УДК 517.9

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНИХ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ierominat@ukr.net
olena_sivak@ukr.net

We obtain existence conditions of continuous solutions of a class of systems of nonlinear functional-difference equations, propose a method for construction of these solutions, and investigate the structure of their set.

Одержано умови існування неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків і досліджено структуру їхньої множини.

Побудуємо неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f(t, x(t), x(t+1)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, Λ — дійсна $(n \times n)$-вимірна матриця вигляду $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $f : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, q — деяка дійсна стала. Системи різницевих і різницево-функціональних рівнянь розглянуто, зокрема, в [1 – 6].

Будемо припускати виконаними такі умови:

1) $|\lambda_i| \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ q > 0$;

2) вектор-функція $f(t, x, y)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n$ і $f(t, 0, 0) \equiv 0$;

3) для довільних $t \in \mathbb{R},\ \bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}} \in \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leq l(|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|), \tag{2}$$

де l — деяка додатна стала.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1 – 3 і умови:*

4) $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ q > 1$*;*

5) $\Delta = \dfrac{2l}{\bar{\lambda} - \lambda^*} < 1$, *де* $1 > \bar{\lambda} > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{3}$$

де $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умову* $\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$.

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{4_0}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f(t, x_0(t), x_0(t+1)), \tag{4_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) -$$

$$- f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{4_i}$$

і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умову

$$|x_i(t)| \leq M \Delta^i t^{\bar\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5_i}$$

де M — деяка додатна стала, $\bar\nu = \dfrac{\ln \bar\lambda}{\ln q}$, $1 > \bar\lambda > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Дійсно, система рівнянь (4_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умову

$$|x_0(t)| \leq M t^{\bar\nu}, \tag{5_0}$$

де $M = \max_\tau |\omega(\tau)|$. Підставляючи в ($4_1$) ряд

$$x_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j f\Big(q^{-(j+1)}t, x_0\Big(q^{-(j+1)}t\Big), x_0\Big(q^{-(j+1)}t + 1\Big)\Big), \tag{6_1}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більш цього, згідно з (2), (5_0), і $1 > \bar\lambda > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\bar\nu < 0$ отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j \Big| f\Big(q^{-(j+1)}t, x_0\Big(q^{-(j+1)}t\Big), x_0\Big(q^{-(j+1)}t + 1\Big)\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j l \Big(\Big|x_0\Big(q^{-(j+1)}t\Big)\Big| + \Big|x_0\Big(q^{-(j+1)}t + 1\Big)\Big|\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j l \left(M\Big(q^{-(j+1)}t\Big)^{\bar\nu} + M\Big(q^{-(j+1)}t + 1\Big)^{\bar\nu}\right) \leq$$

$$\leq Ml \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j 2 \Big(q^{-(j+1)}t\Big)^{\bar\nu} \leq M2l \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \left(q^{\bar\nu}\right)^{-(j+1)} t^{\bar\nu} \leq$$

$$\leq M2l \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \left(\bar\lambda\right)^{-(j+1)} t^{\bar\nu} \leq M2l \frac{1}{\bar\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^*}{\bar\lambda}\right)^j t^{\bar\nu} \leq$$

$$\leq M2l\frac{1}{\bar{\lambda}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}}\,t^{\bar{\nu}} \leq M\frac{2l}{\bar{\lambda}-\lambda^*}\,t^{\bar{\nu}} \leq M\Delta t^{\bar{\nu}}.$$

Отже, системи рівнянь (4_0), (4_1) мають сім'ї неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (5_0), (5_1). Враховуючи умови теореми і оцінки (5_0), (5_1), можна послідовно показати, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^j\Bigg[q^{-(j+1)}t, f\Bigg(\sum_{l=0}^{i-1}x_l\Big(q^{-(j+1)}t\Big), \sum_{l=0}^{i-1}x_l\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big)\Bigg)-$$
$$-f\Bigg(t, \sum_{l=0}^{i-2}x_l\Big(q^{-(j+1)}t\Big), \sum_{l=0}^{i-2}x_l\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big)\Bigg)\Bigg], \quad i = 2,3,\ldots, \tag{6_i}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i = 2,3,\ldots$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (6_i), $i = 2,3,\ldots$, є формальними розв'язками систем рівнянь (4_i), $i = 2,3,\ldots$. Доведемо їхню збіжність.

