УДК 517.926.7

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕНОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОХІДНИХ І ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

М. А. Єлішевич

Київ. нац. ун-т будівництва і архітектури
просп. Повітрофлотський, 31, Київ, 03037, Україна
e-mail: m-a-e@i.ua

We establish conditions of solvability and determine the general solution and the solution of the Cauchy problem for the system of linear inhomogeneous differential equations of the first order with a degenerate matrix at derivatives and the pulse action at fixed instants of time.

Визначено умови розв'язності та побудовано загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з виродженою матрицею при похідних і імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

1. Постановка задачі. Для системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a;b] \setminus \{t_i, i = \overline{1,N}\}, \tag{1}$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \eta_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

розглянуто задачу Коші з початковою умовою

$$x(\tau_0) = x_0, \quad \tau_0 \in [a;b], \tag{3}$$

де $t_i,\ i = \overline{1,N},$ — точки імпульсних дій, $a \le t_1 < \ldots < t_N \le b,\ A(t),\ B(t)$ — квадратні матриці-функції порядку $n,\ f(t)$ — вектор-функція розмірності $n,\ A(t), B(t), f(t) \in \in C^\infty[a;b] \setminus \{t_i, i = \overline{1,N}\}$ дійсні або комплексні, в точках $t_i,\ i = \overline{1,N}$, можуть мати розриви першого роду, $S_i,\ i = \overline{1,N},$ — сталі квадратні матриці порядку $n,\ \eta_i,\ i = \overline{1,N},\ x_0$ — сталі вектори розмірності n.

Задачу без імпульсної дії розглянуто в [1, с. 53 – 74], де розв'язок побудовано з використанням жорданових наборів векторів матриці $B(t)$ щодо оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$$

і спряженої матриці $B^*(t)$ стосовно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t),$$

формально спряженого до $L(t)$. Вони використовуються і в цій роботі. У [2, с. 45 – 52; 3, с. 234 – 236] розглянуто задачу з імпульсною дією, там матриця $B(t)$ була одиничною, а матриці $S_i,\ i = \overline{1,N}$, невиродженими.

2. Основні означення. Для зручності кожну з точок $t_i,\ i=\overline{1,N}$, будемо розглядати як дві різні точки t_i-0 і t_i+0. Похідні в цих точках розуміємо як праву і ліву відповідно. Якщо $t_1>a$, то покладемо $t_0+0=a$. Якщо $t_N<b$, то покладемо $t_{N+1}-0=b$.

Означення 1 [1, с. 54]. *Елемент $\varphi^{(1)}(t)\in\ker B(t)$ має в точці $t\in[a;b]$ скінченний жордановий ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $p,\ p\geq 1$, якщо існують вектори $\varphi^{(i)}(t),\ i=\overline{1,p}$, які задовольняють співвідношення*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t)=0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t)=L(t)\varphi^{(i-1)}(t),\quad i=\overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t)\notin\Im B(t).$$

Аналогічно визначимо ланцюжки векторів на відрізках $[t_i+0;t_{i+1}-0],\ i=\overline{0,N}$.

У цій роботі розглядаємо випадок, коли $\operatorname{rank}B(t)=\mathrm{const},\ \operatorname{rank}L(t)=\mathrm{const}$ на кожному з відрізків $[t_i+0;t_{i+1}-0],\ i=\overline{0,N}$, внаслідок чого кількості і довжини вказаних ланцюжків на кожному з цих відрізків сталі.

Деякі теореми наводимо без доказів, оскільки вони аналогічні доказам наведених раніше теорем.

3. Отриманий результат. Спочатку розглянемо випадок, коли $t_1>a,\ t_N<b$.

Розглянемо окремо кожний з відрізків $[t_k+0;t_{k+1}-0],\ k=\overline{0,N}$. Нехай k фіксоване, $t\in[t_k+0;t_{k+1}-0]$. Аналогічно з [1, с. 54] будемо вважати, що існують $r_k,\ r_k\geq 0$, скінченних жорданових ланцюжків матриці $B(t)$ стосовно оператора $L(t)$ довжин $s_{ki},\ i=\overline{1,r_k}$, $s_{k1}\geq\ldots\geq s_{kr_k}>0$, які складаються з векторів $\varphi_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_{ki}},\ i=\overline{1,r_k}$. Позначимо

$$s_k=\sum_{i=1}^{r_k}s_{ki},\quad \alpha_k=n-s_k.$$

Згідно з [1, с. 55 – 57] існують також:

– r_k скінченних жорданових ланцюжків матриці $B^*(t)$ стосовно оператора $L^*(t)$ довжин $s_{ki},\ i=\overline{1,r_k}$, які складаються з векторів $\psi_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_{ki}},\ i=\overline{1,r_k}$;

– α_k векторів $q_{ki}(t),\ i=\overline{1,\alpha_k}$;

– α_k векторів $p_{ki}(t),\ i=\overline{1,\alpha_k}$,

таких, що елементи кожної з наступних множин належать $C^\infty[t_k+0;t_{k+1}-0]$ і лінійно незалежні:

1) $q_{ki}(t),\ i=\overline{1,\alpha_k},\ \varphi_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_{ki}},\ i=\overline{1,r_k}$;

