УДК 517.98

БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ ТИПУ S

В. В. Городецький, Р. С. Колісник, Н. М. Шевчук

Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,
r.kolisnyk@chnu.edu.ua,
n.shevchuk@chnu.edu.ua

We find conditions under which the Bessel operator of "infinite order" is defined and continuous in certain spaces of type S. We prove the correct solvability of the nonlocal multipoint problem in time for evolutionary equations of the parabolic type with such operators and an initial condition, which is a generalized function of the type of ultradistributions. The properties of the fundamental solution of the specified problem, the properties of the Bessel transform of generalized functions from spaces of type S, convolutions, convoluters, and multipliers are investigated.

Знайдено умови, за яких у певних просторах типу S визначений і є неперервним оператор Бесселя "нескінченного порядку". Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь параболічного типу з такими операторами та початковою умовою, яка є узагальненою функцією типу ультрарозподілів. Досліджено властивості фундаментального розв'язку зазначеної задачі, властивості перетворення Бесселя узагальнених функцій з просторів типу S', згорток, згортувачів і мультиплікаторів.

Вступ. У теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь і систем рівнянь на сьогодні одержано досить повні результати щодо коректної розв'язності, інтегрального зображення розв'язків і дослідження їхніх властивостей. При цьому часто початкові умови (початкові функції) мають особливості в одній або декількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва – Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Отже, задача Коші для зазначених рівнянь має природну постановку і в класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь із частинними похідними параболічного типу або сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx,\ \nu > -1/2,$ (B-параболічних рівнянь) часто використовуються простори типу $S,$ уведені І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим у [1]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними спадають при $|x| \to +\infty$ швидше, ніж $\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\},\ a,\ \alpha > 0.$ У [2 – 7] встановлено, що простори типу S та S', топологічно спряжені до просторів типу S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь із частинними похідними, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними.

Сингулярні параболічні рівняння з операторами Бесселя відносяться до рівнянь з операторами, які вироджуються за просторовою змінною і за внутрішніми властивостями вони близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Використовуються при вивченні температурних полів, при побудові математичних моделей дифузійних процесів у анізотропних середовищах, описують явища тепломасопереносу, радіальні коливання хвиль, зустрічаються у кристалографії, гідродинаміці, у задачах про взаємодію сил.

Теорія лінійних параболічних та B-параболічних рівнянь із частинними похідними бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класичну теорію задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудовано в працях І. Г. Петровського, С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена, М. І. Матійчука, М. В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, І. А. Кіпріянова, В. В. Крехівського та ін. Задачу Коші з початковими даними з просторів узагальнених функцій типу розподілів і ультрарозподілів вивчали Г. Є. Шилов, Б. Л. Гуревич, М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук, О. І. Кашпіровський, Я. І. Житомирський, В. В. Городецький, О. В. Мартинюк та ін.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача у випадку, коли початкова умова $u|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \tag{1}$$

де $t_0 = 0,\ \{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T],\ \{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},$ — фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому умова (1) трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція. Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і практичних задач крайовими задачами для рівнянь із частинними похідними з нелокальними умовами (демографічні дослідження, задачі математичної біології, поширення електромагнітних хвиль; див., наприклад, [8, 9]).

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (див., наприклад, [10 – 19]). Одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, вивчено питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій статті досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_\varphi u(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \tag{2}$$

де A_φ — оператор Бесселя "нескінченного порядку"

$$A_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k, \qquad B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + (2\nu+1)x^{-1}\frac{d}{dx}, \quad \nu > -1/2,$$

побудований за парною функцією $\varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k},\ \sigma \in \mathbb{R},$ — символом оператора A_φ, яка є елементом певного класу і задовольняє певну умову — аналог умови "параболічності" для B-параболічних рівнянь. Рівняння (2) є природними узагальненнями сингулярних параболічних рівнянь з оператором $A_\varphi = P(B_\nu)$, де P — парний поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$.

Знайдено умови для функції φ, при виконанні яких оператор A_φ визначений коректно на певних просторах типу S і є неперервним. Досліджено властивості перетворення Бесселя узагальнених функцій із просторів типу S', згорток, згортувачів і мультиплікаторів. Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (2) з початковою умовою у просторі узагальнених функцій типу S', знайдено аналітичне зображення розв'язку. При цьому попередньо досліджено властивості фундаментального розв'язку зазначеної задачі для рівняння (2).

1. Простори основних функцій типу S. І. М. Гельфанд і Г. Є. Шилов ввели в [1] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists c = c(\varphi) > 0 \quad \exists A = A(\varphi) > 0 \quad \exists B = B(\varphi) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$\left| x^k \varphi^{(n)}(x) \right| \le c A^k B^n m_{kn}, \tag{3}$$

де $m_{kn} = k^{k\alpha} n^{n\beta}$, α, $\beta > 0$ — фіксовані параметри.

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [1].

Простір S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$\left| \varphi^{(n)}(x) \right| \le c B^n n^{n\beta} \exp\Big\{ -a|x|^{1/\alpha} \Big\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

де сталі c, B, $a > 0$ залежать лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то простір S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \le c \exp\Big\{ -a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)} \Big\}, \quad c, a, b > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простір S_α^1, $\alpha > 0$, складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $z = x + iy$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому виконується оцінка

$$|\varphi(x + iy)| \le c \exp\{ -a|x|^{1/\alpha} \}, \quad c, a > 0, |y| < \delta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \ge 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Топологічна структура в S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall \overline{A} > A, \quad \forall \overline{B} > B : \left| x^k \varphi^{(n)}(x) \right| \le c \overline{A}^k \overline{B}^n k^{k\alpha} n^{n\beta}, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований досконалий простір, якщо норми в ній увести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{\left| x^k \varphi^{(n)}(x) \right|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}.$$

Вказану систему норм іноді замінюють еквівалентною їй системою норм

$$\|\varphi\|'_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\}\left|\varphi^{(n)}(x)\right|}{(B+\rho)^n n^{n\beta}}, \quad \{\delta,\rho\} \subset \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2,\ B_1 < B_2,$ то $S^{\beta,B_1}_{\alpha,A_1}$ неперервно вкладається в

$$S^{\beta,B_2}_{\alpha,A_2} \quad \text{і} \quad S^\beta_\alpha = \bigcup_{A,B>0} S^{\beta,B}_{\alpha,A},$$

тобто в S^β_α вводиться топологія індуктивної границі просторів $S^{\beta,B}_{\alpha,A}$.

Отже, збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S^\beta_\alpha$ до нуля у просторі S^β_α — це збіжність за топологією одного з просторів $S^{\beta,B}_{\alpha,A}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами [1], $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі S^β_α тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{\varphi^{(n)}_\nu, \nu \geq 1\}$ (при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$) збігається при $\nu \to +\infty$ рівномірно до нуля на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких $c, a, B > 0,$ не залежних від $\nu,$ справджується нерівність

$$\left|\varphi^{(n)}_\nu(x)\right| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається *мультиплікатором* у просторі $S^\beta_\alpha,$ якщо $g\varphi \in S^\beta_\alpha$ для довільної функції $\varphi \in S^\beta_\alpha$ і відображення $\varphi \to g\varphi$ є лінійним і неперервним оператором у S^β_α.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій з простору $S^\beta_\alpha,\ 0 < \beta < 1,\ \alpha \geq 1-\beta$ в $\mathbb{C}$ позначимо символом $S^\beta_\alpha(\mathbb{C})$. Із результатів, наведених у [20], випливає, що $S^\beta_\alpha(\mathbb{C}) = W^\Omega_M,$ де W^Ω_M — один із просторів типу $W,$ введених Б. Л. Гуревичем у [21] (див. також [20]), побудований за функціями $M(x) = x^{1/\alpha},\ \Omega(y) = y^{1/(1-\beta)},\ \{x,y\} \subset [0,\infty),$ $\{\alpha,\beta\} \subset (0,1)$.

У просторах W^Ω_M вводимо топологію індуктивної границі зліченно-нормованих просторів $W^{\Omega,b}_{M,a},$ зокрема у випадку просторів $W^\Omega_M,$ побудованих за вказаними функціями, систему норм у відповідних просторах $W^{\Omega,b}_{M,a}$ визначають формули

$$\|\varphi\|''_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}} |\varphi(z)| \exp\Big\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha} - b|y|^{1/(1-\beta)}\Big\},$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}, \{\delta,\rho\} \subset \{1/2, 1/3, \ldots\}.$$

Звідси та з результатів, наведених у [22], випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S^\beta_\alpha,$ $0 < \beta < 1,\ \alpha \geq 1-\beta,$ збігається до нуля в S^β_α тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\},\ z \in \mathbb{C},$ збігається до нуля в $S^\beta_\alpha(\mathbb{C}),$ тобто [20] рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини; при цьому виконуються нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \leq c\exp\Big\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\Big\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c, a, b > 0,$ не залежними від ν.

Мультиплікатором у просторі $S_\alpha^\beta(\mathbb{C}),\ 0<\beta<1,\ \alpha\geq 1-\beta$, є кожна ціла функція, яка задовольняє умову

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists c_\varepsilon>0 \quad \forall z=x+iy\in\mathbb{C}\colon\ \ |f(z)|\leq c_\varepsilon \exp\Big\{\varepsilon|x|^{1/\alpha}+\varepsilon|y|^{1/(1-\beta)}\Big\}.$$

Множина $F\subset S_\alpha^\beta$ називається обмеженою, якщо вона міститься у деякому зліченно-нормованому просторі $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ і в ньому обмежена, тобто для всіх функцій з F справджується оцінка (3) (або (4)) з одними й тими ж сталими $c,A,B>0$ ($c,B,a>0$).

