УДК 517.9

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА У ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

С. М. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т
Слов'янськ, 84112, Донецька обл., Україна

Ін-т динаміки склад. тех. систем ім. Макса Планка
Магдебург, Німеччина
e-mail: chujko-slav@ukr.net,
chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de

О. С. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т
Слов'янськ, 84112, Донецька обл., Україна
e-mail: alexeychuyko1980@gmail.com

М. В. Попов

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84100, Україна
e-mail: ax.nikita@gmail.com

For the nonlinear periodic boundary-value problem for an ordinary differential equation in the critical and noncritical cases, we obtain constructive conditions of its solvability and the scheme for finding solutions by using Adomian decomposition method.

Отримано конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної періодичної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у критичному та некритичному випадках із використанням методу декомпозиції Адомяна.

1. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову аналітичного розв'язку [1 – 3] нелінійної періодичної крайової задачі

$$dz/dt = A\,z + \varepsilon\, f(t) + \varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon), \qquad \ell z(\cdot,\varepsilon) := z(a,\varepsilon) - z(b,\varepsilon) = 0 \tag{1}$$

у малому околі аналітичного розв'язку породжуючої задачі

$$dz_0/dt = A\,z_0, \qquad \ell z_0(\cdot) := z_0(a) - z_0(b) = 0. \tag{2}$$

Тут A — стала $(n \times n)$-вимірна матриця, $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, аналітична за невідомою z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) та неперервна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Крім того, вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ і функція $f(t)$ неперервні за незалежною змінною t на відрізку $[a, b]$.

Актуальність вивчення крайової задачі (1) пов'язана з широким застосуванням подібних задач при вивченні неізотермічних хімічних реакцій. Приклад моделювання таких реакцій наведено в [4]. Наприкінці цієї статті наведемо приклад знаходження наближень до періодичного розв'язку задачі (1) із використанням побудованої нами ітераційної схеми.

У статтях [5, 6], використовуючи ефективний метод Ньютона – Канторовича [7], знайдено наближення до розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач. При побудові розв'язків нелінійних крайових задач виникає проблема неможливості знаходження розв'язків у елементарних функціях, яка, у свою чергу, призводить до великих похибок розв'язків нелінійних крайових задач. Подібну проблему було продемонстровано для періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті [8, 9].

Крім того, побудову розв'язків нелінійних крайових задач із використанням методу простих ітерацій [1] значно ускладнюють обчислення похідних нелінійностей. У [5, 6] прискорення збіжності ітераційних досягнуто обчисленням похідних нелінійностей на кожному кроці. Враховуючи зазначене, спрощення обчислень похідних нелінійностей і можливість знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема періодичних крайових задач, у елементарних функціях можуть бути досягнуті з використанням методу декомпозиції Адомяна [10]. Приклад такого спрощення наведемо далі.

2. Некритичний випадок. Позначимо через $X(t)$ нормальну $(X(a) = I_n)$ фундаментальну матрицю породжуючої задачі (2). Унаслідок однорідності в некритичному випадку:

$$\det Q \neq 0, \quad Q := \ell X(\cdot)$$

породжуюча задача (2) має лише тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$. Позначимо також оператор Гріна

$$K[g(s)](t) := X(t) \int\limits_a^t X^{-1}(s)\, g(s)\, ds, \quad t \in [a, b],$$

задачі Коші

$$dy/dt = Ay + g(t), \quad y(a) = 0.$$

Тут $g(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ — неперервна вектор-функція. Як відомо [1], задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у малому околі фредгольмової породжуючої задачі (2) в некритичному випадку однозначно розв'язна для довільної неоднорідності $f(t, \varepsilon)$ і довільної нелінійної вектор-функції $Z(z, \varepsilon)$. Розв'язок періодичної крайової задачі (1) шукаємо у вигляді

$$z(t, \varepsilon) := z_0(t) + u_1(t, \varepsilon) + \ldots + u_k(t, \varepsilon) + \ldots .$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ аналітична за невідомою z в околі тривіального розв'язку породжуючої задачі (2), тому у зазначеному околі має місце розклад [10, с. 502]

$$Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = A_0(z_0(t)) + A_1(z_0(t), u_1(t, \varepsilon), \varepsilon) +$$
$$+ A_2(z_0(t), u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \varepsilon) + \ldots$$

$$\ldots + A_n(z_0(t), u_1(t,\varepsilon), \ldots, u_n(t,\varepsilon), \varepsilon) + \ldots . \tag{3}$$