2) $B(t)q_{ki}(t),\ i=\overline{1,\alpha_k},\ L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_{ki}},\ i=\overline{1,r_k}$;

3) $p_{ki}(t),\ i=\overline{1,\alpha_k},\ \psi_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_{ki}},\ i=\overline{1,r_k}$;

4) $B^*(t)p_{ki}(t),\ i=\overline{1,\alpha_k},\ L^*(t)\psi_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_{ki}},\ i=\overline{1,r_k}$;

пари множин 1 і 4, 2 і 3 відповідно являють собою біортогональні системи

$$(B(t)q_{ki}(t),p_{ku}(t))=(q_{ki}(t),B^*(t)p_{ku}(t))=\delta_{iu},\quad i,u=\overline{1,\alpha_k},$$

$$\left(\varphi_{ki}^{(j)}(t),L^*(t)\psi_{ku}^{(v)}(t)\right)=\left(L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t),\psi_{ku}^{(v)}(t)\right)=\delta_{iu}\delta_{j+v,s_{ki}+1},\quad j,v=\overline{1,s_{ki}},\quad i,u=\overline{1,r_k};$$

усі інші скалярні добутки векторів з відповідних пар множин рівні 0.

З використанням елементів множин 1 і 3 складемо прямокутні матриці і вектори

$$Q_k(t) = [q_{k1}(t), \ldots, q_{k\alpha_k}(t)], \quad P_k(t) = [p_{k1}(t), \ldots, p_{k\alpha_k}(t)],$$

$$\Phi_{ki}(t) = \left[\varphi_{ki}^{(1)}(t), \ldots, \varphi_{ki}^{(s_{ki})}(t)\right], \quad \Psi_{ki}(t) = \left[\psi_{ki}^{(s_{ki})}(t), \ldots, \psi_{ki}^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1, r_k},$$

$X_k(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k^*(t)[L(t)Q_k(t)]x_k,$$

$$\tilde{x}_k(t) = Q_k(t)X_k(t) \int\limits_{t=t_k+0}^{t} X_k^{-1}(\tau)P_k^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{r_k} \Phi_{ki}(t) \sum_{j=0}^{s_{ki}-1} I_{s_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi_{ki}^*(t)f(t)\right],$$

тут I_i — нільпотентний блок Жордана порядку i,

$$\tilde{X}_0(t) = Q_0(t)X_0(t),$$

$\tilde{B}_0 = E_n$, $\hat{x}_0 = 0$ — нульовий вектор розмірності n, c_0 — довільний сталий вектор розмірності α_0. Усі наступні матриці і векторі будуємо для $k = \overline{1, N}$:

$$\tilde{A}_k = \operatorname{col}\left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i}(\Psi_{k1}^*(t)A(t)), \ldots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i}\left(\Psi_{kr_k}^*(t)A(t)\right)\right]\Bigg|_{t=t_k+0},$$

$$\tilde{f}_k = \operatorname{col}\left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i}(\Psi_{k1}^*(t)f(t)), \ldots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i}\left(\Psi_{kr_k}^*(t)f(t)\right)\right]\Bigg|_{t=t_k+0},$$

$$\tilde{B}_k = X_k^{-1}(t_k+0)P_k^*(t_k+0)B(t_k+0),$$

$$\tilde{X}_k(t) = Q_k(t)X_k(t)\tilde{B}_k,$$

$$\hat{A}_k = \tilde{A}_k\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_i, \quad \Xi_k = \hat{A}_k^-,$$

матриці Θ_k і Υ_k складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_k$ і $\ker \hat{A}_k^*$ відповідно,

$$\hat{x}_k = -\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{k-2}\Theta_i\right)\Xi_{k-1}\left(\tilde{A}_{k-1}\hat{x}_{k-1} + \tilde{f}_{k-1}\right) +$$

$$+ S_k\tilde{X}_{k-1}(t_k-0)\hat{x}_{k-1} + S_k\tilde{x}_{k-1}(t_k-0) + \eta_k,$$

c_k — довільний сталий вектор розмірності $\dim\ker \hat{A}_k$.

Згідно з [1, с. 61 – 66] система (1) розв'язна на кожному з відрізків $[t_k+0; t_{k+1}-0]$. При $k=0$ вона має загальний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_0(t)c_0 + \tilde{x}_0(t). \tag{4}$$

Для розв'язності задачі Коші системи (1) з початковою умовою $x(t_k+0)=y_0,\ k\in\in\{1,\ldots,N\}$ згідно з [1, с. 67 – 71] необхідно і достатньо виконання рівності

$$\tilde{A}_k y_0 + \tilde{f}_k = 0. \tag{5}$$

При її виконанні вона має єдиний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_k(t) y_0 + \tilde{x}_k(t). \tag{6}$$

Теорема 1. *Якщо* $a<t_1,\ b>t_N,\ r_k>0,\ \alpha_k>0,\ k=\overline{0,N}$, *то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності*

$$\Upsilon_k^*\Big(\tilde{A}_k\hat{x}_k + \tilde{f}_k\Big) = 0, \quad k=\overline{1,N}. \tag{7}$$

