УДК 517.929

РІВНЯННЯ РУХУ РІВНОМІРНО РОЗМІЩЕНИХ НА КОЛІ ТІЛ ОДНАКОВОЇ МАСИ З УРАХУВАННЯМ ШВИДКОСТІ ГРАВІТАЦІЇ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

The motion of an arbitrary finite number of points of the same mass uniformly located on a circle on a fixed plane is considered taking into account the speed of gravity. The center of the circle with an arbitrary given mass is fixed, and the initial state of the points is such that at all times the points are on a circle with a time-dependent radius. It is shown that the motion of the considered system of points is described by a system of equations with delays. The study of this system is reduced to the investigation of one equation.

Розглянуто рух довільного скінченного числа точок однакової маси, рівномірно розміщених на колі, що знаходиться на нерухомій площині, з урахуванням швидкості гравітації. Центр кола з довільною заданою масою вважається нерухомим, а початковий стан точок вважається таким, щоб у всі моменти часу точки знаходилися на колі з залежним від часу радіусом. Показано, що рух розглянутої системи точок описує система рівнянь із запізненнями. Дослідження цієї системи зводиться до дослідження одного рівняння.

1. Основний об'єкт досліджень. На колі радіуса r із центром у точці M_0 розглянемо рівномірно розміщені точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Число цих точок є довільним натуральним числом, більшим 2. Вважаємо, що точка M_0 має масу m_0 і є нерухомою, а всі точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ мають масу m і рухаються, знаходячись на одному колі (радіус кола може змінюватися), яке в усі моменти часу знаходиться на нерухомій площині. Для зручності розмістимо всі розглянуті точки на площині з використанням інерціальної прямокутної системи координат $x,\ y$ з початком координат у точці O, що збігається з M_0. Цю площину з евклідовою метрикою позначатимемо через $\mathbb{R}^2$.

Початкові умови вважаються такими, щоб точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ у кожний момент часу були рівномірно розміщеними на колі з залежним від часу радіусом і центром у точці O.

Нас будуть цікавити рівняння руху розглянутих точок із урахуванням скінченності швидкості гравітації c_g.

2. Принцип запізнювання гравітаційного поля. Будемо використовувати закон всесвітнього тяжіння, що враховує скінченну швидкість гравітації.

Теорія відносності Ейнштейна постулює, що швидкість гравітації c_g збігається зі швидкістю світла c [1, 2]. Ця властивість гравітації узгоджується з дослідженнями оцінки швидкості передачі впливу гравітаційного поля на результати вимірювань [3] і вимірюваннями швидкості гравітації, пов'язаними з фіксацією гравітаційних хвиль від далеких зіркових джерел одночасно зі світловим сигналом [4]. Використання скінченності швидкості гравітації дає змогу виявити властивості динаміки небесних тіл (див. [5 – 9]), не можливих у випадку нескінченної швидкості гравітації.

Вплив запізнювання гравітаційного поля у випадку взаємодії двох точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно полягає в наступному. Рух точок будемо розглядати в прямокутній системі координат, яку вважатимемо інерціальною. Положення точок M_1 і M_2 у момент часу t визначаємо їхніми радіусами-векторами $\vec{r}_i(t),\ i = \overline{1,2}.$

Якби швидкість гравітації була нескінченною, як у класичній небесній механіці, то на підставі закону всесвітнього тяжіння [10] у момент часу t точка M_2 притягувала б точку M_1 із силою

$$\vec{F}_{2,1,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{\left|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)\right|^3}\,(\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)), \tag{1}$$

де G — гравітаційна стала і $\left|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)\right|$ — евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Однак, завдяки скінченній швидкості гравітації точка M_2 притягує точку M_1 з іншою силою. Точка M_1 у момент часу t притягується не точкою простору, в якій знаходилася точка M_2 у момент часу $t,$ а точкою, в якій була точка M_2 у момент часу $t - \tau_{2,1}(t),$ де $\tau_{2,1}(t)$ — час, потрібний для переміщення гравітаційного поля зі швидкістю c з точки, що визначається вектором $\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)),$ у точку $M_1,$ що визначається вектором $\vec{r}_1(t).$ Зазначимо, що за проміжок часу $[t - \tau_{2,1}(t), t]$ точка M_2 переміститься зі стану, що визначається вектором $\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)),$ у стан, що визначається вектором $\vec{r}_2(t).$