Розклади багатьох нелінійних функцій та формули для їх обчислення наведено у [10 – 12]. Позначимо оператор Гріна

$$G[g(s)](t) = K[g(s)](t) - X(t)Q^{-1}\ell K[g(s)](\cdot)$$

періодичної крайової задачі [1, 13]

$$dy/dt = Ay + g(t), \quad y(a) - y(b) = 0$$

у некритичному випадку. Перше наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку

$$z_1(t,\varepsilon) := z_0(t) + u_1(t,\varepsilon), \qquad u_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[f(s) + A_0(z_0(s))\big](t)$$

визначає розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі першого наближення

$$du_1(t,\varepsilon)/dt = A\, u_1(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[f(t) + A_0(z_0(t))\right], \quad u_1(a,\varepsilon) - u_1(b,\varepsilon) = 0.$$

Друге наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку

$$z_2(t,\varepsilon) := z_0(t) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon), \qquad u_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[A_1(z_0(s), u_1(s,\varepsilon), \varepsilon)\big](t)$$

визначає розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі другого наближення

$$du_2(t,\varepsilon)/dt = A\, u_2(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[A_1(z_0(t), u_1(t,\varepsilon), \varepsilon)\right], \quad u_2(a,\varepsilon) - u_2(b,\varepsilon) = 0.$$

Послідовність наближень до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку визначає ітераційна схема

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) := z_0(t) + u_1(t,\varepsilon) + \ldots + u_{k+1}(t,\varepsilon), \tag{4}$$

$$u_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[A_k(z_0(t), u_1(t,\varepsilon), \ldots, z_k(s,\varepsilon), \varepsilon)\big](t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Проміжок значень малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ 0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (4) до розв'язку періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку, можна оцінити аналогічно [1, 2, 12, 14 – 16].

Лема. *У некритичному випадку* $(\det Q_0 \ne 0)$ *породжуюча періодична крайова задача (2) має лише тривіальний розв'язок* $z_0(t) \equiv 0$. *При цьому задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) у некритичному випадку однозначно розв'язна для довільної неоднорідності* $f(t,\varepsilon)$ *і довільної нелінійної вектор-функції* $Z(z,\varepsilon)$. *У некритичному випадку наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку визначає ітераційна схема (4). Якщо для кожного фіксованого значення малого параметра* ε *на відрізку* $[0, \varepsilon_*]$ *має місце нерівність*

$$\|u_{k+1}(t,\varepsilon)\|_\infty \le \gamma \|u_k(t,\varepsilon)\|_\infty, \quad 0 < \gamma < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то на відрізку $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ *зберігається збіжність ітераційної схеми (4) до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1).*

Приклад 1. У частинному випадку задача про знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію [4], після розщеплення приводить до задачі про знаходження наближень до періодичного розв'язку періодичної крайової задачі

$$y'(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon)=\varepsilon\, f(t)+\varepsilon\, Y(z(t,\varepsilon),\varepsilon,\mu), \qquad \ell z(\cdot,\varepsilon):=z(0,\varepsilon)-z(1,\varepsilon)=0, \tag{6}$$

де

$$f(t):=t\,(1-t), \qquad Y(y(t,\varepsilon),\varepsilon,\mu):=(1+y(t,\varepsilon))e^{-\frac{\mu}{1+y(t,\varepsilon)}}.$$

