УДК 517.9

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ МНОЖИННОЗНАЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Т. О. Комлєва, А. В. Плотніков

Одес. держ. академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, 65029, Україна
e-mail: t-komleva@ukr.net
a-plotnikov@ukr.net

Н. В. Скрипник

Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова
вул. Дворянська, Одеса, 65082, Україна
e-mail: natalia.skripnik@gmail.com

We consider two linear set-valued integral equations, prove conditions for the existence of their solutions, and obtain the form of their sections at every time in the analytic form. The results are illustrated with model examples.

Розглянуто два лінійні множиннозначні інтегральні рівняння. Доведено умови існування їхніх розв'язків і отримано в аналітичному вигляді форму їхніх перерізів у кожний момент часу. Результати проілюстровано модельними прикладами.

1. Вступ. У роботі [1] F. S. de Blasi та F. Iervolino розглянули множиннозначні диференціальні рівняння з похідною Хукухари. Надалі багато авторів досліджували властивості розв'язків множиннозначних диференціальних рівнянь [2 – 12], множиннозначних інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь [13 – 19], множиннозначних імпульсних рівнянь [20 – 22], множиннозначних дискретних систем [23 – 25], а також множиннозначних диференціальних включень [2, 22, 26, 27]. Такі рівняння широко застосовуються при дослідженні звичайних диференціальних (інтегральних, імпульсних та ін.) включень [2, 6, 20, 28] і нечітких диференціальних (інтегральних, імпульсних та ін.) рівнянь і включень [3, 29 – 34]. Також останнім часом інтенсивно досліджуються множиннозначні та нечіткі системи керування [35 – 47], тобто системи, в яких поведінка об'єкта описується керованими множиннозначними або нечіткими рівняннями.

У цій статті розглянуто два лінійні множиннозначні інтегральні рівняння. Доведено умови існування їхніх розв'язків і отримано в аналітичному вигляді форму їхніх перерізів у кожний момент часу. Результати проілюстровано на модельних прикладах.

2. Основні означення і позначення. Нехай $\mathrm{conv}\big(\mathbb{R}^n\big)$, $n \geq 2$, — простір непустих опуклих компактних підмножин простору $\mathbb{R}^n$ з метрикою Гаусдорфа

$$h(A,B) = \min\{r \geq 0 \colon A \subset B + B_r(0),\ B \subset A + B_r(0)\},$$

де $A, B \in \mathrm{conv}\big(\mathbb{R}^n\big)$, $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - c\| \leq r\}$.

Крім звичайних теоретико-множинних операцій розглянемо у просторі $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ ще дві операції: суму множин і добуток скаляра на множину:

$$A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\} \qquad \text{i} \qquad \lambda A = \{\lambda a\colon a \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ці операції мають такі основні властивості [2, 3]:

1) $\big(\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n), h\big)$ — повний метричний простір;

2) $h(A + C, B + C) = h(A, B)$;

3) $h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| h(A, B)$ для всіх $A, B, C \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ і $\lambda \in \mathbb{R}$.

Однак простір $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ не є лінійним простором щодо наведених операцій, оскільки в загальному випадку не можливо ввести поняття протилежного елемента для $A \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$, тобто в загальному випадку $A+(-1)A \neq \{0\}$, хоча, якщо $A \in \mathbb{R}^n$, то для нього протилежний елемент існує. Відсутність протилежного елемента у просторі $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ призводить до неоднозначного введення поняття різниці множин і умов її існування.

Далі використовуємо різницю Хукухари [48].

Означення 1 [48]. *Нехай $X, Y \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Множина $Z \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що $X = Y + Z$, називається різницею Хукухари множин X, Y і позначається $X \overset{H}{-} Y$.*

Зауваження 1. Різниця Хукухари є окремим випадком різниці Мінковського, коли Y повністю вимітає множину X [2, 3, 20].