Завдяки наведеним міркуванням для запізнення гравітації $\tau_{2,1}(t)$ виконується співвідношення

$$c\tau_{2,1}(t) = \left|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)\right|. \tag{2}$$

У цьому випадку згідно з законом всесвітнього тяжіння сила притягування точки M_1 у момент часу $t,$ породжена гравітаційним полем точки $M_2,$ визначається рівністю

$$\vec{F}_{2,1,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{\left|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)\right|^3}\,(\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)). \tag{3}$$

Більш детально силу $\vec{F}_{2,1,c}(t)$ розглянуто в [5 – 9].

Принцип запізнювання гравітаційного поля полягає у тому, що в момент часу t точка M_1 притягується не до точки $M_2,$ а до точки, що збігається з M_2 у момент часу $t - \tau_{2,1}(t),$ де $\tau_{2,1}(t)$ задовольняє (2). Сила притягування точки M_1 визначається формулою (3).

Зазначимо, що

$$\lim_{c\to\infty} \vec{F}_{2,1,c}(t) = \vec{F}_{2,1,\infty}(t)$$

для кожного моменту часу t і закон притягування точки M_1 точкою $M_2,$ що подається співвідношеннями (3) і (2), є *узагальненням закону всесвітнього тяжіння* (1).

3. Математична модель руху системи точок, розглянутої в п. 1. Будемо розглядати систему точок із п. 1 на проміжку $[t_0, +\infty),$ де t_0 — початковий момент часу. У випадках $n = 1$ і $n = 2$ аналогічні системи розглядалися в [6 – 8].

Крім декартових координат точок також будемо використовувати полярні координати точок.

Позначимо через $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ полярні кути, а через $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \ldots, \vec{r}_n(t)$ — радіуси-вектори точок $M_1, M_2, \ldots, M_n$ у момент часу $t \in [t_0, +\infty)$ відповідно.

Використаємо кут

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

і відображення $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$ що визначається співвідношенням

$$T_\theta \vec{r} = T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta). \tag{4}$$

Зазначимо, що θ — це кутова відстань між кожними сусідніми точками на колі, а $T_\theta(x, y)$ — результат повороту точки (вектора) (x, y) на кут θ навколо центра обертання $(0, 0)$ [11], відображення T_θ згідно з (4) визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$T_0 = I$ (I — одиничне відображення) і $T_\theta^n = I.$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\varphi_1(t_0) \in [0, \theta).$

Згідно з вимогами до точок $M_1, M_2, \ldots, M_n$ для кожних $k = \overline{1, n}$ і $t \in [t_0, +\infty)$

$$\varphi_k(t) = \varphi_1(t) + (k-1)\theta \tag{5}$$

і

$$T_\theta^k \vec{r}_1(t) = \vec{r}_{k+1}(t). \tag{6}$$

Наведемо рівняння, що описують рух точок $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n.$

Використаємо другий закон Ньютона й узагальнення закону всесвітнього тяжіння у вигляді (3) з урахуванням (2).

Спочатку наведемо рівняння, що описують рух досліджуваних точок у загальному випадку.

Розглянемо точку $M_i,$ де $i = \overline{1, n}.$ Ця точка згідно з (2) і (3) "притягується" до точки $M_j,$ $j = \overline{0, n},$ $j \neq i,$ з силою

$$\vec{F}_{j,i,c}(t) = \begin{cases} \dfrac{Gm^2}{\left|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)\right|^3}(\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)), & \text{якщо} \quad j \neq 0, \\ \dfrac{Gm_0 m}{\left|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)\right|^3}(\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)), & \text{якщо} \quad j = 0, \end{cases} \tag{7}$$

для якої

$$c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)| \tag{8}$$

(лапки " " використано, оскільки, насправді, точка M_i притягується до точки $M_j^*,$ в якій знаходилася точка M_j у момент часу $t - \tau_{j,i}(t),$ і точка $M_i,$ $i = \overline{1, n},$ притягує точку M_0 із силою

$$\vec{F}_{i,0,c}(t) = \frac{Gm_0 m}{\left|\vec{r}_i(t - \tau_{i,0}(t)) - \vec{r}_0(t)\right|^3}(\vec{r}_i(t - \tau_{i,0}(t)) - \vec{r}_0(t)), \tag{9}$$