Для знаходження періодичного розв'язку рівняння (6) застосуємо ітераційну схему (4). Для періодичної задачі (6) має місце некритичний випадок [1, 15, 17]

$$Q=1-\frac{1}{e}\neq 0,$$

тому вона однозначно розв'язна, при цьому породжуюча задача (2) має лише тривіальний розв'язок $z_0(t)\equiv 0.$ Використовуючи ітераційну схему (4), отримуємо

$$z_1(t,\varepsilon):=z_0(t)+u_1(t,\varepsilon), \qquad u_1(t,\varepsilon)=\varepsilon\, G\big[f(s)+A_0(z_0(s,\varepsilon))\big](t);$$

тут і далі

$$A_0(z_0(t))=e^{-\mu},$$

$$A_1(z_0(t),u_1(t,\varepsilon),\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)\left(\frac{1+\mu+y_0(t)}{1+y_0(t)}\right)e^{-\frac{\mu}{1+y_0(t)}},$$

$$A_2(z_0(t),u_1(t,\varepsilon),u_2(t,\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=\frac{1}{2\,(1+y_0(t))^3}\big(\mu^2\, y_1(t,\varepsilon)+2(1+y_0^2(t))y_2(t,\varepsilon)(1+\mu+y_0(t))\big)e^{-\frac{\mu}{1+y_0(t)}},$$

крім того

$$y_1(t,\varepsilon)=-\frac{\varepsilon\,\big(3+2\,e^{1-t}+e^{1-\mu}-e^{-\mu}-3\,t+t^2-e\big(3-3\,t+t^2\big)\big)}{1-e}.$$

Далі з використанням ітераційної схеми (4) одержуємо

$$z_2(t,\varepsilon):=z_0(t)+u_1(t,\varepsilon)+u_2(t,\varepsilon),$$

де

$$u_2(t,\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^2\, e^{-t-2\mu}\,(1+\mu)}{(-1+e)^2}\Big(-e^t+2e^{1+t}-e^{2+t}+2\,e^{1+\mu}(1+t)-$$

$$-\,2\,e^{2+\mu}(2+t)+e^{t+\mu}\big(8-5\,t+t^2\big)-2\,e^{1+t+\mu}\big(8-5\,t+t^2\big)+$$

$$+\,e^{2+t+\mu}\big(8-5\,t+t^2\big)\Big).$$

На третьому кроці, використовуючи ітераційну схему (4), маємо

$$z_3(t,\varepsilon) := z_0(t) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon) + u_3(t,\varepsilon),$$

де

$$u_3(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3\, e^{-t-3\,\mu}}{6\,(-1+e)^2}\Big(12e^{2+2\mu}\mu^2 + \frac{1}{e-1}\Big((-1+e)e^{2\mu}(351+e(-496+135e))\mu^2 -$$

$$- 6e^{\mu}(e(42+e(-38+9e)) + 2e(42+e(-38+9e))\mu +$$

$$+ (-23+e(64+e(-56+13e)))\mu^2 - 15(1+2\,\mu)\Big) - 3(-1+e)^3(2+\mu(4+3\mu)) -$$

$$- 3(-1+e)^2\big(2+117e^{2\mu}\mu^2 + \mu(4+3\mu) - 2e^{\mu}(15+\mu(30+23\mu))\big) +$$

$$+ e^{-t}\Big(-12\,e^{2+2\mu}\,\mu^2 - 2e^{1+t+\mu}\,t\big(2(-1+e)e^{\mu}t^2\mu^2 + 6(1-2e+2\mu-4e\mu+2\mu^2 -$$

$$- 3\,e\,\mu^2 + 3(-1+e)e^{\mu}\mu^2) - 3(-1+e)t(1+\mu(2+\mu+3e^{\mu}\mu))\big)\Big) +$$

$$+ 3\,(-1+e)^2e^{2t}\big(2+e^{2\mu}(117+t(-108+t(45+(-10+t)t)))\mu^2 + \mu(4+3\,\mu) -$$

$$- 2e^{\mu}(15+\mu\,(30+23\,\mu) + t^2(1+2\mu(1+\mu)) - t(7+2\mu(7+6\,\mu)))\big)\Big).$$