При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)c_N -$$

$$- \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\sum_{i=k}^{N}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\Big)+$$

$$+ \tilde{X}_k(t)\hat{x}_k + \tilde{x}_k(t), \quad t\in[t_k+0; t_{k+1}-0], \quad k=\overline{0,N}. \tag{8}$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції за кількістю точок імпульсних дій. Нехай $N=1$. Підставивши (4) у (2), отримаємо

$$x(t_1+0) = S_1\tilde{X}_0(t_1-0)c_0 + \hat{x}_1. \tag{9}$$

Для задачі Коші (1), (9), $t\in[t_1+0; t_2-0]$, умова (5) має вигляд

$$\hat{A}_1 c_0 + \tilde{A}_1\hat{x}_1 + \tilde{f}_1 = 0.$$

Ця рівність розв'язна за умови (7). Якщо вона виконується, то

$$c_0 = \Theta_1 c_1 - \Xi_1\Big(\tilde{A}_1\hat{x}_1+\tilde{f}_1\Big). \tag{10}$$

Підставивши (10) у (9) і, далі, в (4) і (6), отримаємо (8) при $N=1$.

Припустимо, що (7), (8) виконуються для всіх $N\le l$. Далі аналогічно маємо

$$x(t_{l+1}-0) = \tilde{X}_l(t_{l+1}-0)\left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{l}\Theta_i\right)c_l -$$

$$- \tilde{X}_l(t_{l+1}-0)\left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{l-1}\Theta_i\right)\Xi_l\Big(\tilde{A}_l\hat{x}_l+\tilde{f}_l\Big)+$$

$$+ \tilde{X}_l(t_{l+1}-0)\hat{x}_l + \tilde{x}_l(t_{l+1}-0),$$

$$x(t_{l+1}+0) = \left(\prod_{i=1}^{l+1} S_{l-i+2}\tilde{X}_{l-i+1}(t_{l-i+2}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{l}\Theta_i\right)c_l + \hat{x}_{l+1},$$

$$\hat{A}_{l+1}c_l + \tilde{A}_{l+1}\hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1} = 0,$$

якщо виконується умова (7), $k = l+1$, то

$$c_l = \Theta_{l+1}c_{l+1} - \Xi_{l+1}\Big(\tilde{A}_{l+1}\hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1}\Big). \tag{11}$$

Підставивши (11) у (8) при $N = l$, отримаємо (8) при $N = l+1$.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Відповідна (1), (2) однорідна система*

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [a;b] \setminus \{t_i, i = \overline{1,N}\},$$

$$x(t_i+0) = S_i x(t_i-0), \quad i = \overline{1,N},$$

розв'язна і має загальний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)c_N.$$

Наслідок 2. *Якщо для деяких k $\det B(t) \neq 0$, $t \in [t_k+0; t_{k+1}-0]$, то $r_k = 0$, матриць $\Phi_k(t)$, $\Psi_k(t)$ і рівностей (7) для цих значень k не існує, $\alpha_k = n$, $Q_k(t) \in C^\infty[t_k+0; t_{k+1}-0]$ — довільна невироджена квадратна матриця порядку n, $P_k(t) = \big[(B(t)Q_k(t))^{-1}\big]^*$.*

Якщо $\alpha_{m_u} = 0$, $u = \overline{1,v}$, то матриць $Q_{m_u}(t)$, $P_{m_u}(t)$ не існує, $r_{m_u} = n$; покладемо $\hat{x}_{m_u} = 0$, $u = \overline{1,v}$ — нульові вектори розмірності n, $\hat{x}_k = S_k\tilde{X}_{k-1}(t_k-0)\hat{x}_{k-1} + S_k\tilde{x}_{k-1}(t_k - 0) + \eta_k$, $k = \overline{m_u+1, m_{u+1}-1}$, $u = \overline{1, v-1}$, $k = \overline{m_v+1, N}$.

Теорема 2. *Якщо $\alpha_{m_u} = 0$, $u = \overline{1,v}$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7), $k = \overline{1,m_1}$,*

$$\tilde{A}_k\hat{x}_k + \tilde{f}_k = 0, \quad k = \overline{m_1+1, N}. \tag{12}$$

При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} x(t) = {}& \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{m_1}\Theta_i\right)c_{m_1} - \\ & - \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\sum_{i=k}^{m_1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i + \tilde{f}_i\Big) + \\ & + \tilde{X}_k(t)\hat{x}_k + \tilde{x}_k(t), \quad t \in [t_k+0; t_{k+1}-0], \quad k = \overline{0, m_1-1}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$x(t) = \tilde{X}_k(t)\hat{x}_k + \tilde{x}_k(t), \quad t \in [t_k+0; t_{k+1}-0], \quad k = \overline{m_1, N}. \tag{14}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1 для розв'язності системи (1), (2) при $t \in [t_0+0; t_{m_1}-0]$ необхідно і достатньо виконання рівностей (7), $k = \overline{1, m_1-1}$. Для $k = m_1$ ця рівність теж повинна виконуватися для розв'язності у точці $t = t_{m_1} + 0$. При їхньому виконанні система має розв'язок (13).