для якої

$$c\tau_{i,0}(t) = \left|\vec{r}_i(t - \tau_{i,0}(t)) - \vec{r}_0(t)\right|. \tag{10}$$

На підставі другого закону Ньютона, узагальнення закону всесвітнього тяжіння та співвідношень (7) – (10) у загальному випадку рух точок $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ описує система рівнянь

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \vec{F}_{0,i,c}(t) + \sum_{j=\overline{1,n},j\neq i} \vec{F}_{j,i,c}(t), \quad i=\overline{1,n}, \\ m_0\,\dfrac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2} = \sum_{j=\overline{1,n}} \vec{F}_{j,0,c}(t), \\ c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|, \quad j=\overline{0,n}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j\neq i. \end{cases} \tag{11}$$

При дослідженні руху точок $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ разом із системою рівнянь (11) потрібно також використовувати початкові або крайові умови. Така задача складна і в загальному випадку є розв'язною лише при $n=1$ і $c_g=+\infty$ (випадок задачі двох тіл у класичній небесній механіці).

У подальшому ми обмежимося розглядом для системи (11) лише задачі з початковими умовами з деякими додатковими обмеженнями.

Розглянемо число $\Delta>0,$ для якого

$$\tau_{j,i}(t) \leq \Delta$$

для всіх $j\neq i$ і $t\geq t_0.$

Розглянемо довільні визначені на проміжку $[t_0-\Delta, t_0]$ векторні функції $\vec{r}(t)$ і $\vec{v}(t),$ для яких

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t), \quad t\in[t_0-\Delta, t_0]. \tag{12}$$

Будемо вважати, що для розв'язків системи рівнянь (11) для всіх $t\in[t_0-\Delta, t_0]$ виконуються співвідношення

$$\begin{cases} \vec{r}_0(t) = \vec{0}, \\ \vec{r}_i(t) = T_\theta^{i-1}\vec{r}(t), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = T_\theta^{i-1}\vec{v}(t), \quad i=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{13}$$

Покажемо, що при виконанні таких початкових умов у всі моменти руху точок будуть виконуватися співвідношення (5) і (6) (точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ будуть рівномірно розміщені на колі) і система рівнянь (11) спроститься до такого вигляду, що можна з певною "легкістю" досліджувати рух точок $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ навіть у випадку $c_g=c.$

Зазначимо, що система (11) з початковими умовами (13) має єдиний розв'язок. Цей висновок випливає з результатів статті [12], де показано єдиність розв'язку аналогічної задачі у випадку $n=1.$ Метод розв'язання цієї простішої задачі у [12] застосовний і до системи (11) з початковими умовами (13).

Знайдемо цей розв'язок. Пропустимо, що ми вже знаємо одну зі складових цього розв'язку — функцію $\vec{r}_1(t):$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t), \quad t\in[t_0-\Delta, t_0], \tag{14}$$

і ця функція є розв'язком рівняння

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_0}{\left|\vec{r}_1(t)\right|^3}\,\vec{r}_1(t) +$$
$$+\sum_{j=\overline{2,n}} \frac{Gm}{\left|T_\theta^{j-1}\vec{r}_1(t-\tau_{j,1}(t)) - \vec{r}_1(t)\right|^3}\Big(T_\theta^{j-1}\vec{r}_1(t-\tau_{j,1}(t)) - \vec{r}_1(t)\Big), \tag{15}$$

що описуватиме рух точки M_1.

Розглянемо функції

$$\begin{cases} \vec{r}_0(t) = \vec{0}, \\ \vec{r}_1(t), \\ \vec{r}_2(t) = T_\theta^1 \vec{r}_1(t), \\ \vec{r}_3(t) = T_\theta^2 \vec{r}_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \vec{r}_n(t) = T_\theta^{n-1}\vec{r}_1(t), \end{cases} \tag{16}$$

що задовольняють початкові умови (13) згідно з (12), (14) і (16).

Покажемо, що ці функції є розв'язками системи (11).