У просторах S_α^β клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів [1].

У S_α^β визначені, лінійні та неперервні оператори множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву та згортки.

2. Простори типу $\overset{\circ}{S}$. Символом $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з S_α^β із відповідною топологією. У $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначені, лінійні й неперервні оператори множення на x^2, $\dfrac{d^2}{dx^2}$, $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}$, оператор Бесселя

$$B_\nu=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\,\frac{d}{dx}, \quad \nu>-\frac{1}{2},$$

(див. [6]). На функціях з простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначене перетворення Бесселя $F_{B_\nu}\equiv F_B$ [23]:

$$\psi(\sigma)\equiv F_B[\varphi](\sigma):=\int\limits_0^\infty \varphi(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}\,dx, \quad \varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta,$$

де j_ν — нормована функція Бесселя, яка є розв'язком задачі

$$\begin{cases} B_\nu u=\sigma^2 u,\\ u(0)=1, \qquad u'(0)=0.\end{cases}$$

У [24] доведено, що $F_B[\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta]=\overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha,\ \alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta\geq 1$, при цьому оператор $F_B\colon \overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta\to\overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha$ є неперервним.

Перетворення Бесселя використовується при дослідженні сингулярних параболічних рівнянь, еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами та інших рівнянь, що вироджуються на межі [25].

Обернене перетворення Бесселя визначається формулою

$$\varphi(x)\equiv F_B^{-1}[\psi](x)=c_\nu\int\limits_0^\infty \psi(\sigma)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \quad c_\nu=2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1).$$

Для нормованої функції Бесселя правильним є інтегральне зображення Пуассона [26]:

$$j_\nu(\sigma)=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(\sigma\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta, \quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [23]:

$$T_x^\xi\varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi\Big(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\Big)\sin^{2\nu}\omega d\omega := r_\varphi(x,\xi),$$

$$\{x,\xi\}\subset[0,+\infty), \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, φ — неперервна на $[0,\infty)$ функція,

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(x)|x^{2\nu+1}dx < \infty.$$

Оператор T_x^ξ має властивості [23]:

1) $\big|T_x^\xi\varphi(x)\big| \le \sup_{x\ge 0}|\varphi(x)|$, $T_x^0\varphi(x)=\varphi(x)$, $T_x^\xi\varphi(x) = T_\xi^x\varphi(\xi)$;
2) $T_x^\xi j_\nu(sx) = j_\nu(sx)j_\nu(s\xi)$, $\{x,\xi,s\}\subset[0,\infty)$;
3) $F_B[T_x^\xi\varphi(x)](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma)$;
4) якщо $f(x)$ неперервна на $[0,\infty)$ функція, для якої

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|x^{2\nu+1}dx < +\infty,$$

а $g(x)$, $x\in[0,\infty)$, — неперервна і обмежена на $[0,\infty)$ функція, то

$$\int\limits_0^\infty T_x^\xi f(x)g(x)x^{2\nu+1}dx = \int\limits_0^\infty f(x)T_x^\xi g(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Означимо оператор T_x^ξ на функціях з простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$. Якщо $x<0$, $\xi\ge 0$, то покладемо $T_x^\xi\varphi(x) := r_\varphi(-x,\xi)$, $\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$; якщо $x\ge 0$, $\xi<0$, то $T_x^\xi\varphi(x) := r_\varphi(x,-\xi)$; для $x<0$, $\xi<0$ вважаємо $T_x^\xi\varphi(x) = r_\varphi(-x,-\xi)$. При цьому (див. [4, с. 181]) $r_\varphi(x,\cdot)\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ при фіксованому ξ, $r_\varphi(\cdot,\xi)\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ при фіксованому x. Операція узагальненого зсуву $\varphi\to\to T_x^\xi\varphi$ диференційовна у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ (навіть нескінченно диференційовна) у розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$\frac{1}{\Delta x}[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x\varphi(\xi)] \to \frac{\partial}{\partial x}T_\xi^x\varphi(\xi), \quad \Delta x\to 0,$$

$$\frac{1}{\Delta\xi}\Big[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi\varphi(x)\Big] \to \frac{\partial}{\partial\xi}T_x^\xi\varphi(x), \quad \Delta\xi\to 0,$$

виконуються у сенсі збіжності за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ (див. [4, с. 182]).

Згідно з [6] згортку двох функцій із простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ задамо формулою

$$(\varphi*\psi)(x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \int\limits_0^\infty T_\xi^x\varphi(\xi)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \quad \{\varphi,\psi\}\subset\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta.$$

Лема 1. *Справджується рівність*

$$F_B[\varphi * \psi] = F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi], \quad \{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}.$$

Доведення. Застосувавши формулу Фубіні, одержимо

$$F_B[\varphi * \psi](\sigma) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi \right) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\xi)\xi^{2\nu+1}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\xi)\xi^{2\nu+1}\, d\xi.$$

Урахувавши формулу $T_x^\xi j_\nu(\sigma x) = j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma \xi),$ прийдемо до співвідношення

$$F_B[\varphi * \psi](\sigma) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \cdot \int\limits_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= F_B[\varphi](\sigma) F_B[\psi](\sigma),$$

що й потрібно було довести.

Із властивостей перетворення Бесселя у просторах S^β_α випливає, що

$$\{F_B[\varphi], F_B[\psi]\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}.$$

Отже, $F_B[\varphi * \psi] \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}.$ Застосувавши обернене перетворення Бесселя, одержимо

$$\varphi * \psi = F_B^{-1}[F_B[\varphi] F_B[\psi]] \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}.$$

3. Оператори Бесселя нескінченного порядку у просторах типу S°. Нехай $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — деяка парна функція, $\sum_{k=0}^\infty c_{2k}\sigma^{2k}$ — її ряд Тейлора. Оператором Бесселя “нескінченного порядку”, побудованим за функцією $\varphi,$ називатимемо оператор

$$\varphi(B_\nu) := \sum_{k=0}^\infty c_{2k}(-B_\nu)^k.$$

Припустимо, що оператор $\varphi(B_\nu)$ заданий на просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha},$ якщо для довільної функції $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ ряд

$$\varphi(B_\nu)\psi := \sum_{k=0}^\infty c_{2k}(-1)^k B_\nu^k \psi$$

зображає деяку функцію з $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}.$

Теорема 1. *Якщо* φ *— мультиплікатор у просторі* $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$, $\{\alpha,\beta\}\subset(0,1)$, $\alpha+\beta=1$, *то у просторі* $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ *визначений і неперервний оператор* $\varphi(B_\nu):=A_\varphi$, *при цьому*

$$A_\varphi\psi(x)=F^{-1}_{B,\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{B,x\to\sigma}[\psi]](x)\quad\forall\psi\in\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}. \tag{5}$$

Доведення. Введемо позначення $g(x):=A_\varphi\psi(x)$. Тоді скористаємося співвідношенням [6]

$$F_B\left[B_\nu^k\psi\right]=\left(-\sigma^2\right)^kF_B[\psi],\quad k\in\mathbb{N},$$

і одержимо

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}(-1)^kB_\nu^k\psi=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}F_B^{-1}\left[\sigma^{2k}F_B[\psi]\right](x).$$

Доведемо, що $g\in\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$. Із властивостей перетворення Бесселя у просторах типу $\overset{\circ}{S}$ випливає, що для доведення твердження досить встановити, що $F_B[g]\in\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$\begin{aligned}F_B[g](\sigma)&=F_B\left[\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}F_B^{-1}\left[\sigma^{2k}F_B[\psi]\right]\right](\sigma)=\\&=F_B\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_{2k}F_B^{-1}[\sigma^{2k}F_B[\psi]]\right]=\\&=\lim_{n\to\infty}F_B\left[\sum_{k=0}^{n}c_{2k}F_B^{-1}\left[\sigma^{2k}F_B[\psi]\right]\right]=\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_{2k}\sigma^{2k}F_B[\psi](\sigma)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}\sigma^{2k}F_B[\psi](\sigma)=\varphi(\sigma)F_B[\psi](\sigma).\end{aligned}\tag{6}$$

Оскільки $F_B[\psi]\in\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$, а φ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$, то $\varphi F_B[\psi]\in\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$.

Отже, залишається довести коректність проведених перетворень і обґрунтувати правильність формули (6).

