}} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} e^{\frac{1}{r^m}} r^{-m-1} dr = \frac{2\pi}{m} \left(e^{\frac{1}{\varepsilon^m}} - e^{\frac{1}{\varepsilon_0^m}} \right) \leq \frac{2\pi}{m}\, e^{\frac{1}{\varepsilon^m}},$$

де $\Phi_m(|z|) = \dfrac{e^{\frac{1}{|z|^m}}}{|z|^{m+1}}$.

З іншого боку, бачимо, що $\lim_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{1}{m|z|^m}} = 1$.

Поклавши у теоремі 5 $\alpha = 0$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 8. *Нехай $m > 0$, $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$ і $I_{m,\sigma}(t) \neq \infty$ для м.в. $t \in (0,1)$. Припустимо, що для деяких чисел $C > 0$, $p > 0$ і $\varepsilon_0 \in (0,1)$ виконується умова*

$$\int\limits_{B_{\varepsilon_0}} \frac{\Phi_p^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)dxdy}{|z|\Big(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\Big)^{\frac{1}{m+1}}} \leq C,$$

де $\Phi_p(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}$. Тоді

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| e^{\frac{m+2}{m|z|^p}} \leq c_0\, p^{\frac{m+2}{m}} C^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із твердження 1.

Наслідок 9. *Нехай $m > 0$, $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$ і $\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(re^{i\theta})} \geq \lambda(r)$ для м.в. $r \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, де $\lambda(r)$ — додатна скінченна м.с. на $(0,\varepsilon_0)$ вимірна функція. Припустимо, що для деяких чисел $K > 0$, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{m+2}{m+1}$ і для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ виконується умова*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{\Phi_p^{\frac{m+2}{m+1}}(t)\,dt}{\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)} \leq K\, e^{\frac{\alpha}{|z|^p}},$$

де $\Phi_p(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}$. Тоді

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| e^{\frac{\beta}{|z|^p}} \leq p^{\frac{m+2}{m}} m^{-\frac{1}{m}} K^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де $\beta = \dfrac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$.

Доведення. Застосовуючи наслідок 2 з функціями

$$\psi(t) = \Phi_p(t) = \frac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}, \quad J(\varepsilon,\varepsilon_0) = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon^p}}$$

і використовуючи формулу (36), приходимо до оцінки

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m|z|^p}} =$$

$$= p^{\frac{m+2}{m}} \liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\frac{e^{|z|^{-p}} - e^{\varepsilon_0^{-p}}}{p}\right)^{\frac{m+2}{m}} e^{-\frac{\alpha(m+1)}{m|z|^p}} \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^{|z|^{-p}} - e^{\varepsilon_0^{-p}}}{e^{|z|^{-p}}}\right)^{-\frac{m+2}{m}} =$$

$$= p^{\frac{m+2}{m}} \liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^{\frac{m+2}{m}} J^{-\frac{m+1}{m}}(|z|,\varepsilon_0) \leq p^{\frac{m+2}{m}} m^{-\frac{1}{m}} K^{\frac{m+1}{m}}.$$

Поклавши у наслідку 9 $\alpha = 0$, одержуємо таке твердження.

Наслідок 10. *Нехай* $m > 0,\ f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $\operatorname{Im}\overline{\sigma(re^{i\theta})} \geq \lambda(r)$ *для м.в.* $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, *де* $\lambda(r)$ *— додатна скінченна м.с. на* $(0, \varepsilon_0)$ *вимірна функція. Припустимо, що для деякого числа* $K > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{\Phi_p^{\frac{m+2}{m+1}}(t)\,dt}{\lambda^{\frac{1}{m+1}}(t)} \leq K,$$

де $\Phi_p(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}$. *Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| e^{\frac{m+2}{m|z|^p}} \leq p^{\frac{m+2}{m}} m^{-\frac{1}{m}} K^{\frac{m+1}{m}} < \infty.$$