Наведемо основні властивості різниці Хукухари [2, 3, 20]:

1) якщо різниця Хукухари двох множин $A \overset{H}{-} B$ існує, то вона єдина;

2) $A \overset{H}{-} A = \{0\}$ для всіх $A \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$;

3) $(A + B) \overset{H}{-} B = A$ для всіх $A, B \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Також додамо ще одну операцію добутку матриці на множину

$$AX = \{Ax\colon x \in X\},$$

де $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — дійсна $(n \times n)$-вимірна матриця, $X \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1 [47, 49]. *Для будь-якої матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ існують дві ортогональні $(n \times n)$-вимірні матриці U та V такі, що $U^T AV = \Sigma$, де Σ — діагональна матриця. Також можна обрати матриці U та V таким чином, що діагональні елементи матриці Σ задовольняють умову $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$, де r — ранг матриці A. Тобто, якщо A є невиродженою матрицею, то $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$.*

Відповідно, матрицю A можна записати у вигляді $A = U\Sigma V^T$. Ця декомпозиція називається сингулярною декомпозицією. Стовпці $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ матриці U називаються лівими сингулярними векторами, стовпці $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ матриці V — правими сингулярними векторами, а числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — сингулярними числами матриці A.

Згідно з [47] множина $Y = \{Ax\colon x \in B_1(\mathbf{0}), A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ є r-вимірним еліпсоїдом і його півосі дорівнюють відповідним сингулярним числам матриці A, де $r = \mathrm{rank}(A)$.

Зауваження 2. Очевидно, що якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ є ортогональною матрицею, то $AB_1(0) \equiv B_1(0)$.

3. Основний результат. Розглянемо лінійні множиннозначні інтегральні рівняння

$$X(t) + A\int\limits_0^t X(s)\,ds = B_1(0) \tag{1}$$

і

$$X(t) = B_1(0) + A\int\limits_0^t X(s)ds, \tag{2}$$

де $X : [0,T] \to \operatorname{conv}\big(\mathbb{R}^n\big)$ — невідоме множиннозначне відображення, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджена матриця. Інтеграл розуміємо у сенсі інтеграла Хукухари [48].

Означення 2. *Множиннозначне відображення $X : [0,T] \to \operatorname{conv}\big(\mathbb{R}^n\big)$ називається розв'язком інтегрального рівняння (1), (2), якщо воно неперервне та задовольняє інтегральне рівняння (1), (2) на проміжку $[0,T]$.*

Зауваження 3. Диференціальне рівняння з похідною Хукухари

$$D_H X(t) = AX(t), \quad X(0) = B_1(0),$$

локально еквівалентне множиннозначному інтегральному рівнянню (2) [2–4, 20], де $D_H X(t)$ — похідна Хукухари множиннозначного відображення $X(\cdot)$ [48].

Зауваження 4. Диференціальне рівняння із загальною похідною

$$DX(t) \overset{h}{-} \Phi(-\phi(t))AX(t) = \Phi(\phi(t))AX(t), \quad X(0) = B_1(0), \tag{3}$$

є локально еквівалентним множиннозначним інтегральним рівнянням, яке є окремим випадком множиннозначних інтегральних рівнянь (1) і (2) [9, 10], де $DX(t)$ — загальна похідна множиннозначного відображення $X(\cdot)$ [7, 9, 10]; $\phi\colon [0,T] \to [-1,1]$ — неперервна функція; $\Phi(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0, \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$

Наприклад, якщо $\phi(\cdot)$ є від'ємною неперервною функцією, то (3) еквівалентне рівнянню (1). Також якщо $\phi(\cdot)$ є невід'ємною неперервною функцією, то (3) еквівалентне рівнянню (2).

Випадок 1. Спочатку доведемо таку допоміжну лему.

Лема 1. *Якщо $X + Y = B_1(0)$, то $X = B_\mu(z_1)$ і $Y = B_\lambda(z_2)$ такі, що $\mu + \lambda = 1$ і $z_1 + z_2 = 0$.*

Доведення. Якщо $X + Y = B_1(0)$, то $X = B_1(0) \overset{H}{-} Y$. Тоді для існування різниці Хукухари $B_1(0) \overset{H}{-} Y$ необхідно і достатньо, щоб множини $B_1(0)$ і Y були позитивно гомотетичні, тобто $Y = z_2 + \lambda B_1(0)$, де $z_2 \in \mathbb{R}^n$ і $0 \le \lambda \le 1$. Звідси $Y = B_\lambda(z_2)$ і, відповідно, $X = B_\mu(z_1)$. Отже, $B_\mu(z_1) + B_\lambda(z_2) = B_{\mu+\lambda}(z_1 + z_2) = B_1(0)$, тобто $\mu + \lambda = 1$ і $z_1 + z_2 = 0$.