Функція $\varphi F_B[\psi]$ парна і допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, при цьому $\varphi(z)F_B[\psi](z)\in\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{C})$, $z=\sigma+iz\in\mathbb{C}$. Для доведення твердження досить встановити, що

$$r_n(z):=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{2k}z^{2k}F_B[\psi](z)\to0,\quad n\to\infty,$$

у просторі $S^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно показати, що:

1) $r_n(z)\in S^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{C})$ при кожному $n\in\mathbb{N}$;

2) послідовність $\{r_n(z),n\geq1\}$ збігається рівномірно до нуля при $n\to\infty$ у кожній обмеженій області $Q\subset\mathbb{C}$, при цьому виконується нерівність

$$|r_n(z)| \le c\exp\Big\{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

зі сталими $c,\ a,\ b > 0,$ не залежними від $n.$

Коефіцієнти Тейлора $c_{2k},\ k \in \mathbb{Z}_+,$ функції φ обчислюються за формулою Коші

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{2k+1}}\,dz,$$

де Γ_R — коло радіуса R із центром у точці $O.$ Звідси та з умови теореми $\big(\varphi$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}\big)$ випливає, що

$$|c_{2k}| \le c_\varepsilon \inf_R \Big(R^{-k}\exp\Big\{\varepsilon R^{1/\beta}\Big\}\Big) \inf_R \Big(R^{-k}\exp\Big\{\varepsilon R^{1/(1-\alpha)}\Big\}\Big).$$

Зауважимо, що вказані інфімуми досягаються. Наприклад, розглянемо функцію $\gamma_k(R) := R^{-k}\exp\left\{\varepsilon R^{1/\beta}\right\},\ R \in (0,+\infty).$ Ця функція диференційовна на $(0,+\infty),$ причому

$$\lim_{R\to+\infty}\gamma_k(R) = +\infty, \qquad \lim_{R\to+0}\gamma_k(R) = \begin{cases} +\infty, & k\in\mathbb{N},\\ 1, & k=0.\end{cases}$$

Оскільки $\gamma_k(R) > 0,\ R \in (0,+\infty),$ то ця функція досягає свого інфімуму, який знайдемо за допомогою методів диференціального числення:

$$\inf_{R>0}\gamma_k(R) = \omega_1^k k^{-k\beta}, \quad \omega_1 = \left(\frac{\varepsilon e}{\beta}\right)^{\beta}.$$

Аналогічно,

$$\inf_{R>0}\Big(R^{-k}\exp\Big\{\varepsilon R^{1/(1-\alpha)}\Big\}\Big) = \omega_2^k k^{-k(1-\alpha)}, \quad \omega_2 = \left(\frac{\varepsilon e}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Отже,

$$|c_{2k}| \le c_\varepsilon(\omega_1\omega_2)^k k^{-k(1-\alpha+\beta)} = c_\varepsilon L^k \varepsilon^{k(1-\alpha+\beta)} k^{-k(1-\alpha+\beta)},$$

де

$$L = \left(\frac{e}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{e}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Далі здійснимо оцінку функції

$$\alpha_{2k}(z) := \Big|c_{2k}z^{2k}F_B[\psi](z)\Big|, \quad z \in \mathbb{C},$$

при кожному $k \in \mathbb{N}.$

Оскільки $F_B[\psi](z) \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}(\mathbb{C}),$ то

$$\exists c,a,b>0 \quad \forall z=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}\colon\ \ |F_B[\psi](z)| \le c\exp\Big\{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\Big\}.$$

Крім того,

$$|z|^{2k} = \big(\sigma^2+\tau^2\big)^k \le \big(2\max\{\sigma^2,\tau^2\}\big)^k \le 2^k\Big(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}\Big).$$

А тому

$$\alpha_{2k}(z) \le cc_\varepsilon L_1^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-k(1-\alpha+\beta)}\Big(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}\Big) e^{-a|\sigma|^{1/\beta}+b|\tau|^{1/(1-\beta)}} =$$

$$= cc_\varepsilon L_1^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k}\Bigg(k^{-k(1-\alpha+\beta)}|\sigma|^{2k} \times e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\beta)}} +$$

$$+ k^{-k(1-\alpha+\beta)}|\tau|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\beta)}}\Bigg) \equiv$$

$$\equiv cc_\varepsilon L_1^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k}\big(\Delta'_k(z) + \Delta''_k(z)\big), \quad L_1 = 2L.$$

Далі врахуємо нерівність

$$|\sigma|^{2k} e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}} \le M_1^k k^{2k\beta}, \quad M_1 = \left(\frac{4\beta}{ae}\right)^{2\beta},$$

застосувавши яку, знайдемо, що

$$\Delta'_k(z) = k^{-k(1-\alpha+\beta)}|\sigma|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\beta)}} \le$$

$$\le M_1^k k^{2k\beta} k^{-(1-\alpha+\beta)k} e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\beta)}}.$$

Оскільки $\alpha + \beta = 1$, то $2\beta - (1 - \alpha + \beta) = 0$, тому

$$\Delta'_k(z) \le M_1^k e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}}.$$

Оцінимо $\Delta''_k(z)$. Маємо

$$|\tau|^{2k} e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}} = |\tau|^{2k} e^{-|\tau|^{1/(1-\alpha)}} e^{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}} \le$$

$$\le M_2^k k^{2k(1-\alpha)} e^{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}}, \quad M_2 = \frac{4^{1-\alpha}}{e^2}.$$

Тоді

$$\Delta''_k(z) = k^{-k(1-\alpha+\beta)}|\tau|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}} \le$$

$$\le M_2^k k^{-k(1-\alpha+\beta)} k^{2(1-\alpha)k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}} =$$

$$= M_2^k e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}},$$

тут знову врахована умова $\alpha + \beta = 1$. Урахувавши ці нерівності, одержимо

$$\alpha_{2k}(z) \le \tilde{c} L_2^k \varepsilon^{\gamma k} e^{-a_1|\sigma|^{1/\beta} + b_1|\tau|^{1/(1-\alpha)}},$$

де $\tilde{c} = cc_\varepsilon$, $L_2 = L_1 \max\{M_1, M_2\}$, $a_1 = a/2$, $b_1 = b + 1$, $\gamma = 1 - \alpha + \beta > 0$, причому сталі $\tilde{c}$, L_2, a_1, $b_1 > 0$ не залежать від k. Візьмемо $\varepsilon = (2L_2)^{-1/\gamma}$. Тоді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} L_2^k \varepsilon^{\gamma k} = \frac{1}{2^n},$$

тобто

$$|r_n(z)| \leq \frac{\tilde{c}}{2^n} \exp\Big\{-a_1|\sigma|^{1/\beta} + b_1|\tau|^{1/(1-\alpha)}\Big\}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

З нерівності (7) випливає, що $r_n \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$ при кожному $n \in \mathbb{N}$, а послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$. Крім того,

$$|r_n(z)| \leq \tilde{c}\exp\Big\{-a_1|\sigma|^{1/\beta} + b_1|\tau|^{1/(1-\alpha)}\Big\},$$

сталі $\tilde{c},\ a_1,\ b_1 > 0$ не залежать від n.

Отже, умови 1), 2) виконуються. Цим довели, що оператор $\varphi(B_\nu)$, визначений на $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, кожну обмежену множину цього простору переводить у обмежену множину цього ж простору. Отже, вказаний оператор є неперервним, при цьому зі співвідношення (6) випливає (5), тобто оператор Бесселя нескінченного порядку збігається із псевдодиференціальним оператором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, побудованим за функцією-символом φ за допомогою перетворення Бесселя (прямого та оберненого).

Теорему 1 доведено.

4. Простори узагальнених функцій типу $(\overset{\circ}{S})'$. Символом $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}\right)'$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, зі слабкою збіжністю. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називають лінійні неперервні функціонали, дію яких на основні функції задають формулою

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція, яка задовольняє умову

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\colon \ \ |f(x)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|x|^{1/\alpha}}, \tag{8}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$:

$$\langle F_f, \varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx \quad \forall\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}.$$

Справедливе таке твердження: *якщо локально інтегровні парні на $\mathbb{R}$ функції f і g задовольняють умову (8) і не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ така, що $\langle f, \varphi_0\rangle \neq \langle g, \varphi_0\rangle$, тобто $F_g \neq F_f$. Навпаки, якщо $F_f \neq F_g$, то функції f і g не збігаються на множині додатної міри Лебега.*

Доведення цього твердження аналогічне доведенню відповідної теореми з [27].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, які задовольняють умову (8), з породжуваними ними узагальненими функціями з простору $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}\right)'$. Із властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha} \ni f \to F_f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$ є неперервним.

Оскільки у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$ визначено операцію узагальненого зсуву, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \Big\langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \Big\rangle \equiv \big\langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \big\rangle$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на основну функцію $T_x^\xi \varphi(x)$ як функцію аргумента ξ).

Лема 2. *Нехай* $f \in (\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta})'$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$. *Згортка* $f * \varphi$ *є нескінченно диференційовною на* $\mathbb{R}$ *функцією, при цьому*

$$\begin{gathered}(f * \varphi)'(x) = \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi) \right\rangle \equiv \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} T_x^\xi \varphi(x) \right\rangle, \\ (f * \varphi)''(x) = \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}\left(T_\xi^x \frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi)\right) \right\rangle, \ldots . \end{gathered} \tag{9}$$

Доведення. Оскільки операція узагальненого зсуву диференційовна у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$, то граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta x}\Big[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)\Big] \to \frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi), \quad \Delta x \to 0,$$

виконується у сенсі збіжності за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$. Внаслідок властивості неперервності функціонала f маємо, що

$$\begin{aligned}(f * \varphi)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[(f * \varphi)(x + \Delta x) - (f * \varphi)(x)\right] = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta x}\Big[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)\Big] \right\rangle = \\ &= \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)\Big] \right\rangle = \\ &= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi) \right\rangle. \end{aligned}$$

Інтегруючи одержаний результат, приходимо до формул (9).

Лему 2 доведено.