Відзначимо періодичність отриманих наближень до розв'язку задачі (6). Для кожного фіксованого значення малого параметра $\varepsilon := \mu$ на відрізку $[0,\varepsilon_*]$ має місце нерівність

$$\|u_{k+1}(t,\varepsilon)\|_\infty \le \gamma\,\|u_k(t,\varepsilon)\|_\infty, \qquad \gamma \approx 0{,}0536\,642 \ll 1, \quad \varepsilon_* := 0,1, \quad k = 2,3.$$

Отже, на відрізку $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ маємо практичну збіжність ітераційної схеми (4) до періодичного розв'язку рівняння (6). Точність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (6) визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon;\mu) = \Big\|\big\|y_k'(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\, f(t) - \varepsilon\, Y(y_k(t,\varepsilon),\varepsilon,\mu)\big\|\Big\|_{\mathbb{C}[0;1]}, \quad k = 0,1,2,3.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0{,}1;0{,}1) \approx 0{,}115\,484, \qquad \Delta_1(0{,}1;0{,}1) \approx 0{,}0108\,231,$$

$$\Delta_2(0{,}1;0{,}1) \approx 0{,}00\,106\,983, \qquad \Delta_3(0{,}1;0{,}1) \approx 0{,}0000\,106\,760,$$

$$\Delta_0(0{,}01;0{,}01) \approx 0{,}0124\,005, \qquad \Delta_1(0{,}01;0{,}01) \approx 0{,}000\,117\,207,$$

$$\Delta_2(0{,}01;0{,}01) \approx 1{,}15\,935 \times 10^{-6}, \qquad \Delta_3(0{,}01;0{,}01) \approx 1{,}15\,707 \times 10^{-8}.$$

3. Критичний випадок. Далі досліджуємо задачу про побудову аналітичного розв'язку нелінійної T-періодичної крайової задачі

$$dz/dt = A\,z + f(t) + Z(z,t), \qquad \ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0 \tag{7}$$

у малому околі аналітичного розв'язку породжуючої T-періодичної задачі

$$dz_0/dt = A\,z_0, \qquad \ell z_0(\cdot) := z_0(0) - z_0(T) = 0. \tag{8}$$

Тут $Z(z,t)$ — нелінійна вектор-функція, аналітична за невідомою z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (8). У критичному випадку

$$\det Q = 0$$

породжуюча задача (8) за умови [1]

$$P_{Q_r^*}\ell K[f(s)](\cdot) = 0. \tag{9}$$

має r-параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ — нормальна $(X(0) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (8); матриця $X_r(t)$ утворена з r лінійно незалежних стовпців нормальної фундаментальної матриці $X(t)$. Матриця $P_{Q_r^*}$ утворена з r лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q^*).$$

Крім того,

$$G[g(s)](t) = K[g(s)](t) - X(t)Q^+\ell K[g(s)](\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна періодичної крайової задачі [1, 13]

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(t), \qquad y(0) - y(T) = 0$$

у критичному випадку, Q^+ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця. Як відомо, критичний випадок має місце тоді й тільки тоді, коли матриця A має власні числа на уявній осі, а саме: чисто уявні числа вигляду

$$\lambda = \frac{2\pi ik}{T}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Необхідна і достатня умова розв'язності задачі (7)

$$P_{Q_r^*}\,\ell K[Z(z(s),s)](\cdot) = 0$$

приводить до необхідної умови розв'язності задачі (7) у малому околі розв'язку породжуючої T-періодичної задачі (8):

$$F_0(c_r) := P_{Q_r^*}\,\ell K[A_0(z_0(s,c_r),s)](\cdot) = 0. \tag{10}$$

Рівняння (10) будемо далі називати рівнянням для породжуючих амплітуд T-періодичної задачі (7). Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд (10) має дійсні корені.