Лему 1 доведено.

Зауваження 5. Якщо з кулі $B_R(a)$ віднімається в сенсі Хукухари множина X і різниця $B_R(a) \overset{H}{-} X$ існує, то ця множина X також є кулею $B_r(b)$, радіус якої r такий, що $r \le R$.

Теорема 2. *Якщо всі сингулярні числа матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ рівні $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = \sigma$, то інтегральне рівняння (1) має розв'язок $X(\cdot)$ такий, що*

$$X(t) = e^{-t\sigma} B_1(0), \quad t \geq 0.$$

Доведення проведемо безпосередньою підстановкою множиннозначного відображення $X(\cdot)$ в інтегральне рівняння (1) і перевіркою виконання тотожності. Легко бачити, що

$$e^{-\sigma t} B_1(0) + A \int\limits_0^t e^{-\sigma s} B_1(0)\, ds = B_1(0) \Rightarrow e^{-\sigma t} B_1(0) + A \int\limits_0^t e^{-\sigma s}\, ds B_1(0) = B_1(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-\sigma t} B_1(0) + A\sigma^{-1}\big(1 - e^{-\sigma t}\big) B_1(0) = B_1(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_{e^{-\sigma t}}(0) + A B_{\sigma^{-1}(1-e^{-\sigma t})}(0) = B_1(0).$$

Оскільки матриця A така, що $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = \sigma$, то сингулярна декомпозиція матриці A має вигляд $A = U\Sigma V^T$, де $U,\ V$ — ортогональні матриці та $\Sigma = \sigma I$. Також зазначимо, що $V^T B_r(0) = B_r(0)$ і $U B_r(0) = B_r(0)$ для всіх $r > 0$. Тобто

$$A B_{\sigma^{-1}(1-e^{-\sigma t})}(0) \equiv U\Sigma V^T B_{\sigma^{-1}(1-e^{-\sigma t})}(0) \equiv \sigma U I V^T B_{\sigma^{-1}(1-e^{-\sigma t})}(0) \equiv$$
$$\equiv \sigma B_{\sigma^{-1}(1-e^{-\sigma t})}(0) \equiv B_{1-e^{-\sigma t}}(0).$$

Звідси маємо

$$B_{e^{-\sigma t}}(0) + B_{1-e^{-\sigma t}}(0) \equiv B_{e^{-\sigma t}+1-e^{-\sigma t}}(0) \equiv B_1(0).$$

Теорему 2 доведено.

Приклад 1. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді сингулярна декомпозиція має вигляд

$$U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і, відповідно, сингулярні числа $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$. Тобто інтегральне рівняння (1) має розв'язок $X(t) = e^{-2t} B_1(0)$ (рис. 1).

Теорема 3. *Якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ має хоча б два різних сингулярних числа, то інтегральне рівняння (1) не має розв'язку.*

Доведення. Будемо доводити теорему від супротивного. Нехай інтегральне рівняння має розв'язок $X(\cdot)$, тобто для всіх $t \geq 0$