При $t \in [t_{m_1} + 0; t_{m_1+1} - 0]$ з (6) випливає $x(t) = \tilde{x}_k(t)$. Умова (5) при $k = m_1 + 1$ має вигляд (12), при її виконанні система (1), (2) має розв'язок (14). Аналогічно отримаємо умови розв'язності і розв'язок системи для всіх інших значень k.

Теорему 2 доведено.

Якщо $t_1 = a$ (відрізок $[t_1 + 0; t_1 - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\hat{A}_0 = [A(t_1 - 0), -B(t_1 - 0)]$, $\hat{\Xi}_0 = \hat{A}_0^-$, матриці $\hat{\Theta}_0$ і Υ_0 складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_0$ і $\ker \hat{A}_0^*$ відповідно, $\hat{\Xi}_0 = \mathrm{col}\Big(\Xi_0, \tilde{\Xi}_0\Big)$, $\hat{\Theta}_0 = \mathrm{col}\Big(\Theta_0, \tilde{\Theta}_0\Big)$, де Ξ_0 і $\tilde{\Xi}_0$ — квадратні матриці порядку n, Θ_0 і $\tilde{\Theta}_0$ — прямокутні матриці розмірності $n \times \dim \ker \hat{A}_0$,

$$\tilde{X}_0(t_1 - 0) = \Theta_0, \quad \tilde{x}_0(t_1 - 0) = -\Xi_0 f(t_1 - 0), \tag{15}$$

c_0 — довільній сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_0$.

Теорема 3. *Якщо $a = t_1$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7),*

$$\Upsilon_0^* f(t_1 - 0) = 0. \tag{16}$$

При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (8), $k = \overline{1, N}$,

$$x(t_1 - 0) = \left(\prod_{j=0}^{N} \Theta_j\right) c_N - \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \Theta_j\right) \Xi_i \Big(\tilde{A}_i \hat{x}_i + \tilde{f}_i\Big) + \tilde{x}_0(t_1 - 0), \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt} x(t)\bigg|_{t=t_1-0} = \tilde{\Theta}_0 \left(\prod_{j=1}^{N} \Theta_j\right) c_N - \tilde{\Theta}_0 \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Theta_j\right) \Xi_i \Big(\tilde{A}_i \hat{x}_i + \tilde{f}_i\Big) - \tilde{\Xi}_0 f(t_1 - 0). \tag{18}$$

Доведення. Зобразимо (1) при $t = t_1 - 0$ у вигляді

$$\hat{A}_0 \, \mathrm{col}\left(x(t_1 - 0), \frac{d}{dt} x(t)\bigg|_{t=t_1-0}\right) + f(t_1 - 0) = 0.$$

Ця рівність розв'язна за умови (16). Якщо вона виконується, то

$$x(t_1 - 0) = \Theta_0 c_0 - \Xi_0 f(t_1 - 0), \qquad \frac{d}{dt} x(t)\bigg|_{t=t_1-0} = \tilde{\Theta}_0 c_0 - \tilde{\Xi}_0 f(t_1 - 0). \tag{19}$$

(19) з урахуванням (15) співпадає з (4) при $t = t_1 - 0$. Подальше доведення співпадає з доведенням теореми 1.

Теорему 3 доведено.

Якщо $t_N = b$ (відрізок $[t_N + 0; t_{N+1} - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\tilde{A}_N = A(t_N + 0)$, $\tilde{f}_N = f(t_N + 0)$,

$$\hat{A}_N = \left[\tilde{A}_N \left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1} \tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1} - 0)\right) \prod_{i=1}^{N-1} \Theta_i, -B(t_N + 0)\right],$$

$\hat{\Xi}_N = \hat{A}_N^-$, матриці $\hat{\Theta}_N$ і Υ_N складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_N$ і $\ker \hat{A}_N^*$ відповідно, $\hat{\Xi}_N = \mathrm{col}(\Xi_N, \tilde{\Xi}_N)$, де Ξ_N — прямокутна матриця розмірності $\dim \ker \hat{A}_{N-1} \times n$, $\tilde{\Xi}_N$ — квадратна матриця порядку n, $\hat{\Theta}_N = \mathrm{col}\Big(\Theta_N, \tilde{\Theta}_N\Big)$, де Θ_N і $\tilde{\Theta}_N$ — прямокутні матриці розмірності $\dim \ker \hat{A}_{N-1} \times \dim \ker \hat{A}_N$ і $n \times \dim \ker \hat{A}_N$ відповідно.

Теорема 4. *Якщо* $b = t_N$, *то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7). При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (8),* $k = \overline{0, N-1}$,

$$x(t_N+0) = \left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1}\tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)c_N -$$

$$-\left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1}\tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}\Theta_i\right)\Xi_N\left(\tilde{A}_N\hat{x}_N+\tilde{f}_N\right)+\hat{x}_N, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt}x(t)\bigg|_{t=t_N+0} = \tilde{\Theta}_N c_N - \tilde{\Xi}_N\left(\tilde{A}_N\hat{x}_N+\tilde{f}_N\right). \quad (21)$$

Доведення. За методом, використаним у теоремі 1, побудуємо розв'язок при $t \in [t_0 + + 0; t_N - 0]$. Далі маємо

$$x(t_N+0) = \left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1}\tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}\Theta_i\right)c_{N-1}+\hat{x}_N. \quad (22)$$