Нехай $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}\right)'$. Якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$ для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$ і з співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}\right)'$ задамо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], \varphi \rangle = \langle f, F_B[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\beta}^{\alpha}. \tag{10}$$

Із (10), властивостей лінійності і неперервності функціонала f та властивостей перетворення Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F_B[f]$, визначеного на просторі основних функцій $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$. Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$ є узагальненою функцією, заданою на $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$, тобто $F_B[f] \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}\right)'$.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція* $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}\right)'$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta \geq 1$, *— згортувач у просторі* $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, *то для довільної функції* $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ *виконується співвідношення*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] F_B[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя, а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}: \quad \langle F_B[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f * \varphi, F_B[\psi] \rangle &= \\
&= \int_0^\infty (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx = \\
&= \int_0^\infty \Big\langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \Big\rangle F_B[\psi](x) x^{2\nu+1}\, dx = \\
&= \left\langle f_\xi, \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \right\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

$\Big($тут $f * \varphi$ розуміємо як регулярну узагальнену функцію з простору $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}\right)'$; зазначимо також, що остання рівність записана, поки що, формально$\Big)$.

Нехай

$$I(\xi) := \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \left(\int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) x^{2\nu+1} dx = \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} \left(\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = F_B[F_B[\varphi]\psi](\xi).$$

Тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty |\psi(\sigma)\varphi(x) j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi)| \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma \right) dx.$$

Отже,

$$\langle F_B[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f, F_B[F_B[\varphi]\psi] \rangle =$$

$$= \langle F_B[f], F_B[\varphi]\psi \rangle = \langle F_B[f] F_B[\varphi], \psi \rangle \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}^\alpha_\beta.$$

Обґрунтуємо коректність проведених у (11) перетворень. Введемо позначення

$$I_r(\xi) := \int_0^r \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Оскільки $I_r(\xi)$, $I(\xi)$ — парні функції, то для доведення (11) досить встановити, що $I_r(\xi) \to I(\xi)$ при $r \to +\infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$, тобто що $\alpha_r(\xi) := I(\xi) - I_r(\xi) \to 0$ при $r \to +\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$. Це означає, що:

1) сім'я функцій $\{\alpha_r^{(n)}(\xi),\ r > 0\}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ збігається до нуля при $r \to \infty$ рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|\alpha_r^{(n)}(\xi)| \le cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|\xi|^{1/\alpha}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,
де сталі $c, a, B > 0$ не залежать від r.

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$D_\xi^n I(\xi) = \int_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) D_\xi^n j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1}\, d\sigma.$$

Диференціювання під знаком інтеграла можливе, оскільки цей інтеграл є рівномірно збіжним стосовно параметра ξ. Справді, із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає нерівність

$$|D_\xi^n j_\nu(\sigma\xi)| \le d_\nu |\sigma|^n, \quad \{\sigma, \xi\} \subset \mathbb{R}, \quad d_\nu > 0.$$

Тоді

$$\forall \xi \in \mathbb{R}: \quad |D_\xi^n(\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)j_\nu(\sigma\xi))\sigma^{2\nu+1}| \leq$$
$$\leq d_\nu \sigma^{n+2\nu+1}|\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)|, \quad \sigma \in [0,+\infty),$$
$$\int\limits_0^\infty |\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)|\sigma^{n+2\nu+1}d\sigma < +\infty$$

$\Big($тому що $\psi F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^\alpha_\beta \ \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha, \ \psi \in \overset{\circ}{S}{}^\alpha_\beta\Big)$, а

$$\big|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\big| \leq \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)|\sigma^{n+2\nu+1}\, d\sigma \to 0, \quad r \to +\infty,$$

рівномірно по ξ як залишок збіжного інтеграла. Отже, умова 1) виконується. Перевіримо виконання умови 2). Оскільки

$$D_\xi^n \alpha_r(\xi) = D_\xi^n I(\xi) - D_\xi^n I_r(\xi),$$

то

$$\big|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\big| \leq \big|D_\xi^n I(\xi)\big| + \big|D_\xi^n I_r(\xi)\big|.$$

Розглянемо функції

$$D_\xi^n I_{r,+}(\xi) = \max\big(D_\xi^n I_r(\xi), 0\big),$$
$$D_\xi^n I_{r,-}(\xi) = -\min\big(D_\xi^n I_r(\xi), 0\big),$$

які є невід'ємними і врахуємо, що

$$\big|D_\xi^n I(\xi)\big| = D_\xi^n I_{r,+}(\xi) + D_\xi^n I_{r,-}(\xi) \leq 2|D_\xi^n I(\xi)|.$$

Тоді

$$\big|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\big| \leq 3\big|D_\xi^n I(\xi)\big| \leq 3\big|D_\xi^n F_B[F_B[\varphi]\psi]\big| \quad \forall r > 0. \tag{12}$$

Оскільки $F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi] \in \overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha \ \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha, \ \psi \in \overset{\circ}{S}{}^\alpha_\beta$, то звідси та з (12) випливає оцінка

$$\big|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\big| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\Big\{-a|x|^{1/\alpha}\Big\},$$

де сталі $c, B, a > 0$ не залежать від r. Отже, умова 2) виконується.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. З теореми 2 випливає, що якщо узагальнена функція f — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$, то її перетворення Бесселя — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^\alpha_\beta$.

Наприклад, δ-функція Дірака є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$:

$$\forall\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}: \quad (\delta * \varphi)(x) = \left\langle \delta_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \right\rangle = T_x^0 \varphi(x) = \varphi(x).$$

Знайдемо $F_B[\delta]$. Маємо

$$\forall\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\beta}^{\alpha}: \quad \langle F_B[\delta], \varphi\rangle = \langle \delta, F_B[\varphi]\rangle = F_B[\varphi](0) =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x) x^{2\nu+1} dx = \langle 1, \varphi\rangle$$

(тут враховано, що $j_\nu(0) = 1$). Отже, $F_B[\delta] = 1$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\beta}^{\alpha}$ (у даному випадку ця властивість є очевидною).

5. Нелокальна за часом задача. Символом $\overset{\circ}{P}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, позначимо клас функцій (символів) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умови:

1) φ — парна функція;
2) φ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$;
3) $e^\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$.

Наприклад, нехай $\varphi(x) = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — парний поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову

$$\exists c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{Re} P(x) \le -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, що P — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$, де $\alpha = \dfrac{1}{2b}$. Крім того,

$$\left|e^{P(x)}\right| = e^{\operatorname{Re} P(x)} \le e^{-c|x|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\exists c_1 > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \quad \left|e^{P(z)}\right| \le e^{|P(z)|} \le e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді з огляду на теореми 1 – 3 з [1, с. 252 – 260], які є узагальненнями теореми Фрагмена – Ліндельофа, дістанемо, що ціла парна функція $e^{P(z)}$ задовольняє нерівність

$$\left|e^{P(z)}\right| \le c_0 e^{-c_2|x|^{2b} + c_3|y|^{2b}}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

З останньої нерівності та характеристики просторів $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$ випливає, що $e^\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$, де $\alpha = \dfrac{1}{2b}$.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_\varphi u(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{13}$$

де $A_\varphi = \varphi(B_\nu)$ — оператор Бесселя нескінченного порядку у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, побудований за функцією $\varphi \in \overset{\circ}{P}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$ (див. п. 3). При цьому A_φ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за допомогою перетворення Бесселя, символом якого є функція φ.

Наприклад, якщо розглянути рівняння (13) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(x) = -x^2,\ x \in \mathbb{R},\ \varphi \in \overset{\circ}{P}{}^{1/2}_{1/2}$, то в цьому випадку (13) набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Аналогічно, якщо $\varphi(x) = -x^{2b},\ b \in \mathbb{N},\ \varphi \in \overset{\circ}{P}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, де $\alpha = \dfrac{1}{2b}$, то рівняння (13) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{b-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^b u, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Отже, умови на функцію φ є певним аналогом умови “параболічності” для сингулярних параболічних рівнянь із оператором Бесселя [4].

Під розв’язком рівняння (13) розуміємо функцію $u(t,x)$, яка задовольняє умови:

1) $u(t,\cdot) \in C^1(0,\infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$;
2) $u(\cdot,x) \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ при кожному $t \in (0,T]$;
3) $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (13).

Для рівняння (13) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв’язок рівняння (13), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \ldots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}, \tag{14}$$

де $m \in \mathbb{N},\ \{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\} \subset (0,\infty),\ 0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$, — фіксовані параметри, причому $\mu > m\sum_{k=1}^{m}\mu_k$.