$$X(t) + A \int\limits_0^t X(s)\, ds = B_1(0).$$

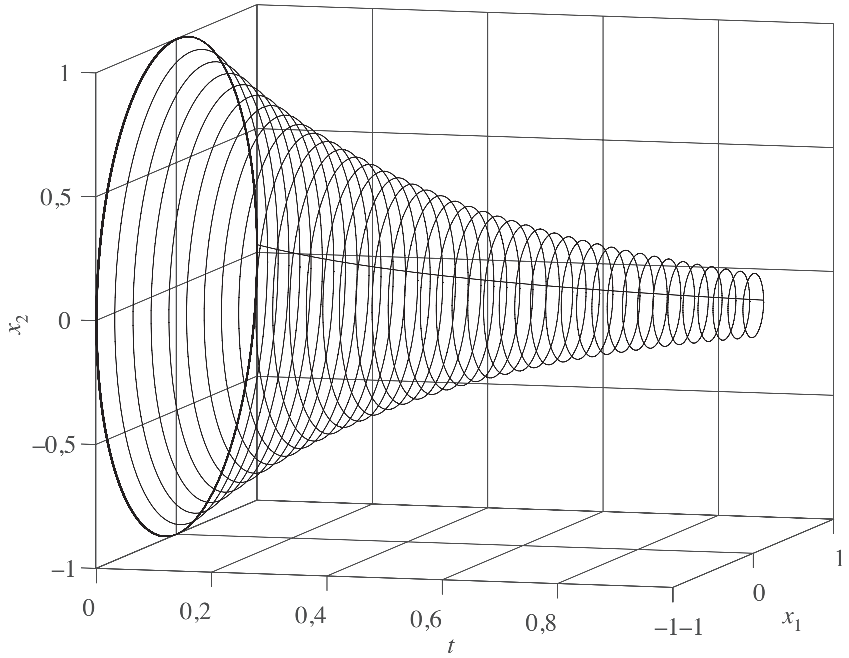

Рис. 1. Розв'язок $X(t),\ t \in [0,1]$.

Зафіксуємо деяке довільне $T > 0$. Тоді $X(T) + A\int_0^T X(s)ds = B_1(0)$. Звідси

$$B_1(0)\overset{H}{-}X(T) = A\int\limits_0^T X(s)ds.$$

Оскільки $B_1(0)$ є кулею і різниця Хукухари $B_1(0) \overset{H}{-} X(T)$ існує, то $X(T)$ також буде кулею, тобто $X(T) \equiv B_{r(T)}(0)$, де $0 \le r(T) \le 1$. І тому що T є довільним, то $X(t) \equiv B_{r(t)}(0)$ для всіх $t \ge 0$. Відповідно,

$$\int\limits_0^T X(s)ds = \int\limits_0^T B_{r(s)}(0)ds = \int\limits_0^T r(s)dsB_1(0) = R(T)B_1(0) = B_{R(T)}(0),$$

де $R(T) = \int_0^T r(t)ds$.

Тобто, ми маємо

$$B_{r(T)}(0) + AB_{R(T)}(0) = B_1(0). \tag{4}$$

Через те що матриця A має хоча б два різних сингулярних числа, то $AB_{R(T)}(0)$ є еліпсоїдом. Звідси $B_{r(T)}(0) + AB_{R(T)}(0)$ не є кулею. Тобто рівність (4) не виконується і ми отримали протиріччя.

Теорему 3 доведено.

Випадок 2. З [18, 19] випливає така теорема.

Теорема 4. *Розв'язок $X(\cdot)$ інтегрального рівняння (2) існує.*

Далі ми отримаємо деякі властивості розв'язків цього інтегрального рівняння.

Теорема 5. *Якщо всі сингулярні числа матриці $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ рівні $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = \sigma$, то інтегральне рівняння (2) має розв'язок $X(\cdot)$ такий, що $X(t) = e^{\sigma t} B_1(0),\ t \geq 0$.*

Доведення. Легко отримати, що

$$e^{\sigma t} B_1(0) = B_1(0) + A \int_0^t e^{\sigma s} B_1(0) ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\sigma t} B_1(0) = B_1(0) + A \int_0^t e^{\sigma s}\, ds B_1(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\sigma t} B_1(0) = B_1(0) + A\sigma^{-1}\big(e^{\sigma t} - 1\big) B_1(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{e^{\sigma t}}(0) = B_1(0) + A B_{\sigma^{-1}(e^{\sigma t} - 1)}(0).$$