Підставивши (22) у (1), отримаємо

$$\hat{A}_N \mathrm{col}\left(c_{N-1}, \frac{d}{dt}x(t)\bigg|_{t=t_N+0}\right)+\tilde{A}_N\hat{x}_N+\tilde{f}_N = 0.$$

Ця рівність розв'язна за умови (7), $k = N$. Подальше доведення співпадає з доведенням теореми 1.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Якщо* $a = t_1$, $b = t_N$, *то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (7), (16). При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (8),* $k = \overline{1, N-1}$, *(17), (18), (20), (21).*

Перейдемо до задачі Коші (1)–(3). Нехай $\tau_0 \in [t_l+0; t_{l+1}-0]$, $l \in \{0,\ldots,N\}$. Покладемо

$$\tilde{A} = \mathrm{col}\left[\sum_{i=0}^{s_{l1}-1} I^i_{s_{l1}}\frac{d^i}{dt^i}(\Psi^*_{l1}(t)A(t)),\ldots,\ \sum_{i=0}^{s_{lr_l}-1} I^i_{s_{lr_l}}\frac{d^i}{dt^i}\big(\Psi^*_{lr_l}(t)A(t)\big)\right]\Bigg|_{t=\tau_0},$$

$$\tilde{f} = \mathrm{col}\left[\sum_{i=0}^{s_{l1}-1} I^i_{s_{l1}}\frac{d^i}{dt^i}(\Psi^*_{l1}(t)f(t)),\ldots,\ \sum_{i=0}^{s_{lr_l}-1} I^i_{s_{lr_l}}\frac{d^i}{dt^i}\big(\Psi^*_{lr_l}(t)f(t)\big)\right]\Bigg|_{t=\tau_0},$$

$$\tilde{B} = X_l^{-1}(\tau_0)P_l^*(\tau_0)B(\tau_0),$$

$$\hat{A} = \tilde{B}_l\left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right), \qquad \Xi = \hat{A}^-,$$

матриці Θ і Υ складемо з елементів базисів $\ker\hat{A}$ і $\ker\hat{A}^*$ відповідно, c — довільний сталий вектор розмірності $\dim\ker\hat{A}$.

Теорема 6. *Якщо* $a < t_1,\ b > t_N,\ r_k > 0,\ \alpha_k > 0,\ k = \overline{0, N}$, *то для розв'язності задачі Коші (1) – (3) необхідно і достатньо виконання умов (7),*

$$\tilde{A}x_0 + \tilde{f} = 0, \tag{23}$$

$$\Upsilon^* \Bigg\{ \tilde{B}x_0 - \tilde{B}_l \Bigg[\int\limits_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0) \right) \sum_{i=l}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Theta_j \right) \Xi_i \Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i + \tilde{f}_i \Big) + \hat{x}_l \Bigg] \Bigg\} = 0. \tag{24}$$

При виконанні зазначених умов вона має розв'язки

$$x(t) = \tilde{X}_k(t) \left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0) \right) \left(\prod_{i=1}^{N} \Theta_i \right) \Theta c +$$

$$+ \tilde{X}_k(t) \left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0) \right) \left(\prod_{i=1}^{N} \Theta_i \right) \times$$

$$\times\, \Xi \Bigg\{ \tilde{B}x_0 - \tilde{B}_l \Bigg[\int\limits_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0) \right) \sum_{i=l}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Theta_j \right) \Xi_i \Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i + \tilde{f}_i \Big) + \hat{x}_l \Bigg] \Bigg\} -$$

$$- \tilde{X}_k(t) \left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0) \right) \sum_{i=k}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Theta_j \right) \Xi_i \Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i + \tilde{f}_i \Big) +$$

$$+ \tilde{X}_k(t)\hat{x}_k + \tilde{x}_k(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, N}. \tag{25}$$

Доведення. Підставивши (8) у (3) і помноживши зліва на неособливу згідно з [1, с. 64 – 65] матрицю

$$\Big[\tilde{B}^*, L^*(\tau_0)\Psi_{l1}(\tau_0), \ldots, L^*(\tau_0)\Psi_{lr_l}(\tau_0) \Big]^*,$$

отримаємо

$$\tilde{B}x_0 = \hat{A}c_N + \tilde{B}_l \Bigg[\int\limits_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0) \right) \sum_{i=l}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Theta_j \right) \Xi_i \Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i + \tilde{f}_i \Big) + \hat{x}_l \Bigg], \tag{26}$$

$$\Big(x_0, L^*(t)\psi_{li}^{(j)}(t)\Big)\Big|_{t=\tau_0} = -\sum_{u=0}^{j-1}\frac{d^u}{dt^u}\Big(f(t),\psi_{li}^{(j-u)}(t)\Big)\Bigg|_{t=\tau_0}, \quad j=\overline{1,s_{li}}, \quad i=\overline{1,r_l}. \tag{27}$$

З (27) випливає (23) [1, с. 69 – 70]. Рівність (26) розв'язна за умови (24). При її виконанні

$$c_N = \Theta c + \Xi\Bigg\{\tilde{B}x_0 - \tilde{B}_l\Bigg[\int\limits_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \left(\prod_{i=1}^{l} S_{l-i+1}\tilde{X}_{l-i}(t_{l-i+1}-0)\right)\sum_{i=l}^{N}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\Big)+\hat{x}_l\Bigg]\Bigg\}. \tag{28}$$

Підставивши (28) у (8), отримаємо (25).