Фіксуючи один із дійсних розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (10), приходимо до задачі про побудову розв'язку нелінійної T-періодичної крайової задачі (7) у малому околі розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s)](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

породжуючої T-періодичної задачі (8). Традиційною умовою розв'язності задачі (7) у малому околі розв'язку породжуючої T-періодичної задачі (8) є вимога простоти коренів

$$\det B_0 \neq 0, \quad B_0 := F_0'(c_0) \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

рівняння (10) породжуючих амплітуд T-періодичної задачі (7) [1 – 3]. Вигляд ключової у дослідженні T-періодичної задачі (7) матриці B_0 при використанні розкладу Адомяна [10, с. 502] збігається з традиційним [1 – 3]:

$$B_0 = P_{Q_r^*}\,\ell K[\mathcal{A}_1(s)X_r(s)](\cdot),$$

де

$$\mathcal{A}_1(t) = \frac{\partial Z(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=z_0(t,c_r^*)}$$

— $(n\times n)$-вимірна матриця. Розв'язок періодичної крайової задачі (7) шукаємо у вигляді

$$z(t) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t) + \ldots + u_k(t) + \ldots .$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z,t)$ аналітична за невідомою z в околі розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ породжуючої задачі (8), тому у зазначеному околі має місце розклад [10, с. 502]

$$\begin{aligned} Z(z(t),t) = A_0(z_0(t,c_r^*),t) + A_1(z_0(t,c_r^*), u_1(t), t) +\\ + A_2(z_0(t,c_r^*), u_1(t), u_2(t), t) + \ldots\\ \ldots + A_n(z_0(t,c_r^*), u_1(t), \ldots, u_n(t), t) + \ldots . \end{aligned} \qquad (11)$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (7) у критичному випадку

$$z_1(t, c_r^*) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t), \quad u_1(t) = X_r(t)c_1 + G\big[A_0(z_0(s, c_r^*))\big](t), \quad c_1 \in \mathbb{R}^r,$$

визначає розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(t)}{dt} = A\,u_1(t) + A_0(z_0(t, c_r^*)), \quad u_1(0) - u_1(T) = 0.$$

Періодичність розв'язку крайової задачі першого наближення гарантована вибором розв'язку $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (10). Друге наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (7) у критичному випадку

$$z_2(t, c_r^*) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, c_1) + u_2(t, c_2)$$

визначає розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі другого наближення

$$\frac{du_2(t)}{dt} = A\,u_2(t) + A_1(z_0(t, c_r^*), u_1(t, c_1)), \quad u_2(0) - u_2(T) = 0,$$

де

$$u_2(t) = X_r(t)c_2 + G\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, c_1))\big](t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^r.$$

Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$F_1(c_1) := P_{Q_r^*}\,\ell K\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, c_1))\big](\cdot) = 0$$

являє собою лінійне рівняння

$$F_1(c_1) = B_0\,c_1 + d_1 = 0, \tag{12}$$

однозначно розв'язне у випадку невиродженості матриці B_0; тут

$$B_0 = F_1'(c_1) \in \mathbb{R}^{r\times r}, \qquad d_1 := F_1(c_1) - B_0\,c_1.$$

Дійсно, позначимо вектор-функцію [14]

$$v(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + \varepsilon\,u_1(t, c_1) + \ldots + \varepsilon^k\,u_k(t, c_k) + \ldots,$$

при цьому

$$F_1(c_1) := P_{Q_r^*}\,\ell K\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, c_1))\big](\cdot) =$$

$$= P_{Q_r^*}\,\ell K\big[Z_\varepsilon'(v(s, \varepsilon), s))\big](\cdot)\Big|_{\varepsilon=0} = P_{Q_r^*}\,\ell K\big[\mathcal{A}_1(s)u_1(s, c_1)\big](\cdot).$$