Оскільки матриця A така, що $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = \sigma$, то сингулярна декомпозиція матриці A має вигляд $A = U\Sigma V^T$, де $\Sigma = \sigma I$, а $U,\ V$ — ортогональні матриці. Відповідно,

$$A B_{\sigma^{-1}(e^{\sigma t}-1)}(0) \equiv U\Sigma V^T B_{\sigma^{-1}(e^{\sigma t}-1)}(0) \equiv \sigma U I V^T B_{\sigma^{-1}(e^{\sigma t}-1)}(0) \equiv$$

$$\equiv \sigma B_{\sigma^{-1}(e^{\sigma t}-1)}(0) \equiv B_{e^{\sigma t}-1}(0).$$

Звідси

$$B_{e^{\sigma t}}(0) = B_1(0) + B_{e^{\sigma t}-1}(0) \Rightarrow B_{e^{\sigma t}}(0) = B_{1+e^{\sigma t}-1}(0) \Rightarrow B_{e^{\sigma t}}(0) = B_{e^{\sigma t}}(0).$$

Теорему 5 доведено.

Приклад 2. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді сингулярна декомпозиція має вигляд

$$U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і, відповідно, сингулярні числа $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$. Тобто інтегральне рівняння (1) має розв'язок $X(t) = e^{2t} B_1(0)$ (рис. 2).

Теорема 6. *Якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ є симетричною матрицею, то інтегральне рівняння (2) має розв'язок $X(\cdot)$ такий, що $X(t)$ є еліпсоїдом для всіх $t > 0$. Причому півосі еліпсоїда дорівнюють $e^{\sigma_i t},\ i = \overline{1,n}$, де $\sigma_i,\ i = \overline{1,n}$, — сингулярні числа матриці A.*

Доведення. Оскільки матриця A є симетричною, то всі її власні числа $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$, є дійсними та її можна подати у вигляді $Q\Lambda Q^T$, де Q — ортогональна матриця, стовпці якої містять ортонормований базис із власних векторів, а Λ є діагональною матрицею з власними значеннями матриці A на діагоналі такою, що $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|,\ i = \overline{1, n-1}$.

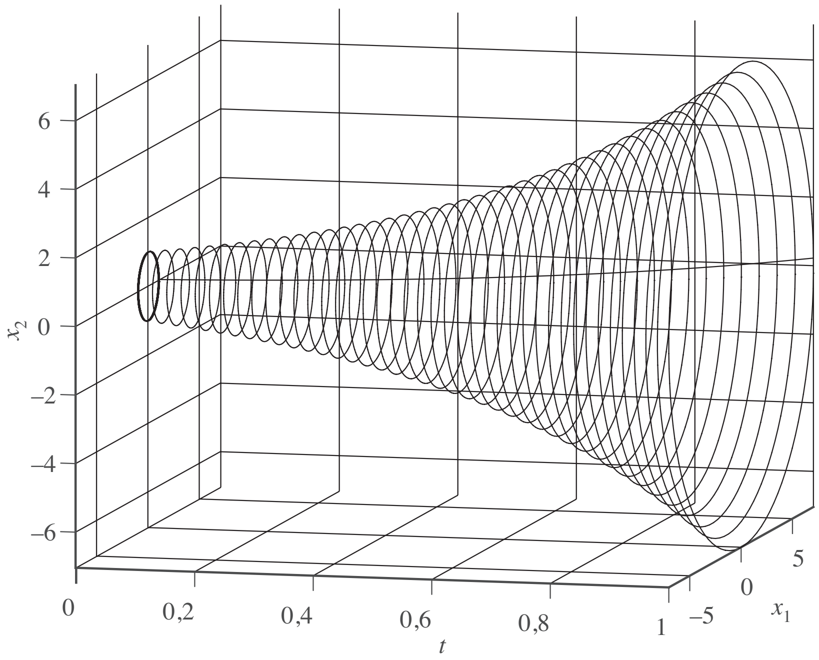

Рис. 2. Розв'язок $X(t),\ t \in [0, 1]$.