Розв’язок задачі (13), (14) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя у вигляді $u(t,x) = F_B^{-1}[v(t,\sigma)],\ (t,x) \in \Omega$. Для функції $v: \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = \varphi(\sigma)v(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{15}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F_B[f](\sigma)$. Загальний розв’язок рівняння (15) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{t\varphi(\sigma)\}, \tag{17}$$

де $c = c(\sigma)$ визначено з умови (16). Підставивши (17) у (16) знайдемо

$$c(\sigma) = \tilde{f}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Тоді

$$v(t,\sigma) = \tilde{f}(\sigma)\exp\{t\varphi(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Отже, розв'язок задачі (13), (14) має вигляд

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty v(t,\sigma) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad (t,x)\in\Omega.$$

Введемо позначення $G(t,x) = F_B^{-1}[Q(t,\sigma)]$, де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Міркуючи формально, одержимо

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,\xi) f(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x)\in\Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma)\left(\int\limits_0^\infty f(\xi) j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi\right) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Оскільки $j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) = T_x^\xi j_\nu(\sigma x)$ (див. п. 2), то

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty \left(c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}\, d\sigma\right) f(\xi)\xi^{2\nu+1}\, d\xi.$$

Далі зауважимо, що

$$T_x^\xi G(t,x) = b_\nu \int\limits_0^\pi G\left(t, \sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega =$$

$$= b_\nu \int\limits_0^\pi \left(c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) j_\nu\left(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sigma^{2\nu+1}\, d\sigma\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma)\left(b_\nu \int\limits_0^\pi j_\nu\left(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega\right)\sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}\, d\sigma.$$

Отже,

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,x) f(\xi)\xi^{2\nu+1}\, d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Коректність проведених тут перетворень (зокрема, правомірність застосування теореми Фубіні) випливає з властивостей функції Q, які ми наведемо далі.

Оскільки $\varphi \in \overset{\circ}{P}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$, то існують чсла $c_0,\ a,\ b > 0$ такі, що

$$\left|e^{\varphi(z)}\right| \le c_0 \exp\Big\{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}\Big\}, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Надалі вважатимемо, що стала $c_0 > 0$ задовольняє умову $c_0 \le 1$. Тоді

$$\left|e^{t\varphi(z)}\right| = \left|e^{\varphi(z)}\right|^t \le \Big(\exp\Big\{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}\Big\}\Big)^t =$$

$$= \exp\Big\{-at|\sigma|^{1/\alpha} + bt|\tau|^{1/\alpha}\Big\}. \tag{18}$$

З нерівності (18) випливає, що функція $Q_1(t,\sigma) := \exp\{t\varphi(\sigma)\}$ є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$ при кожному $t \in (0,T]$.

Лема 3. *Для функції $Q_1(t,\sigma),\ (t,\sigma) \in \Omega,$ та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки*

$$\left|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)\right| \le cA^s t^{\alpha s} s^{s(1-\alpha)} \exp\Big\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

де сталі $c,\ A,\ a_1 > 0$ не залежать від t.

Доведення. Внаслідок інтегральної формули Коші

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}}\,dz, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Використовуючи (18), отримуємо нерівності

$$\left|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)\right| \le \frac{s!}{R^s}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \le \frac{s!}{R^s}\exp\Big\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha} + btR^{1/\alpha}\Big\},$$

σ_0 — точка максимуму функції $\exp\left\{-at|\xi|^{1/\alpha}\right\},\ \xi \in [\sigma - R, \sigma + R]$.

Зазначимо, що

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad |\sigma| \le R, \\ \sigma + R, & \text{якщо} \quad \sigma < -R, \\ \sigma - R, & \text{якщо} \quad \sigma > R. \end{cases}$$

Зауважимо (див. [1, с. 259]), що існують сталі $a_1, a_2 > 0$ такі, що виконується нерівність

$$\exp\Big\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha}\Big\} \le \exp\Big\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}\exp\Big\{a_2 t R^{1/\alpha}\Big\}.$$

Тоді

$$\left|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)\right| \le \frac{s!}{R^s}\exp\Big\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha} + b_1 t R^{1/\alpha}\Big\}, \quad b_1 = b + a_2, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

Для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_{s,t}(R) = R^{-s} \exp\left\{b_1 t R^{1/\alpha}\right\}$ є диференційовною на $(0, +\infty)$, до того ж

$$\lim_{R \to +\infty} g_{s,t}(R) = +\infty, \qquad \lim_{R \to +0} g_{s,t}(R) = \begin{cases} +\infty, & s \in \mathbb{N}, \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_{s,t}(R) > 0,\ R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знаходимо за допомогою методів диференціального числення:

$$\inf_{R>0} g_{s,t}(R) = \omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s}, \quad \omega = \left(\frac{b_1 e}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Таким чином,

$$\left|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)\right| \le s! \inf_R g_{s,t}(R) \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} =$$

$$= s!\omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

На підставі формули Стірлінга переконуємося, що при фіксованому $s \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\left|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)\right| \le c A^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

де сталі $c,\ A,\ a_1 > 0$ не залежать від t.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Функція*

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^{1-\alpha}$.

Доведення. З урахуванням (18) виконуються нерівності

$$Q_1(t_k,\sigma) \le \exp\left\{-a t_k|\sigma|^{1/\alpha}\right\} \le 1, \quad k \in \{1,\ldots,m\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma) \le \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1.$$

Тоді, використовуючи поліноміальну формулу, одержуємо

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^\infty \mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^m \mu_k e^{t_k\varphi(\sigma)}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\left(\mu_1 e^{t_1\varphi(\sigma)}\right)^{r_1}\ldots\left(\mu_m e^{t_m\varphi(\sigma)}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m} Q_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda := t_1r_1 + \ldots + t_mr_m,\ Q_1(\lambda,\sigma) = e^{\lambda\varphi(\sigma)}$. Звідси та з (19) випливають нерівності

$$\left|D_\sigma^s Q_2(\sigma)\right| \le cA^s s^{s(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\, \mu_0^r \lambda^{s\alpha} \exp\Big\{-\lambda a_1 |\sigma|^{1/\alpha}\Big\} \le$$

$$\le cA^s t_m^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \mu_0^r r^{s\alpha} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}, \quad s\in\mathbb{N}, \quad 0<\alpha<1,$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r.$$

Маємо

$$\left|D_\sigma^s Q_2(\sigma)\right| \le c' A_1^s s^{s(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^s = \tilde{c} A_1^s s^{s(1-\alpha)}, \tag{20}$$

де

$$\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1, \quad c' = c\mu^{-1}, \quad \tilde{c} = c' \sum\nolimits_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^s, \quad A_1 = A t_m^{\alpha}.$$

З останньої нерівності, обмеженості та парності функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$.

Лему 4 доведено.

На підставі лем 3 і 4 робимо висновок, що функція $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$ як функція σ є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$ (при кожному $t\in(0,T]$). Урахувавши (19), (20) і формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \sum_{l=0}^{s} C_s^l \Big|D_\sigma^l Q_1(t,\sigma)\Big| \Big|D_\sigma^{s-l} Q_2(\sigma)\Big| \le$$

$$\le c\tilde{c} \sum_{l=0}^{s} C_s^l A^l t^{\alpha l} l^{l(1-\alpha)} A_1^{s-l} (s-l)^{(s-l)(1-\alpha)} \exp\Big\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\Big\} \le$$

$$\le \tilde{b} B_0^s t^{\nu s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \exp\Big\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}, \quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

де

$$\tilde{b} = c\tilde{c}, \quad B_0 = 2\max\{A, A_1\}, \quad \nu = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0<t\le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad t>1. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо $0 < T \le 1$, то $t^\alpha \le 1$. Якщо $T > 1$, то для $1 < t \le T$ маємо $t^\alpha \le T^\alpha$. Звідси та з (21) випливає оцінка

$$\left|D_\sigma^s Q(t,\sigma)\right| \le \tilde{c} B^s \sigma^{s(1-\alpha)} \exp\Big\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}, \tag{22}$$

де $B = B_0 L,\ L = \max\big\{1, T^\alpha\big\}$.

Урахувавши співвідношення $F_B\Big[\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}\Big] = \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta},\ \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta \geq 1,$ одержимо, що $G(t,\cdot) = F_B^{-1}[Q(t,\cdot)] \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ при кожному $t \in (0,T]$. Виділимо в оцінках похідних функції $G(t,\sigma)$ (за змінною σ) залежність від параметра t.

Для цього зауважимо (див. [24]), що функції з простору $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ задовольняють умову

$$\exists \overline{c} = \overline{c}(\varphi) > 0 \quad \exists \overline{A} = \overline{A}(\varphi) > 0 \quad \exists \overline{B} = \overline{B}(\varphi) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$\left| x^{2k} B_\nu^q \varphi(x) \right| \leq \overline{c}\,\overline{A}^{2k}\overline{B}^{2q}(2k)^{2k(1-\alpha)}(2q)^{2q\alpha}. \tag{23}$$

І зворотне: якщо нескінченно диференційовна парна на $\mathbb{R}$ функція задовольняє умову (23), то φ є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ [24], тобто φ задовольняє умову

$$\left| x^{2k} \varphi^{(2q)}(x) \right| \leq c_0 A_0^{2k} B_0^{2q} m_{2k,2q}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $m_{2k,2q} = (2k)^{2k(1-\alpha)}(2q)^{2q\alpha}$. Зауважимо також, що для φ крім умови (23) виконуються також нерівності [24]

$$\left| x^{2l-1} \varphi^{(2n-1)}(x) \right| \leq c_1 A_1^{2l-2} B_1^{2n} m_{2l-2,2n}. \tag{24}$$

Урахувавши це зауваженння, здійснимо оцінку функції $\sigma^{2q} B_\nu^k Q(t,\sigma)$ при фіксованих $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+$. Для цього скористаємося співвідношенням, встановленим в [24]:

$$\sigma^{2q} B_\nu^k F_B[\varphi](\sigma) = \int_0^\infty B_\nu^q\Big(x^{2k}\varphi(x)\Big) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha},$$

з якого випливає, що

$$\sigma^{2q} B_\nu^k G(t,\sigma) = c_\nu \int_0^\infty B_\nu^q\Big(x^{2k} Q(t,x)\Big) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx.$$