Теорему 6 доведено.

Якщо $\alpha_{m_u}=0,\ u=\overline{1,v}$, і $l\in\{0,\ldots,m_1-1\}$, то розв'язок задачі Коші (1) – (3) будуємо аналогічно до теореми 6. Якщо $l\in\{m_1,\ldots,N\}$, то умови розв'язності задачі Коші (1) – (3) мають вигляд (7), $k=\overline{1,m_1}$, (12), (23). При їхньому виконанні її розв'язки співпадають із загальним розв'язком (13), (14) системи (1), (2).

Якщо $t_1=a$ і $l\in\{1,N\}$, то розв'язок задачі Коші (1) – (3) будуємо аналогічно до теореми 6. Якщо $l=0$, то покладемо

$$\hat{A}=\prod_{i=0}^{N}\Theta_i.$$

Теорема 7. *Якщо $t_1=a$ і $l=0$, то для розв'язності задачі Коші (1) – (3) необхідно і достатньо виконання умов (7), (16),*

$$\Upsilon^*\left[x_0+\sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\Big)-\tilde{x}_0(t_1-0)\right]=0.$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки

$$x(t_1-0)=x_0,$$

$$\frac{d}{dt}x(t)\bigg|_{t=t_1-0}=\tilde{\Theta}_0\left(\prod_{j=1}^{N}\Theta_j\right)\Theta c-$$

$$-\tilde{\Theta}_0\left(\prod_{j=1}^{N}\Theta_j\right)\Xi\left[x_0+\sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\Big)-\tilde{x}_0(t_1-0)\right]-$$

$$-\tilde{\Theta}_0\sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\Big(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\Big)-\tilde{\Xi}_0 f(t_1-0),$$

$$x(t) = \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)\Theta c-$$

$$-\tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)\Xi\times$$

$$\times\left[x_0+\sum_{i=1}^{N}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\left(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\right)-\tilde{x}_0(t_1-0)\right]-$$

$$-\tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\sum_{i=k}^{N}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\left(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\right)+$$

$$+\tilde{X}_k(t)\hat{x}_k+\tilde{x}_k(t),\quad t\in[t_k+0;t_{k+1}-0],\quad k=\overline{1,N}.$$

Якщо $b = t_N$ і $l \in \{0, N-1\}$, то розв'язок задачі Коші (1) – (3) будуємо аналогічно до теореми 6. Якщо $l = N$, то покладемо

$$\hat{A} = \left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1}\tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right).$$

Теорема 8. *Якщо $b = t_N$ і $l = N$, то для розв'язності задачі Коші (1) – (3) необхідно і достатньо виконання умов (7),*

$$\Upsilon^*\left[x_0+\left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1}\tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}\Theta_i\right)\Xi_N\left(\tilde{A}_N\hat{x}_N+\tilde{f}_N\right)-\hat{x}_N\right]=0.$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки

$$x(t) = \tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)\Theta c-$$

$$-\tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\Theta_i\right)\Xi\times$$

$$\times\left[x_0+\left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1}\tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1}-0)\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}\Theta_i\right)\Xi_N\left(\tilde{A}_N\hat{x}_N+\tilde{f}_N\right)-\hat{x}_N\right]-$$

$$-\tilde{X}_k(t)\left(\prod_{i=1}^{k} S_{k-i+1}\tilde{X}_{k-i}(t_{k-i+1}-0)\right)\sum_{i=k}^{N}\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Theta_j\right)\Xi_i\left(\tilde{A}_i\hat{x}_i+\tilde{f}_i\right)+$$

$$+\tilde{X}_k(t)\hat{x}_k+\tilde{x}_k(t),\quad t\in[t_k+0;t_{k+1}-0],\quad k=\overline{0,N-1},$$

$$x(t_N+0)=x_0,$$

$$\frac{d}{dt}x(t)\bigg|_{t=t_N+0} = \tilde{\Theta}_N \Theta c - \tilde{\Theta}_N \Xi \Bigg[x_0 + \left(\prod_{i=1}^{N} S_{N-i+1} \tilde{X}_{N-i}(t_{N-i+1} - 0) \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^{N-1} \Theta_i \right) \Xi_N \left(\tilde{A}_N \hat{x}_N + \tilde{f}_N \right) - \hat{x}_N \Bigg] - \tilde{\Xi}_N \left(\tilde{A}_N \hat{x}_N + \tilde{f}_N \right).$$

4. Приклад. Нехай в (1) – (3) $n = 2,\ N = 2,\ a < t_1 < t_2 < b$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij}(t) \in C^{\infty}[a; b] \setminus \{t_k, k = 1, 2\}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$f_i(t) \in C^{\infty}[a; b] \setminus \{t_k, k = 1, 2\}, \quad i = 1, 2,$$

— дійсні скалярні функції, $b_{22},\ \eta_{ki},\ k, i = 1, 2,\ x_{0i},\ i = 1, 2$ — дійсні числа.