Література

1. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equations: A geometric approach*, Dev. Math., **26** (2012).
2. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York (2009).
3. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On recent advances in the degenerate Beltrami equations*, Ukr. Mat. Visn., **4**, № 7, 467 – 515 (2010).
4. U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation handbook in complex analysis: geometric function theory*, **2**, Elseiver Sci. B.V., Amsterdam, 555 – 597 (2005).
5. E. A. Sevost'yanov, *On quasilinear Beltrami-type equations with degeneration*, Math. Notes, **90**, № 3-4, 431 – 438 (2011).
6. K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Math. Ser., **48** (2009).
7. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными*, Докл. АН СССР, **112**, № 5, 810 – 811 (1957).
8. М. А. Лаврентьев, *Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей*, Мат. сб., **21(63)**, № 2, 285 – 320 (1947).
9. М. А. Лаврентьев, *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа*, Изд-во АН СССР, Москва (1962).
10. C.-Y. Guo, M. Kar, *Quantitative uniqueness estimates for* p*-Laplace type equations in the plane*, Nonlinear Anal., **143**, 19 – 44 (2016).
11. Б. В. Шабат, *Геометрический смысл понятия эллиптичности*, Успехи мат. наук, **12**, № 6(78), 181 – 188 (1957).
12. Б. В. Шабат, *К понятию производной системы в смысле М. А. Лаврентьева*, Докл. АН СССР, **136**, № 6, 1298 – 1301 (1961).
13. R. Kuhnau, *Minimal surfaces and quasiconformal mappings in the mean*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **7**, № 2, 104 – 131 (2010).
14. С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения — новые методы и приложения*, Наука, Москва (1984).
15. T. Adamowicz, *On* p*-harmonic mappings in the plane*, Nonlinear Anal., **71**, № 1-2, 502 – 511 (2009).
16. G. Aronsson, *On certain* p*-harmonic functions in the plane*, Manuscripta Math., **61**, № 1, 79 – 101 (1988).
17. А. С. Романов, *Емкостные соотношения в плоском четырехстороннике*, Сиб. мат. журн., **49**, № 4, 886 – 897 (2008).

18. B. Bojarski, T. Iwaniec, *p-harmonic equation and quasiregular mappings*, Banach Center Publ., **19**, № 1, 25 – 38 (1987).

19. K. Astala, A. Clop, D. Faraco, J. Jääskeläinen, A. Koski, *Nonlinear Beltrami operators. Schauder estimates and bounds for the Jacobian*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **34**, № 6, 1543 – 1559 (2017).

20. M. Carozza, F. Giannetti, A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone, R. Schiattarella, *Bi-Sobolev mappings and Kp-distortions in the plane*, J. Math. Anal. Appl., **457**, № 2, 1232 – 1246 (2018).

21. A. Golberg, R. Salimov, M. Stefanchuk, *Asymptotic dilation of regular homeomorphisms*, Complex Anal. Oper. Theory, **13**, № 6, 2813 – 2827 (2019); https://doi.org/10.1007/s11785-018-0833-2.

22. Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук, *Логарифмічна асимптотика нелінійного рівняння Коші – Рімана – Бельтрамі*, Укр. мат. журн., **73**, № 3, 395 – 407 (2021).

23. R. R. Salimov, M. V. Stefanchuk, *On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation*, J. Math. Sci., **248**, 203 – 216 (2020).

24. R. Salimov, M. Stefanchuk, *Nonlinear Beltrami equation and asymptotics of its solution*, J. Math. Sci., **264**, № 4, 441 – 454 (2022).

25. A. Golberg, R. Salimov, *Nonlinear Beltrami equation*, Complex Var. Elliptic Equ., **65**, № 1, 6 – 21 (2019); DOI: 10.1080/17476933.2019.1631292.

26. O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, New York (1973).

27. K. Ikoma, *On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space*, Nagoya Math. J., **25**, 175 – 203 (1965).

Одержано 14.09.22