Зауважимо також, що для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$ правильною є формула

$$B_\nu^q \varphi(x) = \sum_{i=0}^{q} c_i(\nu) \frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_i(\nu)$ — коефіцієнти, залежні від ν, причому $c_i(\nu) \leq (2\nu+1)^q \leq L^q,\ L = \max\{1, 2\nu+1\}$, функції $\frac{\varphi^{(2q-i)}}{x^i},\ i \in \{0,1,\ldots,q\}$, також є елементами простору $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$; тут

$$\left.\frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i}\right|_{x=0} := \lim_{x\to+0} \frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i}.$$

Тоді

$$B_\nu^q\Big(x^{2k}Q(t,x)\Big) = c_0(\nu)\Big(x^{2k}Q(t,x)\Big)^{(2q)} + c_1(\nu)\frac{\big(x^{2k}Q(t,x)\big)^{(2q-1)}}{x} +$$

$$+ c_2(\nu)\frac{\left(x^{2k}Q(t,x)\right)^{(2q-2)}}{x^2} + \ldots + c_q(\nu)\frac{\left(x^{2k}Q(t,x)\right)^{(q)}}{x^q}. \tag{25}$$

Згідно з формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій

$$\Big(x^{2k}Q(t,x)\Big)^{(2q)} = \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^{i}\big(x^{2k}\big)^{(i)} Q^{(2q-i)}(t,x). \tag{26}$$

Подамо праву частину (26) у вигляді суми двох доданків

$$I_1 := \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^{2i}\big(x^{2k}\big)^{(2i)} Q^{(2q-2i)}(t,x),$$

$$I_2 := \sum_{i=1}^{2q} C_{2q}^{2i-1}\big(x^{2k}\big)^{(2i-1)} Q^{(2q-2i+1)}(t,x).$$

Із результатів, одержаних у [24], випливає, що послідовність $m_{2k,2q} = (2k)^{2k\alpha}(2q)^{2q(1-\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, задовольняє нерівність

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} \le \gamma^2\left(\frac{k+q}{kq}\right)^2, \quad \gamma > 0.$$

Врахувавши нерівності

$$x^{2k}\exp\Big\{-\frac{a_1}{2}\,t|x|^{1/\alpha}\Big\} \le A^{2k}t^{-2k\alpha}(2k)^{2k\alpha}, \quad A = \left(\frac{2}{a_1}\right)^{\alpha}$$

та оцінки (22) при $s = 2q, 2q-2, \ldots,$ одержимо

$$|I_1| \le x^{2k}\Big|Q^{(2q)}(t,x)\Big| + \frac{1}{2!}\,(2k)(2k-1)(2q)(2q-1)x^{2k-2}\Big|Q^{(2q-2)}(t,x)\Big| \le$$

$$\le cA^{2k}B^{2q-2k\alpha}m_{2k,2q}\Bigg(1 + \frac{1}{2!}\,\frac{T^2}{(AB)^2}\prod_{i=0}^{1}(2k-i)(2q-i)\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} +$$

$$+ \frac{1}{4!}\frac{T^4}{(AB)^4}\prod_{i=0}^{2}(2k-i)(2q-i)\frac{m_{2k-4,2q-4}}{m_{2k-2,2q-2}}\,\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} + \ldots\Bigg)e^{-\frac{a_1}{2}t|x|^{1/\alpha}} \le$$

$$\le cA^{2k}B^{2q}t^{-2k\alpha}\Bigg(1 + \frac{1}{2!}\,\frac{(4\gamma T(2k+2q))^2}{(AB)^2} +$$

$$+ \frac{1}{4!}\frac{(4\gamma T(2k+2q))^4}{(AB)^4} + \ldots\Bigg)e^{-\frac{a_1}{2}t|x|^{1/\alpha}}m_{2k,2q} \le$$

$$\le cA^{2k}B^{2q}t^{-2k\alpha}\,\mathrm{ch}\left(\frac{8\gamma T(k+q)}{AB}\right)e^{-\frac{a_1}{2}t|x|^{1/\alpha}}m_{2k,2q}.$$

Зауважимо, що з (22), (24) випливають оцінки

$$\left|x^{2l-1}D_x^{2n-1}Q(t,x)\right| \leq c_1 A_1^{2l-2}B_1^{2n}t^{-(2l-1)\alpha}\times$$
$$\times\, m_{2l-2,2n}\exp\left\{-\frac{a_1}{2}\,t|x|^{1/\alpha}\right\}, \quad \{l,n\}\subset\mathbb{N}, \tag{27}$$

де сталі $c_1,\ A_1,\ B_1>0$ залежать, взагалі кажучи, від T. Крім того (див. [24]) виконується нерівність

$$\frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma_1\,\frac{k+q}{kq}, \quad \gamma_1>0. \tag{28}$$

Врахувавши (27), (28), одержимо

$$|I_2| \leq c_1 A_1^{2k}B_1^{2q}t^{-(2k-1)\alpha}m_{2k,2q}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{A_1^2B_1^0}\prod_{i=0}^{0}(2k-i)(2q-i)\frac{m_{2k-4,2q-2}}{m_{2k-2,2q-2}}\,\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}}+\ldots\right)\times$$
$$\times\, e^{-\frac{a_1}{2}t|x|^{1/\alpha}} \leq c_1\,\frac{B_1}{A_1}\,T^\alpha A_1^{2k}B_1^{2q}t^{-2k\alpha}m_{2k,2q}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{1!}+\frac{4\gamma_1T(2k+2q)}{A_1B_1}+\frac{1}{3!}\,\frac{(4\gamma_1T(2k+2q))^3}{(A_1B_1)^3}+\ldots\right)e^{-\frac{a_1}{2}t|x|^{1/\alpha}} \leq$$
$$\leq c_1\,\frac{B_1}{A_1}\,T^\alpha A_1^{2k}B_1^{2q}t^{-2k\alpha}\,\mathrm{sh}\left(\frac{8\gamma_1T(k+q)}{A_1B_1}\right)e^{-\frac{a_1}{2}\,t|x|^{1/\alpha}}m_{2k,2q}.$$

Тоді

$$\left|\left(x^{2k}Q(t,x)\right)^{(2q)}\right| \leq |I_1|+|I_2| \leq c_2A_2^{2k}B_2^{2q}t^{-2k\alpha}m_{2k,2q}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{8\tilde\gamma T(k+q)}{d}\right\}\exp\left\{-\frac{a_1}{2}\,t|x|^{1/\alpha}\right\},$$

де

$$c_2=\max\left\{c,\frac{B_1}{A_1}\,T^\alpha c_1\right\}, \quad A_2=\max\{A,A_1\}, \quad B_2=\max\{B,B_1\},$$
$$d=\min\{AB,A_1B_1\}, \quad \tilde\gamma=\max\{\gamma,\gamma_1\}.$$

Отже, виконується оцінка

$$\left|\left(x^{2k}Q(t,x)\right)^{(2q)}\right| \leq c_2\overline{A}_2^{2k}\overline{B}_2^{2q}t^{-2k\alpha}m_{2k,2q}e^{-\frac{a_1}{2}t|x|^{1/\alpha}},$$

де

$$\overline{A}_2=A_2\exp\left\{\frac{8\tilde\gamma T}{d}\right\}, \qquad \overline{B}_2=B_2\exp\left\{\frac{8\tilde\gamma T}{d}\right\}.$$

Інші доданки в (25) оцінюються аналогічним чином. У результаті прийдемо до нерівності

$$\left|B_\nu^q\Big(x^{2k}Q(t,x)\Big)\right| \le c_3 A_3^{2k} B_3^{2q} t^{-2k\alpha} m_{2k,2q} \exp\Big\{-\frac{a_1}{2}\,t|x|^{1/\alpha}\Big\},$$

де сталі $c_3,\ A_3,\ B_3 > 0$ не залежать від t. Тоді

$$\left|\sigma^{2q}B_\nu^k G(t,\sigma)\right| \le c_\nu \int\limits_0^\infty \left|B_\nu^q\Big(x^{2k}Q(t,x)\Big)\right| |j_\nu(\sigma x)| x^{2\nu+1}\,dx \le$$

$$\le c_4 A_3^{2k} B_3^{2q} t^{-2k\alpha} m_{2k,2q} \int\limits_0^\infty \exp\Big\{-\frac{a_1}{2}\,t|x|^{1/\alpha}\Big\} x^{2\nu+1}\,dx \le$$

$$\le c_5 A_3^{2k} B_3^{2q} t^{-2(k+\nu+1)\alpha} m_{2k,2q}. \tag{29}$$

Тут враховано оцінку

$$\left|j_\nu(\sigma x)\right| \le A_\nu, \quad A_\nu = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+1/2), \quad \{\sigma, x\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки $m_{2k,2q} = (2k)^{2k\alpha}(2q)^{2q(1-\alpha)}$, то з (29) випливає нерівність

$$\left|B_\nu^k G(t,\sigma)\right| \le c_5 A_3^{2k} t^{-2(k+\nu+1)\alpha}(2k)^{2k\alpha} \inf_q \frac{B_3^{2q}(2q)^{2q(1-\alpha)}}{|\sigma|^{2q}} \le$$

$$\le \frac{c_5}{4^\alpha} A_3^{2k} t^{-2(k+\nu+1)\alpha}(2k)^{2k\alpha} \inf_q \frac{q^{2(1-\alpha)q}}{\left(\dfrac{|\sigma|}{B^2 q}\right)^q} \le$$

$$\le c_6 A_3^{2k} t^{-2(k+\nu+1)\alpha}(2k)^{2k\alpha} \exp\Big\{-a_2|\sigma|^{1/(1-\alpha)}\Big\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

З урахуванням відомої нерівності з [1, с. 204] маємо

$$\inf_q \frac{q^{q\gamma}}{|\xi|^q} \le c e^{-\frac{\gamma}{e}|\xi|^{1/\gamma}}, \quad c = e^{\frac{\gamma e}{2}}.$$

Підсумуємо отримані результати у вигляді такого твердження.