Отже,

$$B_0 = F_1'(c_1).$$

Таким чином, за умови простоти коренів рівняння (10) породжуючих амплітуд періодичної задачі (7) отримуємо розв'язок крайової задачі першого наближення

$$u_1(t) = X_r(t)c_1 + G\big[A_0(z_0(s, c_r^*))\big](t), \quad c_1 = -B_0^{-1}\,d_1.$$

Умови розв'язності крайових задач наступних наближень

$$F_j(c_j) := P_{Q_r^*}\,\ell K\big[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, c_1), \ldots, u_j(s, c_j))\big](\cdot) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

являють собою лінійні рівняння

$$F_j(c_j) = B_0\,c_j + d_j = 0, \tag{13}$$

де

$$B_0 = F'(c_j) \in \mathbb{R}^{r\times r}, \qquad d_j := F(c_j) - B_0\,c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

У випадку простоти коренів рівняння (10) породжуючих амплітуд періодичної задачі (7) рівняння (13) однозначно розв'язне. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (7) у критичному випадку визначає ітераційна схема

$$z_1(t, c_r^*) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t), u_1(t) = X_r(t)c_1 + G\big[A_0(z_0(s, c_r^*))\big](t), \quad c_1 = -B_0^{-1}\, d_1, \ldots,$$

$$z_{k+1}(t, c_r^*) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, c_1) + \ldots + u_{k+1}(t, c_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$u_{k+1}(t) = X_r(t)c_{k+1} + G\big[A_k(z_0(s, c_r^*), u_1(s, c_1), \ldots, u_k(s, c_k))\big](t), \quad c_k = -B_0^{-1}\, d_k.$$

Проміжок значень малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ 0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0,$ для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (14) до розв'язку періодичної крайової задачі (7), у критичному випадку можна оцінити аналогічно [1, 12, 14 – 16].

Теорема. *У критичному випадку* $(\det Q = 0)$ *породжуюча періодична крайова задача (8) за умови (9) має* r*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Якщо при цьому задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (7) у малому околі розв'язку породжуючої задачі (8) у критичному випадку розв'язна, то рівняння (10) для породжуючих амплітуд T*-періодичної задачі (7) має дійсні корені. У випадку невиродженості матриці* B_0 *послідовність наближень до розв'язку нелінійної* T*-періодичної крайової задачі (7) у критичному випадку визначає ітераційна схема (14). Якщо існує константа* $0 < \gamma < 1,$ *для якої має місце нерівність*

$$\|u_1(t, c_1)\|_\infty \le \gamma \|z_0(t)\|_\infty, \|u_{k+1}(t, c_{k+1})\|_\infty \le \gamma \|u_k(t, c_k)\|_\infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

то ітераційна схема (14) збігається до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (7).

Приклад 2. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження аналітичних розв'язків нелінійного рівняння Дюффінга зі збуренням

$$y'' + y = f(t) + Y(y), \quad Y(y) := y^3. \tag{16}$$

Неоднорідність $f(t)$ нелінійного рівняння Дюффінга вважатимемо неперервною 2π-періодичною функцією.

Для періодичної задачі (16) має місце критичний випадок [1, 15, 17] $Q = 0$. Періодичні розв'язки нелінійного рівняння Дюффінга (16) будемо шукати в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t, \quad c_{0a}\,, c_{0b}\, \in \mathbb{R}^1,$$

однорідної частини цього рівняння. Вважаємо виконаною умову розв'язності 2π-періодичної задачі для лінійної частини рівняння Дюффінга

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} f(t)\, dt = 0,$$

при цьому лінійна частина цієї задачі має сім'ю розв'язків

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t + G[f(s)](t), \quad c_0 := \begin{pmatrix} c_{0a} \\ c_{0b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

зображувану оператором Гріна

$$G[f(s)](t) := \int_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds$$

2π-періодичної задачі для рівняння

$$y'' + y = f(t).$$

Для знаходження амплітуди породжуючого розв'язку приходимо до рівняння

$$F_0(c_0) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} Y(y_0(t, c_0))\, dt = 0. \qquad (17)$$