Спочатку покажемо, що функція $\vec{r}_0(t) \equiv \vec{0}$ є розв'язком рівняння

$$m_0 \frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2} = \sum_{j=\overline{1,n}} \vec{F}_{j,0,c}(t), \tag{17}$$

яке є одним із рівнянь (складових) системи (11). Тотожність $\vec{r}_0(t) \equiv \vec{0}$ узгоджується з тим, що згідно з вимогами до точок $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ точка M_0 є нерухомою (п. 1).

Очевидно, що для цього достатньо показати правильність співвідношення

$$\sum_{j=\overline{1,n}} \vec{F}_{j,0,c}(t) \equiv \vec{0}. \tag{18}$$

Використаємо тотожності

$$\sum_{j=\overline{1,n}} \vec{F}_{j,0,c}(t) \equiv \sum_{j=\overline{1,n}} \frac{Gm_0 m}{\left|\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t)) - \vec{r}_0(t)\right|^3}(\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t)) - \vec{r}_0(t)) \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=\overline{1,n}} \frac{Gm_0 m}{\left|\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t))\right|^3}\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t)). \tag{19}$$

Оскільки згідно з (16) і рівномірним розміщенням на колі точок $M_1, M_2, \dots, M_n$ у кожний момент часу $t \ge t_0$

$$\tau_{j,0}(t) = \tau_{1,0}(t), \quad j = \overline{1,n},$$

то з урахуванням (16)

$$|\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t))| = |\vec{r}_j(t-\tau_{1,0}(t))| = |\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t))|, \quad j = \overline{1,n},$$

і

$$\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t)) = \vec{r}_j(t-\tau_{1,0}(t)) = T_\theta^{j-1}\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t)), \quad j=\overline{1,n}.$$

Тому завдяки рівності $I + T_\theta + T_\theta^2 + \ldots + T_\theta^{n-1} = O$

$$\sum_{j=\overline{1,n}} \frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t))\right|^3}\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t)) \equiv$$

$$\equiv \frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t))\right|^3}\sum_{j=\overline{1,n}}\vec{r}_j(t-\tau_{j,0}(t)) \equiv$$

$$\equiv \frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t))\right|^3}\sum_{j=\overline{1,n}}T_\theta^{j-1}\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t)) \equiv$$

$$\equiv \frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t))\right|^3}\big(I + T_\theta + T_\theta^2 + \ldots + T_\theta^{n-1}\big)\vec{r}_1(t-\tau_{1,0}(t)) \equiv \vec{0}.$$

Звідси і з (19) випливає (18), тобто функція $\vec{r}_0(t) \equiv \vec{0}$ є розв'язком рівняння (17).

Далі покажемо, що функції (16) задовольняють перше рівняння системи (11) для кожного $i=\overline{1,n}.$ З використанням (7) і (9) подамо це рівняння у вигляді

$$m\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_0(t-\tau_{0,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right|^3}\left(\vec{r}_0(t-\tau_{0,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right) +$$

$$+\sum_{j=\overline{1,n},j\neq i}\frac{Gm^2}{\left|\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right|^3}\left(\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right).$$

Це рівняння завдяки тотожності $\vec{r}_0(t) \equiv \vec{0}$ набуває більш простого вигляду:

$$m\,\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_i(t)\right|^3}\,\vec{r}_i(t) + \sum_{j=\overline{1,n},j\neq i}\frac{Gm^2}{\left|\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right|^3}\left(\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right), \tag{20}$$

а на підставі (16) — вигляду

$$m\,\frac{d^2T_\theta^{i-1}\vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_0m}{\left|T_\theta^{i-1}\vec{r}_1(t)\right|^3}\,T_\theta^{i-1}\vec{r}_1(t) +$$

$$+\sum_{j=\overline{1,n},j\neq i}\frac{Gm^2}{\left|T_\theta^{i-1}\Big(T_\theta^{j-i}\vec{r}_1(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_1(t)\Big)\right|^3}\times$$

$$\times\, T_\theta^{i-1}\Big(T_\theta^{j-i}\vec{r}_1(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_1(t)\Big). \tag{21}$$