Оскільки ряд (6_1) рівномірно збігається при $t \geq T > 0$, то, розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (6_i) доведено вже для деякого $i \geq 1$, і доведемо, що ряд (6_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \geq T > 0$ і виконується оцінка (5_{i+1}). Завдяки (2), (6_{i+1}), (5_i) і $1 > \bar{\lambda} > \lambda^*$ отримуємо

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\Bigg|f\Bigg(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i}x_l\Big(q^{-(j+1)}t\Big), \sum_{l=0}^{i}x_l\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big)\Bigg)-$$
$$-f\Bigg(q^{-(j+1)}t, \sum_{l=0}^{i-1}x_l\Big(q^{-(j+1)}t\Big), \sum_{l=0}^{i-1}x_l\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big)\Bigg)\Bigg| \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j l\Bigg(\Bigg|\sum_{l=0}^{i}x_l\Big(q^{-(j+1)}t\Big) - \sum_{l=0}^{i-1}x_l\Big(q^{-(j+1)}t\Big)\Bigg|+$$
$$+\Bigg|\sum_{l=0}^{i}x_l\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big) - \sum_{l=0}^{i-1}x_l\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big)\Bigg|\Bigg) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}|\lambda^*|^j l\Big(\Big|x_i\Big(q^{-(j+1)}t\Big)\Big| + \Big|x_i\Big(q^{-(j+1)}t+1\Big)\Big|\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j 2lM\Delta^i\Big(q^{-(j+1)}t\Big)^{\bar{\nu}} \leq 2lM\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\Delta^i\big(q^{\bar{\nu}}\big)^{-(j+1)}t^{\bar{\nu}} \leq$$
$$\leq 2lM\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\Delta^i\big(\bar{\lambda}\big)^{-(j+1)}t^{\bar{\nu}} \leq 2lM\frac{1}{\bar{\lambda}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right)^j\Delta^i t^{\bar{\nu}} \leq$$
$$\leq \frac{2l}{1-\dfrac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}}\,\frac{1}{\bar{\lambda}}\,M\Delta^i t^{\bar{\nu}} \leq \frac{2l}{\bar{\lambda}-\lambda^*}\,M\Delta^i t^{\bar{\nu}} \leq M\Delta^{i+1}t^{\bar{\nu}}.$$

Отже, системи рівнянь (4_i), $i = 1, 2, \ldots,$ мають розв'язки у вигляді рядів (6_i), $i = 1, 2, \ldots,$ що рівномірно збігаються при $t \geq T > 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ які задовольняють умови (5_i). Із (5_i) безпосередньо випливає, що ряд (3) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}\, t^{\bar{\nu}}.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1 – 3 та умови:*

6) $\lambda_i > 1,\ i = 1, \ldots, n,\ 0 < q < 1;$

7) $\Delta = \dfrac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, *де* $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{4}$$

де $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умову* $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$.

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{8_0}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f(t, x_0(t), x_0(t+1)), \tag{8_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - $$

$$- f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{8_i}$$

і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умову

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i t^{\underline{\nu}}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{9_i}$$