Рівняння (17) при $f(t) = \cos 3t$ має єдиний простий

$$\det B_0 \neq 0, \quad B_0 = \frac{3\,\pi}{128} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

дійсний корінь

$$c_0^* = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Періодичні розв'язки рівняння Дюффінга (16) будемо шукати в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0^*) = -\frac{1}{8} \cos 3t$$

лінійної частини цього рівняння. Використовуючи ітераційну схему (14), отримуємо

$$y_1(t) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t), \qquad u_1(t) = c_{1a} \cos t + c_{1b} \sin t + G\big[A_0(y_0(s, c_0^*))\big](t);$$

тут і далі

$$A_0(y_0(t, c_0^*)) = -\frac{1}{512} \cos^3 3t,$$

$$A_1(y_0(t, c_0^*), u_1(t), t) = 3\, y_0^2(t, c_0^*)\, y_1(t),$$

$$A_2(y_0(t, c_0^*), u_1(t), u_2(t), t) = \frac{3}{2}\, y_0(t, c_0^*) \Big(u_1^2(t) + y_0(t, c_0^*)\, u_2(t) \Big),$$

$$A_3(y_0(t, c_0^*), u_1(t), u_2(t), u_3(t), t) = u_1^3(t) + 6\, y_0(t, c_0^*) u_1(t) u_2(t) + 3\, y_0^2(t, c_0^*) u_3(t).$$

Крім того,

$$y_1(t) = c_{1a} \cos t + c_{1b} \sin t + G\big[A_0(y_0(s, c_0^*))\big](t).$$

З умови розв'язності крайової задачі другого наближення отримуємо

$$c_{1a} = \frac{31}{163\,840}, \qquad c_{1b} = 0.$$

Отже,

$$u_1(t) = \frac{30}{163\,840}\cos 3t + \frac{1}{163\,840}\cos 9t.$$

Використовуючи ітераційну схему (14), одержуємо

$$y_2(t) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t) + u_2(t),$$

де

$$u_2(t) = c_{2a}\cos t + c_{2b}\sin t + G\big[A_1(y_0(s, c_0^*), u_1(s))\big](t).$$

З умови розв'язності крайової задачі третього наближення маємо

$$c_{2a} = -\frac{39\,579}{46\,976\,204\,800}, \qquad c_{2b} = 0.$$

Отже,

$$u_2(t) = -\frac{3}{46\,976\,204\,800}\bigg(12\,740\cos 3t + 448\cos 9t + 5\cos 15t\bigg).$$

З умови розв'язності крайової задачі четвертого наближення отримуємо

$$c_{3a} = \frac{370\,229\,241}{74\,079\,595\,921\,408\,000}, \qquad c_{3b} = 0,$$

а тому

$$u_3(t) = \frac{3}{74\,079\,595\,921\,408\,000}\times$$
$$\times\bigg(119\,097\,440\cos 3t + 4\,250\,631\cos 9t + 61\,270\cos 15t + 406\cos 21t\bigg).$$

З умови розв'язності крайової задачі п'ятого наближення одержуємо

$$c_{4a} = -\frac{103\,153\,910\,308\,123}{3\,037\,334\,549\,189\,812\,551\,680\,000}, \qquad c_{4b} = 0.$$

Отже,

$$u_4(t) = -\frac{12\,911\,769}{394\,064\,967\,394\,918\,400}\cos 3t -$$
$$-\frac{40\,599\,663}{34\,480\,684\,647\,055\,360\,000}\cos 9t - \frac{79\,692\,021}{4\,248\,020\,348\,517\,220\,352\,000}\cos 15t -$$
$$-\frac{372879}{20\,86\,081\,421\,146\,849\,280\,000}\cos 21t - \frac{17}{20\,125\,460\,834\,811\,904\,000}\cos 27t.$$