Лема 5. $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ *при кожному* $t \in (0,T]$. *Функція* $B_\nu^k G(t,x)$ *(при кожному* $k \in \mathbb{Z}_+$*) задовольняє нерівність*

$$\left|B_\nu^k G(t,x)\right| \le c_6 A_3^{2k} t^{-2(k+\nu+1)\alpha}(2k)^{2k\alpha} \exp\Big\{-a_2|x|^{1/(1-\alpha)}\Big\}, \quad (t,x) \in \Omega,$$

де сталі $c_6,\ A_3,\ a_2 > 0$ *не залежать від* t.

Функція $G(t,x)$ диференційовна за змінною t на $(0,T]$. Справді, оскільки

$$G(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma, \tag{30}$$

то, формально диференціюючи по t (30) під знаком інтеграла, дістаємо функцію $\Lambda(t,\sigma) :=$ $:= \varphi(\sigma)Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}$. Оскільки φ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists c_\varepsilon>0 \quad \forall\sigma\in\mathbb{R}: \quad \varphi(\sigma)| \le c_\varepsilon \exp\Big\{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}.$$

Крім того, з (22) випливає оцінка

$$|Q(t,\sigma)| \le c\exp\Big\{-at_0|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}, \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad t\in[t_0,T]\subset(0,T],$$

де $t_0>0$ довільно фіксоване. І того що $|j_\nu(\sigma x)|\le A_\nu$, $\{\sigma,x\}\subset\mathbb{R}$, а $\varepsilon>0$ довільне, то, поклавши $\varepsilon=\dfrac{at_0}{4}$, прийдемо до оцінки

$$|\Lambda(t,\sigma)| \le cc_\varepsilon A_\nu \sigma^{2\nu+1}\exp\Big\{-\frac{at_0}{4}\,\sigma^{1/\alpha}\Big\}\exp\Big\{-\frac{at_0}{2}\,\sigma^{1/\alpha}\Big\} \le$$

$$\le c_0\exp\Big\{-\frac{at_0}{2}\,\sigma^{1/\alpha}\Big\}, \quad \sigma\in[0,\infty), \quad t\in[t_0,T],$$

де

$$c_0 = cc_\varepsilon A_\nu\left(\frac{4(2\nu+1)}{at_0}\right)^{2\nu+1},$$

тобто мажорантою для $\Lambda(t,\sigma)$, $t\in[t_0,T]$, $\sigma\in[0,+\infty)$, є інтегровна функція $\exp\Big\{-\dfrac{a}{2}\,t_0\sigma^{1/\alpha}\Big\}$. Отже, інтеграл від похідної (за змінною t) від підінтегральної функції в (30) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0,T]\subset(0,T]$ і тому похідну по t під знаком інтеграла в (30) можна застосовувати у кожній точці $t\in(0,T]$.

Лема 6. *Функція $G(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Бесселя (прямого й оберненого) у просторах типу $\overset{\circ}{S}$ випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F_B[G(t,\cdot)]=Q(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$ диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma)-Q(t,\sigma)] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \quad \Delta t\to 0,$$

виконується у тому розумінні, що:

1) $D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} D^s_\sigma(\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s\in\mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset$ $\subset\mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\bar{B}^s s^{s(1-\alpha)}\exp\big\{-\bar{a}|\sigma|^{1/\alpha}\big\}$,

де сталі $\bar{c}$, $\bar{B}$, $\bar{a}>0$ не залежать від Δt, якщо Δt є досить малим $(t+\theta\Delta t\le T)$. Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\in\Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому за теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = \varphi(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), \quad 0<\theta<1.$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l \varphi(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t, \sigma) \tag{31}$$

і

$$D_\sigma^s\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l \varphi(\sigma)\Big[D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l} Q(t,\sigma)\Big].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l} Q(t,\sigma) = D_\sigma^{s-l+1} Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (22) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1} Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді й

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^s\left(\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right), \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Доведемо, що виконується умова 2). Оскільки, за умовою, φ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^{1-\alpha}$, то (див. [1, с. 227])

$$\exists B_0>0 \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists c_\varepsilon>0 \quad \forall s\in\mathbb{Z}_+ \quad \forall\sigma\in\mathbb{R}: \ |D_\sigma^s\varphi(\sigma)| \le c_\varepsilon B_0^s s^{s(1-\alpha)} e^{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}}. \tag{32}$$

Врахувавши (31), (32), а також оцінки, які задовольняють похідні функції $Q(t,\sigma)$, знайдемо

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le c_1 c_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C_s^l B_0^l l^{l(1-\alpha)} B^{s-l}(s-l)^{(s-1)(1-\alpha)} \times$$
$$\times \exp\Big\{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}\Big\} \exp\Big\{-a(t+\theta\Delta t)|\sigma|^{1/\alpha}\Big\}.$$

Візьмемо $\varepsilon = at/2$. Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \overline{c}\,\overline{B}^{s(1-\alpha)} \exp\Big\{-\overline{a}|\sigma|^{1/\alpha}\Big\},$$

де $\overline{c} = c_1 c_\varepsilon$, $\overline{B} = 2\max\{B_0, B\}$, $\overline{a} = at/2$, причому всі сталі не залежать від Δt.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Виконується співвідношення*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}, \quad f \in \Big(\overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha}\Big)', \quad t\in(0,T].$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f * G(t,x) = \Big\langle f_\xi, T_x^\xi G(t,x)\Big\rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t, x)) - (f * G(t,x))] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Big\langle f_\xi, \Big[T_x^\xi G(t+\Delta t, x) - T_x^\xi G(t,x)\Big](\Delta t)^{-1}\Big\rangle.$$

Внаслідок леми 6 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\Big[T_x^\xi G(t+\Delta t, x) - T_x^\xi G(t,x)\Big] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,x)$$

виконується у сенсі збіжності за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \Big\langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[T_x^\xi G(t+\Delta t, x) - T_x^\xi G(t,x)\Big]\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,x)\Big\rangle = \Big\langle f_\xi, T_x^\xi \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)\Big\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t,x),$$

що й потрібно було довести.

Лема 8. *У просторі* $\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\Big)'$ *виконуються співвідношення:*

$$\begin{aligned} &1)\quad G(t,\cdot) \to F_B^{-1}[Q_2], \quad t \to +0; \\ &2)\quad \mu G(t,\cdot) - \sum\nolimits_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, \quad t \to +0 \end{aligned} \tag{33}$$

(тут δ — дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Врахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого та оберненого) у просторах типу $(\overset{\circ}{S})'$, для доведення твердження досить встановити, що

$$F_B^{-1}[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot), \quad t \to +0,$$

у просторі $\Big(\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}\Big)'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$ і, скориставшись тим, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, одержимо

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot), \psi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle =$$

$$= \int_0^\infty Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int_0^\infty Q_2(\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}\,d\sigma =$$

$$= \langle 1, Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle = \langle Q_2(\cdot), \psi(\cdot)\rangle.$$

2. Урахувавши твердження 1 леми 8, одержимо

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F_B^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) =$$

$$= \mu F_B^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F_B^{-1}[Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)] =$$

$$= F_B^{-1}\left[\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\right] = F_B^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)Q_2(\cdot)\right] =$$

$$= F_B^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)^{-1}\right] = F_B^{-1}[1] = \delta.$$

Отже, співвідношення (33) виконується у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$.

Лему 8 доведено.

Зауваження 2. Якщо $\mu = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, то задача (13), (14) є задачею Коші для рівняння (13). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1,\ \sigma \in \mathbb{R},\ G(t,x) = F_B^{-1}\left[e^{t\varphi(\sigma)}\right]$ і $G(t,\cdot) \to$ $\to F_B^{-1}[1] = \delta$ при $t \to +0$ у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$.

Лема 9. *Нехай*

$$\omega(t,x) := f * G(t,x), \quad f \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)', \quad (t,x) \in \Omega,$$

де $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$ *— клас згортувачів у просторі* $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$. *Тоді у просторі* $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$ *виконується граничне співвідношення*

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot) \to f, \quad t \to +0. \tag{34}$$

Доведення. Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$F_B\left[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)\right] \to F_B[f], \quad t \to +0,$$

виконується у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}\right)' = F_B\left[\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'\right]$. Згідно з умовою узагальнена функція f — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ (при кожному $t \in (0,T]$), тому (див. теорему 2)

$$F_B[\omega(t,x)] = F_B[f * G(t,x)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Оскільки $Q(t,\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}\right)'$ (див. доведення твердження 1 леми 8), а $F_B[f]$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, то у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}\right)'$ виконується граничне співвідношення

$$F_B\left[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)\right] = F_B[f]\left(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot)\right) \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} F_B[f]\left(\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\right) =$$

$$= F_B[f]\left(Q_2(\cdot)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)\right) =$$

$$= F_B[f]\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)^{-1}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right) =$$

$$= F_B[f].$$

Лему 9 доведено.