де M — деяка додатна стала, $\underline{\nu} = \dfrac{\ln \underline{\lambda}}{\ln q}$, $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Дійсно, система рівнянь (4_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умову

$$|x_0(t)| \leq M t^{\underline{\nu}}, \tag{9_0}$$

де $M = \max_\tau |\omega(\tau)|$. Підставляючи в ($8_1$) ряд

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f\big(q^j t, x_0\big(q^j t\big), x_0(q^j t + 1)\big), \tag{10_1}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більш того, завдяки умовам 2, 3 і (9_0) отримуємо

$$
\begin{aligned}
|x_1(t)| &\le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left| f\big(q^j t, x_0(q^j t), x_0(q^j t+1)\big)\right| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l\big(\left|x_0(q^j t)\right| + \left|x_0(q^j t+1)\right|\big) \le \\
&\le \frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j} l\Big(M\big(q^j t\big)^{\underline{\nu}} + M\big(q^j t+1\big)^{\underline{\nu}}\Big) \le \\
&\le \frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j} 2lM\big(q^j t\big)^{\underline{\nu}} \le 2lM\frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}\right)^{j} t^{\underline{\nu}} \le \\
&\le M\,\frac{1}{\lambda_*}\,\frac{2l}{1-\dfrac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}}\,t^{\underline{\nu}} \le M\,\frac{2l}{\lambda_*-\underline{\lambda}}\,t^{\underline{\nu}} \le M\Delta t^{\underline{\nu}}.
\end{aligned}
$$

Отже, системи рівнянь (8_0), (8_1) мають сім'ї неперервних при $t \ge T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (9_0), (9_1).

Враховуючи умови теореми та оцінки (9_0), (9_1), можна послідовно показати, що ряди

$$
\begin{aligned}
x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \Bigg[f\Bigg(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t+1)\Bigg) - \\
- f\Bigg(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(q^j t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(q^j t+1)\Bigg)\Bigg], \quad i = 2, 3, \ldots,
\end{aligned}
\tag{10_i}
$$

рівномірно збігаються при всіх $t \ge T > 0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (8_i), $i = 2, 3, \ldots$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (10_i), $i = 2, 3, \ldots$, є формальними розв'язками систем рівнянь (8_i), $i = 2, 3, \ldots$. Доведемо їхню збіжність.

Справді, оскільки ряд (10_1) рівномірно збігається при $t \ge T > 0$, то, розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (10_i) доведено вже для деякого $i \ge 1$ і доведемо, що ряд (10_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \ge T > 0$, а також виконується оцінка (9_{i+1}). Завдяки умові 3, (10_{i+1}), (9_i) та $1 < \underline{\lambda} < \lambda_*$ отримаємо

$$
\begin{aligned}
|x_{i+1}(t)| &\le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \Bigg| f\Bigg(q^j t, \sum_{l=0}^{i} x_l(q^j t), \sum_{l=0}^{i} x_l(q^j t+1)\Bigg) - \\
&\quad - \Bigg(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t+1)\Bigg)\Bigg| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} l\Bigg(\Bigg|\sum_{l=0}^{i} x_l(q^j t) - \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t)\Bigg| +
\end{aligned}
$$

$$+\left|\sum_{l=0}^{i} x_l\big(q^j t+1\big)-\sum_{l=0}^{i-1} x_l\big(q^j t+1\big)\right|\Bigg)\leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l\big(\big|x_i(q^j t)\big|+\big|x_i(q^j t+1)\big|\big)\leq$$

$$\leq 2Ml\Delta^i\frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j}\big(q^j t\big)^{\underline{\nu}}\leq$$

$$\leq 2Ml\Delta^i\frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j}(q^{\underline{\nu}})^j t^{\underline{\nu}}\leq 2Ml\Delta^i\frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}\right)^{j} t^{\underline{\nu}}\leq$$

$$\leq M\Delta^i\frac{1}{\lambda_*}\,\frac{2l}{1-\dfrac{\underline{\lambda}}{\lambda_*}}\,t^{\underline{\nu}}\leq M\Delta^i\frac{2l}{\lambda_*-\underline{\lambda}}\,t^{\underline{\nu}}\leq M\Delta^{i+1}t^{\underline{\nu}}.$$

Отже, системи рівнянь (8_i), $i=1,2,\ldots,$ мають розв'язки у вигляді рядів (10_i), $i = 1,2,\ldots,$ що рівномірно збігаються при $t\geq T>0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t),\ i=1,2,\ldots,$ які задовольняють умови (9_i). Із (9_i) безпосередньо випливає, що ряд (4) рівномірно збігається при всіх $t\geq T>0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)|\leq\frac{M}{1-\Delta}\,t^{\underline{\nu}}.$$

Теорему 2 доведено.