Для знайдених за допомогою ітераційної схеми (14) наближень до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (16) мають місце нерівності

$$\|u_1(t, c_1)\|_\infty \le \gamma\|z_0(t)\|_\infty, \qquad \|u_{k+1}(t, c_{k+1})\|_\infty \le \gamma\|u_k(t, c_k)\|_\infty,$$

$$\gamma \approx 0{,}00\,679\,549 \ll 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Тому можна говорити про практичну збіжність ітераційної схеми (4) до періодичного розв'язку рівняння (6). Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (14) наближень до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (16) визначають нев'язки

$$\Delta_k := \Big\|\big|y_k''(t) + y_k(t) - f(t) - Y(y_k(t))\big|\Big\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Зокрема,

$$\Delta_0 \approx 0{,}00\,195\,313, \qquad \Delta_1 \approx 8{,}85\,575 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2 \approx 5{,}27\,928 \times 10^{-8}, \qquad \Delta_3 \approx 3{,}59\,541 \times 10^{-10}, \qquad \Delta_4 \approx 2{,}64\,899 \times 10^{-12}.$$

Відзначимо, що досліджена нелінійна періодична задача для рівняння Дюффінга (16) не є слабконелінійною на відміну від найбільш досліджених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1, 15, 17]. Крім того, при побудові наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Дюффінга (16), на відміну від статті [2], на кожному кроці забезпечене точне виконання умов розв'язності, які гарантують відсутність вікових членів.

Точність отриманих за допомогою ітераційної схеми (14) наближень до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (16) того ж порядку, як і точність наближень до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (16), отриманих за допомогою методу Ньютона – Канторовича [5, 6]. У той же час, ітераційна схема (14) дозволяє знаходити наближення до векторів c_k за одну ітерацію, на відміну від методу Ньютона – Канторовича [5, 6], який потребує декілька ітерацій.

Використання у некритичному випадку ітераційної схеми (4), зокрема у прикладі 1, дозволяє знаходити наближення до періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію [4] в елементарних функціях. У той же час, використання традиційного методу простих ітерацій [1 – 3, 15, 17] не дозволяє знаходити наближення в елементарних функціях, що так само призводить до великих похибок наближень до розв'язків нелінійних крайових задач.

Цю статтю присвячено світлій пам'яті академіка НАН України Анатолія Михайловича Самойленка.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, De Gruyter, Berlin (2016).
2. Бойчук А. А., *Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **50**, № 2, 162–171 (1998); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **50**, № 2, 186 – 195 (1998).
3. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
4. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Model., **69**, 287 – 300 (2019).
5. Бойчук О. А., Чуйко С. М., *Про наближене розв'язання нелінійних крайових задач за методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 162–183 (2020); ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.), **258**, № 5, 594–617 (2021).
6. Бойчук О. А., Чуйко С. М., *Про наближене розв'язання слабконелінійних крайових задач методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 3, 321–331 (2020); ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.), **261**, № 2, 228–240 (2022).

7. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
8. Ю. Д. Шлапак, *О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной*, Укр. мат. журн., **26**, № 6, 850 – 854 (1974); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **26**, 702 – 706 (1974).
9. А. М. Самойленко, С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, *Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної*, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1106 – 1118 (2020); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **72**, № 8, 1280 – 1293 (2020).
10. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. Appl., **135**, 501 – 544 (1988).
11. G. Adomian, *Polynomial nonlinearities in differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **109**, 90 – 95 (1985).
12. G. Adomian, *Convergent series solution of nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math., **11**, 225 – 230 (1984).
13. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary value problems*, Differ. Equ., № 10, 1353 – 1358 (1992).
14. M. Mac, C. S. Leung, T. Harko, *A brief introducion to the Adomian decomposition method*, Rom. Astron. J., **1**, № 1, 1 – 41 (2019).
15. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
16. С. М. Чуйко, *Область збіжності ітераційної процедури для автономної крайової задачі*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416–432 (2006); ***English translation:*** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **9**, № 3, 405–422 (2006).
17. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).

Одержано 30.10.22