Функція $\omega(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, є розв'язком рівняння (13). Справді, оскільки f — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, то

$$A_\varphi\omega(t,x) = F_B^{-1}[\varphi(\sigma)F_B[f*G(t,\cdot)]] = F_B^{-1}[\varphi(\sigma)F_B[f](\sigma)Q(t,\sigma)] =$$

$$= F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F_B[f](\sigma)\right] = F_B^{-1}\left[F_B\left[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right]F_B[f]\right] =$$

$$= F_B^{-1}\left[F_B\left[f*\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right]\right] = f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

З іншого боку (див. лему 7),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f*G(t,\cdot)\right) = f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $\omega(t,x)$ задовольняє рівняння (13).

З леми 9 випливає, що для рівняння (13) нелокальну m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (13), який задовольняє умову

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f\in\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)', \tag{35}$$

де граничне співвідношення (35) розглядається у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$ (обмеження на параметри $\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m,\ t_1,\ldots,t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (13), (14)).

Із доведеного раніше випливає, що функція $u(t,x) = f*G(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, є розв'язком рівняння (13). Якщо $f=\delta\in\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$, то $f*G(t,x)=G(t,x)$, тобто $G(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, також є розв'язком рівняння (13). Урахувавши цей факт, а також співвідношення (33), функцію G надалі називатимемо фундаментальним розв'язком задачі (13), (35).

Теорема 3. *Задача (13), (35) коректно розв'язна, її розв'язок визначає формула*

$$u(t,x) = f*G(t,x), \quad (t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot)\in\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

Доведення. Функція $f*G(t,x)$ задовольняє рівняння (13). Розв'язок неперервно залежить від f в умові (35) у тому розумінні, що якщо $\{f,f_n,n\ge1\}\subset\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$ і $f_n\to f$ при

$n \to \infty$ у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$, то $u_n = f_n * G(t,x) \to u = f * G(t,x)$ при $n \to \infty$ у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$. Ця властивість випливає з властивості неперервності згортки.

Залишається переконатися в тому, що задача (13), (35) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A^*_{\varphi} v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}, \quad 0 \le t < t_0 \le T, \tag{36}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)', \tag{37}$$

де A^*_{φ} — звуження спряженого оператора до оператора A_{φ} на простір $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha} \subset \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$. Умову (37) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (36), (37) є розв'язною при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0} : \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)' \to \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$ розв'язок задачі (36), (37). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і має властивості

$$\forall \psi \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)': \quad \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} + A^*_{\varphi} Q^t_{t_0}\psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi;$$

границю розглядають у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$.

Розглянемо розв'язок $u(t,x), (t,x) \in \Omega$, який розумітимемо як регулярний функціонал із простору $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)' \supset \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$. Доведемо, що задача (13), (35) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (13) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x) = 0$ (при кожному $t \in (0,T]$). Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, де ψ — довільний елемент із простору $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha} \subset \left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (13), (36), отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\right\rangle = \\ &= \left\langle A_{\varphi}u, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle - \left\langle u, A^*_{\varphi}Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = \\ &= \left\langle A_{\varphi}u, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle - \left\langle A_{\varphi}u, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = 0, \quad t \in [0,t_0).\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій маємо співвідношення

$$\lim_{t \to t_0}\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = \mathrm{const} \equiv c_0, \quad c_0 = c_0(t_0),$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (14) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0}\langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \langle u(t_k,\cdot), \psi\rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$. Справді, нехай це не так. Наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \beta_k = 0,$$

де $\beta_k = c_k/c_0$, тобто $\mu = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \beta_k$. Оскільки за умовою $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, де $\mu_1, \ldots, \mu_m$ фіксовані, то одержана суперечність доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно переконуємося в тому, що $c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Таким чином, $\langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, тобто $u(t_0, \cdot)$ — нульовий функціонал із простору $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha,*}\right)'$. Оскільки $t_0 \in (0, T]$ і t_0 — вибране довільним чином, то $u(t, x) = 0$ для всіх $t \in (0, T]$.

Теорему 3 доведено.

Як приклад, розглянемо рівняння (13) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$. У цьому випадку

$$A_\varphi = B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{d}{dx}, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

а рівняння (13) — це рівняння з оператором Бесселя

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}. \tag{38}$$

Функція $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$, є елементом класу $\overset{\circ}{P}{}^{1/2}_{1/2}$. Справді, оскільки

$$\left|e^{-z^2}\right| = \left|e^{-(x+iy)^2}\right| = e^{-x^2+y^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

то з характеристики просторів S^{β}_{α} випливає, що $e^{-x^2} \in \overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2}$, тому що в даному випадку $\alpha = 1/2$, $1/(1-\beta) = 1/2$, тобто $\beta = 1/2$. Крім того, функція $\varphi(x) = -x^2$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2}$.

Згідно з теоремою 3 нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (38) коректно розв'язна, якщо $f \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*}\right)'$, при цьому $u(t, x) = f * G(t, x)$, де

$$G(t, x) = 2^{-\nu} \Gamma^{-1}(\nu + 1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1 + \ldots + r_m} \frac{r!(\mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m})}{r_1! \ldots r_m!} \times$$

$$\times (2\lambda(t, r))^{-(\nu+1)} \exp\left\{-x^2/(4\lambda(t, r))\right\},$$

де $\lambda(t, r) = t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t$. Зокрема, якщо $f = \delta \in \left(\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*}\right)'$, $m = 1$, $t_1 = T$ (випадок двоточкової задачі), то

$$u(t, x) = G(t, x) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu + 1) \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \times$$

$$\times \frac{1}{(t + rT)^{\nu+1}} \exp\left\{\frac{-x^2}{4(t + rT)}\right\}, \quad \mu > \mu_1.$$

Наведемо ще приклад узагальненої функції з простору $\left(\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*}\right)'$. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} \exp\{a|x|^{-\alpha}\}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \quad a, \alpha > 0, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Відомо [28], що ця функція допускає регуляризацію у просторі узагальнених функцій $\left(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1/2}\right)' \subset \left(\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2}\right)'$, де $1 < \beta < 1 + 1/\alpha$. Крім того, f — фінітна узагальнена функція (тому що носій $(\mathrm{supp}) f$ — відрізок $[-1,1]$), тобто f — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2}$ (див. [1, с. 173]). Отже, підхід, розглянутий у цій роботі, дозволяє досліджувати нелокальну m-точкову за часом задачу для рівняння (13) з початковою функцією, яка може мати в певній точці особливість навіть “експоненціального” порядку.

Література

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
2. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
3. М. Л. Горбачук, П. И. Дудников, *О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 4, 9 – 11 (1981).
4. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
5. В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
6. Я. И. Житомирский, *Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя*, Мат. сб., **36**, № 2, 299 – 310 (1955).
7. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S*, Технодрук, Чернівці (2019).
8. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высш. школа, Москва (1995).
9. И. А. Белавин, С. П. Капица, С. П. Курдюмов, *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **38**, № 6, 885 – 902 (1998).
10. А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач*, Наука, Москва (1980).
11. В. К. Романко, *Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **10**, № 11, 117 – 131 (1974).
12. В. К. Романко, *Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений*, Мат. заметки, **37**, № 7, 727 – 733 (1985).
13. А. А. Макаров, *Существование корректной двухточечной краевой задачи для систем псевдодифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения, **30**, № 1, 144 – 150 (1994).
14. В. И. Чесалин, *Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения, **15**, № 11, 2104 – 2106 (1979).
15. В. В. Городецький, Я. М. Дрінь, *Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **66**, № 5, 619 – 633 (2014).
16. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для сингулярних еволюційних рівнянь параболічного типу*, Книги XXI, Чернівці (2010).
17. J. Chabrowski, *On the non-local problems with a functional for parabolic equation*, Funkcial. Ekvac., **27**, 101 – 123 (1984).
18. N. L. Lazetic, *On classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **67**, 53 – 75 (2010).

19. Я. М. Дрінь, *Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь*, Допов. НАН України, № 7, 7 – 11 (2010).

20. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).

21. Б. Л. Гуревич, *Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем*, Докл. АН СССР, **99**, № 6, 893 – 896 (1954).

22. Т. І. Готинчан, Р. М. Атаманюк, *Різні форми означення просторів типу W*, Наук. вісн. Чернівец. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика, Рута, Чернівці, вип. 111, 21 – 26 (2001).

23. Б. И. Левитан, *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*, Успехи мат. наук., **6**, вып. 2, 102 – 143 (1951).

24. В. В. Городецький, Т. І. Готинчан, *Перетворення Бесселя у просторах типу* $\overset{\circ}{S}$, Буковин. мат. журн., **5**, № 3-4, 50 – 55 (2017).

25. М. І. Матійчук, *Параболічні сингулярні крайові задачі*, Ін-т математики НАН України, Київ (1999).

26. Т. Корн, Г. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).

27. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши*, Успехи мат. наук, **8**, вып. 6, 3 – 54 (1953).

28. В. В. Городецький, Я. М. Дрінь, М. І. Нагнибіда, *Узагальнені функції. Методи розв'язування задач*, Книги XXI, Чернівці (2011).

Одержано 03.10.22