Розглянемо тепер систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду (1) при $\lambda_i<0,\ i=1,\ldots,n,$ у випадках, коли виконуються умови:

а) $|\lambda_i|>1,\ i=1,\ldots,n,\ 0<q<1;$

б) $|\lambda_i|<1,\ i=1,\ldots,n,\ q>1.$

Покажемо, що така система рівнянь має розв'язки у вигляді ряду

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t), \tag{5}$$

де $x_i(t),\ i=0,1,\ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставивши (5) у (1), отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt)=\Lambda\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t)+f\left(t,\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t),\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t+1)\right),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t),\ i=0,1,\ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(qt)=\Lambda x_0(t), \tag{12_0}$$

$$x_1(qt)=\Lambda x_1(t)+f(t,x_0(t),x_0(t+1)), \tag{12_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) -$$

$$- f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \quad i = 2, \ldots, n, \qquad (12_i)$$

то ряд (5) буде формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Система рівнянь (12_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$x_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \qquad (13_0)$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, — довільні неперервні вектор-функції, що задовольняють умову $\omega_i(\tau + 1) = \operatorname{sign} \lambda_i \omega_i(\tau)$, і

$$t^{\nu} = \operatorname{diag}\left(t^{\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (12_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f\big(q^j t, x_0(q^j t), x_0(q^j t + 1)\big), \qquad (13_1)$$

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \left[f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t), \sum_{l=0}^{i-1} x_l(q^j t + 1)\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(q^j t), \sum_{l=0}^{i-2} x_l(q^j t + 1)\right) \right], \quad i = 2, 3 \ldots . \qquad (13_i)$$

Аналогічно з доведенням теореми 2 можна показати, що при виконанні умов $1-3$, а) і $\Delta = \dfrac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, де $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, 2, \ldots, n\}$, ряди (13_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M \Delta^i t^{\underline{\nu}}, \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad (14)$$

де M — деяка додатна стала, $\underline{\nu} = \dfrac{\ln \underline{\lambda}}{\ln q}$, $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Отже, ряди (13_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (14). Із (14) безпосередньо випливає, що ряд (5) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta} t^{\underline{\nu}}.$$

Таким чином, довели таку теорему.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1 – 3 і умови:*

8) $|\lambda_i| > 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \lambda_i < 0,\ 0 < q < 1$;

9) $\Delta = \dfrac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, *де* $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$ *такої, що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Аналогічно до теореми 1, можна довести подібний результат для випадку б), коли $|\lambda_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \lambda_i < 0,\ q > 1$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1 – 3 і умови:*

10) $|\lambda_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \lambda_i < 0,\ q > 1$;

11) $\Delta = \dfrac{l}{1 - \lambda^*} < 1$, *де* $1 > \lambda^* > \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$ *такої, що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Література

1. R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities, theory, methods, and applications*, Marcel Dekker, Inc., New York (2000).
2. W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of linear* q*-difference equations*, Acta Math., **61**, № 1, 1 – 38 (1933).
3. Д. И. Мартынюк, *Лекции по качественной теории разностных уравнений*, Наук. думка, Киев (1972).
4. Г. П. Пелюх, О. А. Сивак, *Неперервні розв'язки нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості*, Нелін. коливання, **12**, № 4, 515 – 529 (2009).
5. Т. О. Єрьоміна, *Про побудову неперервних розв'язків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки, № 2, 71 – 74 (2015).
6. T. O. Er'omina, *On the solutions of systems of nonlinear functional equations continuous in* $t \in \mathbb{R}$, J. Math. Sci. (N.Y.), **222(3)**, 237 – 254 (2017).

Одержано 11.08.22