При $t \in [t_0 + 0; t_1 - 0]$ $b_{22} = 1,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \equiv 0.$

При $t \in [t_1 + 0; t_2 - 0]$ $b_{22} = 0,\ a_{22}(t) \neq 0.$

При $t \in [t_2 + 0; t_3 - 0]$ $b_{22} = 0,\ a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \neq 0.$

Маємо

$$r_0 = 0, \qquad \alpha_0 = 2,$$

$$Q_0(t) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_0(t) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{X}_0(t) = X_0(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^{t} a_{11}(z)dz \right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\int_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz \right) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}_0(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^{t} a_{11}(z)dz \right) \int_{t_0+0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau} a_{11}(z)dz \right) f_1(\tau)d\tau \\ \exp\left(\int_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz \right) \int_{t_0+0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau} a_{22}(z)dz \right) f_2(\tau)d\tau \end{bmatrix},$$

$$r_1 = 1, \quad s_{11} = 1, \quad \alpha_1 = 1,$$

$$\Phi_{11}(t) = \varphi_{11}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \Psi_{11}(t) = \psi_{11}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$Q_1(t)=q_{11}(t)=\begin{bmatrix}1\\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},\qquad P_1(t)=p_{11}(t)=\begin{bmatrix}1\\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$X_1(t)=\exp\left(\int\limits_{t_1+0}^{t}\big(a_{11}(z)-a_{12}(z)a_{21}(z)a_{22}^{-1}(z)\big)dz\right),$$

$$\tilde{X}_1(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) & 0\end{bmatrix}X_1(t),\qquad \tilde{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_1(t)=\begin{bmatrix}1\\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}X_1(t)\int\limits_{t_1+0}^{t}X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau-$$

$$-\begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1=\begin{bmatrix}a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0) & 1\end{bmatrix},\qquad \tilde{f}_1=a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0),$$

$$\hat{A}_1=\begin{bmatrix}0 & \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0}a_{22}(z)dz\right)\end{bmatrix},$$

$$\Xi_1=\begin{bmatrix}0\\ \exp\left(-\int_{t_0+0}^{t_1-0}a_{22}(z)dz\right)\end{bmatrix},\qquad \Theta_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \Upsilon_1=0,$$

$$\hat{x}_1=\begin{bmatrix}\eta_{11}\\ \exp\left(\int_{t_0+0}^{t}a_{22}(z)dz\right)\int_{t_0+0}^{t}\exp\left(-\int_{t_0+0}^{\tau}a_{22}(z)dz\right)f_2(\tau)d\tau+\eta_{12}\end{bmatrix},$$

$$r_2=1,\quad s_{21}=2,\quad \alpha_2=0,$$

$$\varphi_{21}^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\qquad \varphi_{21}^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}a_{12}(t)\\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t)-a_{11}(t)\end{bmatrix},$$

$$\psi_{21}^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)\end{bmatrix},\qquad \psi_{21}^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}a_{12}^{-1}(t)\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{21}(t)=\begin{bmatrix}0 & a_{12}(t)\\ 1 & a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t)-a_{11}(t)\end{bmatrix},\qquad \Psi_{21}(t)=\begin{bmatrix}a_{12}^{-1}(t) & 0\\ 0 & a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\Big(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt}\big(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\big)\Big) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}\,a_{12}^{-1}(t)\Big|_{t=t_2+0} + a_{11}(t_2+0)a_{12}^{-1}(t_2+0) & 1 \\ a_{12}^{-1}(t_2+0) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}\big(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\big)\Big|_{t=t_2+0} + a_{12}^{-1}(t_2+0)f_1(t_2+0) \\ a_{12}^{-1}(t_2+0)a_{21}^{-1}(t_2+0)f_2(t_2+0) \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Theta_2 = 1, \qquad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \eta_{21} \\ X_1(t_2-0)\eta_{11} + X_1(t_2-0)\displaystyle\int_{t_1+0}^{t_2-0} X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau + \eta_{22} \end{bmatrix}.$$

Умова (7) при $k = 1$ виконується, а при $k = 2$ набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{d}{dt}\,a_{12}^{-1}(t)\Big|_{t=t_2+0} + a_{11}(t_2+0)a_{12}^{-1}(t_2+0)\right)\eta_{21} \\ a_{12}^{-1}(t_2+0)\eta_{21} + a_{12}^{-1}(t_2+0)a_{21}^{-1}(t_2+0)f_2(t_2+0) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} X_1(t_2-0)\eta_{11} + X_1(t_2-0)\displaystyle\int_{t_1+0}^{t_2-0} X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau + \eta_{22} \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}\big(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\big)\Big|_{t=t_2+0} + a_{12}^{-1}(t_2+0)f_1(t_2+0) \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

При її виконанні система (1), (2) має загальний розв'язок (13), (14):