Якщо врахувати рівність

$$\tau_{j,i}(t) = \tau_{j-i+1,1}(t), \tag{22}$$

що отримується на підставі (16), ортогональність відображення $T_\theta,$ завдяки якій

$$|T_\theta\vec{a}| = |\vec{a}| \tag{23}$$

для кожного вектора $\vec{a}$, та оборотність відображення T_θ (обернене відображення T_θ^{-1} збігається з $T_{-\theta}$), то на підставі (21) отримуємо, що для кожного $i=\overline{1,n}$

$$m\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2}=-\frac{Gm_0m}{\left|\vec{r}_1(t)\right|^3}\,\vec{r}_1(t)+ \\ +\sum_{j=\overline{1,n},j\neq i}\frac{Gm^2}{\left|T_\theta^{j-i}\vec{r}_1(t-\tau_{j-i+1,1}(t))-\vec{r}_1(t)\right|^3}\times \\ \times\Big(T_\theta^{j-i}\vec{r}_1(t-\tau_{j-i+1,1}(t))-\vec{r}_1(t)\Big). \qquad (24)$$

Це рівняння з урахуванням (16) рівносильне рівнянню (20).

Сума доданків у правій частині рівняння (24) згідно з (22) не залежить від значення індексу i. Тому надаючи в (24) цьому індексу значення 1 і здійснюючи скорочення на $m\neq 0$, отримуємо

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2}\equiv-\frac{Gm_0}{\left|\vec{r}_1(t)\right|^3}\,\vec{r}_1(t)+ \\ +\sum_{j=\overline{2,n}}\frac{Gm}{\left|T_\theta^{j-1}\vec{r}_1(t-\tau_{j,1}(t))-\vec{r}_1(t)\right|^3}\times \\ \times\Big(T_\theta^{j-1}\vec{r}_1(t-\tau_{j,1}(t))-\vec{r}_1(t)\Big),$$

тобто функція $\vec{r}_1(t)$ є розв'язком рівняння (15).

Завдяки (22) і (23) співвідношення

$$c\tau_{j,i}(t)=\left|\vec{r}_j(t-\tau_{j,i}(t))-\vec{r}_i(t)\right|,\qquad j=\overline{0,n},\quad i=\overline{1,n},\quad j\neq i,$$

у системі (11) набувають вигляду

$$c\tau_{j-i+1,1}(t)=\left|T_\theta^{j-i}\vec{r}_1(t-\tau_{j-i+1,1}(t))-\vec{r}_1(t)\right|,\quad j=\overline{0,n},\quad i=\overline{1,n},\quad j\neq i.$$

Отже,

1) єдиний розв'язок системи (11), що задовольняє початкові умови (13), можна подати у вигляді (16);

2) знаходження розв'язку (16) розглянутої задачі з початковими умовами (13) зводиться до знаходження розв'язку $\vec{r}_1(t)$ рівняння (15) з урахуванням початкової умови (14) і використання відображень повороту точок (векторів) площини навколо точки повороту $(0,0)$ на кути $\theta,2\theta,3\theta,\dots,n\theta,$ застосовних до $\vec{r}_1(t)$;

3) на підставі (16) і попереднього висновку дослідження руху точок $M_1,M_2,\dots,M_n$ зводиться до дослідження властивостей розв'язків рівняння (15).

Згідно з наведеними дослідженнями та висновками множини розв'язків системи рівнянь (11) із відповідними початковими умовами інваріантні щодо циклічної групи поворотів площини $\mathbb{R}^2$ [13], що визначаються співвідношенням (4). Більш загальні рівняння, множини розв'язків яких інваріантні стосовно груп, ізоморфних однопараметричній групі унітарних операторів, розглядалися в [14 – 16].

Зауваження 1. У системі (11) маса m_0 точки M_0 може бути довільною, тобто можна розглядати як випадок $m_0 \neq 0$, так і випадок $m_0 = 0$. Обидва випадки на практиці реалізовні.

4. Рівняння руху точок $M_1, M_2, \ldots, M_n$ у механіці Ньютона. Зазначимо, що у випадку класичної небесної механіки (тоді $c_g = +\infty$) система (11) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = -\dfrac{Gm_0}{\left|\vec{r}_i(t)\right|^3}\,\vec{r}_i(t) + \sum_{j=\overline{1,n}, j\neq i} \dfrac{Gm}{\left|\vec{r}_j(t)-\vec{r}_i(t)\right|^3}\,(\vec{r}_j(t)-\vec{r}_i(t)), \quad i=\overline{1,n}, \\ \vec{r}_0(t) = \vec{0}, \end{cases} \tag{25}$$