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\displaystyle\int_{t_0+0}^{t} a_{11}(z)dz\right)\left[c_2 + \displaystyle\int_{t_0+0}^{t}\exp\left(-\displaystyle\int_{t_0+0}^{\tau} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau\right] \\ -\exp\left(-\displaystyle\int_{t}^{t_1-0} a_{22}(z)dz\right)a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} - \exp\left(\displaystyle\int_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz\right)\eta_{12} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \exp\left(\displaystyle\int_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz\right)\left[-a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0) - \displaystyle\int_{t}^{t_1-0}\exp\left(-\displaystyle\int_{t_0+0}^{\tau} a_{22}(z)dz\right)f_2(\tau)d\tau\right] \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$t \in [t_0+0; t_1-0],$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} X_1(t)\Big(\eta_{11} + \int_{t_1+0}^{t} X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau\Big) \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)X_1(t)\Big(\eta_{11} + \int_{t_1+0}^{t} X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau\Big) \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_1+0; t_2-0], \tag{30}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\Big[a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt}\big(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\big)\Big] \end{bmatrix}, \quad t \in [t_2+0; t_3-0]. \tag{31}$$

Якщо $\tau_0 \in [t_0+0; t_1-0]$, то

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \exp\Big(-\int_{t_0+0}^{\tau_0} a_{11}(z)dz\Big) & 0 \\ 0 & \exp\Big(-\int_{t_0+0}^{\tau_0} a_{22}(z)dz\Big) \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Theta = 0, \qquad \Upsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

умова (23) відсутня, (24) має вигляд

$$\exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{\tau_0} a_{22}(z)dz\right)x_{02} - \left[-\exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{t_1-0} a_{22}(z)dz\right)a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} - \right.$$

$$\left. -\eta_{12} - a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0) - \int\limits_{t}^{t_1-0} \exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{\tau} a_{22}(z)dz\right) f_2(\tau)d\tau\right] = 0,$$

звідси

$$x_{02} = \exp\left(\int\limits_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz\right)\left[-\exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{t_1-0} a_{22}(z)dz\right)a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} - \right.$$

$$\left. -\eta_{12} - a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0) - \int\limits_{t}^{t_1-0} \exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{\tau} a_{22}(z)dz\right) f_2(\tau)d\tau\right].$$

При її виконанні задача Коші (1) – (3) має єдиний розв'язок (30), (31):

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{\tau_0}^{t} a_{11}(z)dz\right)x_{01} + \exp\left(\int\limits_{t_0+0}^{t} a_{11}(z)dz\right)\int\limits_{\tau_0}^{t}\exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{\tau} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)d\tau \\ -\exp\left(-\int\limits_{t}^{t_1-0} a_{22}(z)dz\right)a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} - \exp\left(\int\limits_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz\right)\eta_{12} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \exp\left(\int\limits_{t_0+0}^{t} a_{22}(z)dz\right)\left[-a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0) - \int\limits_{t}^{t_1-0}\exp\left(-\int\limits_{t_0+0}^{\tau} a_{22}(z)dz\right)f_2(\tau)d\tau\right]\end{bmatrix},$$

$$t \in [t_0+0; t_1-0].$$

Якщо $\tau_0 \in [t_1+0; t_2-0]$, то

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0), \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} X_1^{-1}(\tau_0) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = 0, \quad \Xi = 0, \quad \Theta = 1, \quad \Upsilon = 1,$$

умови (23), (24) мають вигляд

$$a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0)x_{01} + x_{02} + a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) = 0,$$

$$X_1^{-1}(\tau_0)x_{02} = \eta_{11} + \int\limits_{t_1+0}^{\tau_0} X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau,$$

звідки

$$x_{01} = X_1(\tau_0)\left(\eta_{11} + \int\limits_{t_1+0}^{\tau_0} X_1^{-1}(\tau)(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau))d\tau\right),$$

$$x_{02} = -a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0)X_1(\tau_0)\left(\eta_{11} + \int\limits_{t_1+0}^{\tau_0} X_1^{-1}(\tau)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau\right) -$$

$$- a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0).$$

При їхньому виконанні задача Коші (1) – (3) має розв'язки (29) – (31).

Якщо $\tau_0 \in [t_2+0; t_3-0]$, то

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}a_{12}^{-1}(t)\Big|_{t=\tau_0} + a_{11}(\tau_0)a_{12}^{-1}(\tau_0) & 1 \\ a_{12}^{-1}(\tau_0) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}\left(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} + a_{12}^{-1}(\tau_0)f_1(\tau_0) \\ a_{12}^{-1}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \end{bmatrix},$$

умови (24) не існує, а (23) набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{d}{dt}\,a_{12}^{-1}(t)\Big|_{t=\tau_0} + a_{11}(\tau_0)a_{12}^{-1}(\tau_0)\right)x_{01} + x_{02} + \dfrac{d}{dt}\left(a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} + a_{12}^{-1}(\tau_0)f_1(\tau_0) \\ a_{12}^{-1}(\tau_0)x_{01} + a_{12}^{-1}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

звідки

$$x_{01} = -a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0),$$

$$x_{02} = a_{12}^{-1}(\tau_0)\left(a_{11}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) - f_1(\tau_0) - \frac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)_{t=\tau_0}\right).$$

При її виконанні задача Коші (1) – (3) має єдиний розв'язок (29) – (31).

Література

1. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
2. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
3. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (1995).

Одержано 11.11.22