а рівняння (15) — вигляду

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_0}{\left|\vec{r}_1(t)\right|^3}\,\vec{r}_1(t) + \sum_{j=\overline{2,n}} \frac{Gm}{\left|\left(T_\theta^{j-1}-I\right)\vec{r}_1(t)\right|^3}\left(T_\theta^{j-1}-I\right)\vec{r}_1(t). \tag{26}$$

У випадку $n = 2$ (тоді $\theta = \pi$) рівняння (26) збігається з рівнянням

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{G(4m_0+m)}{4\left|\vec{r}_1(t)\right|^3}\,\vec{r}_1(t). \tag{27}$$

Згідно з дослідженнями Ньютона траєкторії точки M_1, рівнянням руху якої є (27), розміщені на кривих, що називаються конічними перерізами [17], або на прямих (див., наприклад, [18 – 20]), що проходять через точку O.

Зауваження 2. Розв'язки системи рівнянь (11), в якій враховано скінченність швидкості гравітації, згідно з [5 – 9, 12, 14 – 16] мають властивості, які не притаманні розв'язкам системи рівнянь (25). Причиною цього є те, що системи рівнянь (25) і (11) є динамічними системами зі скінченновимірним і нескінченновимірним фазовими просторами відповідно.

Література

1. А. Эйнштейн, *О специальной и общей теории относительности*, Гос. изд-во, Москва (1922).
2. Yvonne Choquet-Bruhat, *General relativity and Einstein equations*, Oxford Univ. Press, Oxford (2009).
3. E. B. Fomalont, S. M. Kopeikin, *The measurement of the light deflection from Jupiyer: experimental results*, Astrophys. J., **598**, 704 – 711 (2003).
4. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al., *Gravitational waves and Gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A*, Astrophys. J. Lett., **848**, L13 (2017); DOI: 10.3847/2041-8213/aa920c.
5. В. Ю. Слюсарчук, *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 238 – 261 (2018); DOI 10.1007/s10958-019-04540-2.
6. В. Ю. Слюсарчук, *Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 397 – 419 (2018); DOI: 10.1007/s10958-019-04550-0.
7. В. Ю. Слюсарчук, *Динаміка трьох тіл, розміщених на прямій, з урахуванням скінченності швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **23**, № 4, 529 – 552 (2020); DOI: 10.1007/s10958-022-05927-4.
8. В. Ю. Слюсарчук, *Динаміка двох тіл із траєкторіями на нерухомій прямій з урахуванням скінченності швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **24**, № 2, 249 – 277 (2021).
9. В. Ю. Слюсарчук, *Коливання поверхні Землі, спричинені її обертанням, рухом навколо Сонця та скінченною швидкістю гравітації*, Нелін. коливання, **24**, № 4, 535 – 559 (2021).
10. Исаак Ньютон, *Математические начала натуральной философии*, Наука, Москва (1989).
11. А. Д. Мышкис, *Лекции по высшей математике*, Наука, Москва (1969).

12. В. Ю. Слюсарчук, *Дослідження систем диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв'язків*, Укр. мат. журн., **71**, № 5, 677 – 691 (2019); DOI 10.1007/s11253-019-01673-0.
13. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Гос. изд-во тех.-теор. лит., Москва (1954).
14. В. Ю. Слюсарчук, *Нестійкість необмежених розв'язків еволюційних рівнянь з операторними коефіцієнтами, переставними з операторами обертання*, Буковин. мат. журн., **7**, № 1, 99 – 113 (2019).
15. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння в гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів*, Укр. мат. журн., **72**, № 1, 86 – 99 (2020); DOI: 10.1007/s11253-020-01765-2.
16. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи відображень, ізоморфної однопараметричній групі поворотів*, Нелін. коливання, **23**, № 1, 112 – 123 (2020); DOI 10.1007/s10958-021-05453-9.
17. С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В. П. Иваницкая, *Аналитическая геометрия*, Просвещение, Москва (1965).
18. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. Н. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, УРСС, Москва (2002).
19. В. А. Брумберг, *Релятивистская небесная механика*, Наука, Москва (1972).
20. Ю. В. Александров, *Небесная механика: Учебник*, Харьковский нац. ун-т, Харьков (2006).

Одержано 14.10.22