Запишемо розв'язок $X(\cdot)$ інтегрального рівняння (2) у вигляді

$$X(t) = B_1(0) + tAB_1(0) + \frac{t^2}{2!}\, A^2 B_1(0) + \ldots + \frac{t^k}{k!}\, A^k B_1(0) + \ldots .$$

Тому що

$$\frac{t^k}{k!}\, A^k B_1(0) = \frac{t^k}{k!}\, Q\Lambda^k Q^T B_1(0) = \frac{t^k}{k!}\, Q\Lambda^k B_1(0) = \frac{t^k}{k!}\, Q|\Lambda|^k D_k B_1(0) =$$
$$= \frac{t^k}{k!}\, Q|\Lambda|^k B_1(0) = \frac{t^k}{k!}\, Q\Sigma^k B_1(0),$$

то

$$X(t) = U \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\, \Sigma^i B_1(0) = U e^{t\Sigma} B_1(0),$$

де $\Sigma = |\Lambda| = \Lambda D_1$, матриця D_k така, що $d_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$ і

$$d_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \text{ парне}, \\ 1, & \text{якщо } k \text{ непарне і } \lambda_i > 0, \\ -1, & \text{якщо } k \text{ непарне і } \lambda_i < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $e^{t\Sigma} B_1(0)$ є еліпсоїдом, півосі якого дорівнюють $e^{\sigma_i t},\ i = \overline{1, n}$, а матриця Q визначає поворот еліпсоїда щодо осей координат.

Теорему 6 доведено.

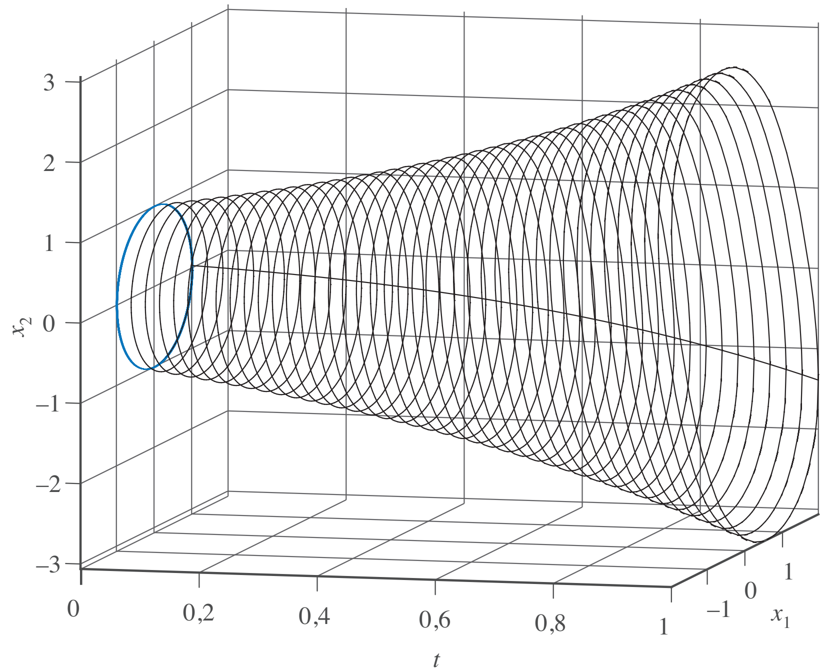

Рис. 3. Розв'язок $X(t),\ t \in [0,1]$.

Приклад 3. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q\Lambda Q^T = \begin{pmatrix} -0{,}3162 & -0{,}9487 \\ 0{,}9487 & -0{,}3162 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1{,}1667 & 0 \\ 0 & 0{,}5000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}3162 & 0{,}9487 \\ -0{,}9487 & -0{,}3162 \end{pmatrix}$$

і, відповідно,

$$e^{\Sigma t} = \begin{pmatrix} e^{1{,}1667\,t} & 0 \\ 0 & e^{0{,}5\,t} \end{pmatrix}.$$

Також зауважимо, що матриця Q задає поворот еліпса на $108{,}4^\circ$ (рис. 3).

Теорема 7. *Якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ є додатно визначеною матрицею, то інтегральне рівняння (2) має розв'язок $X(\cdot)$ такий, що $X(t)$ є еліпсоїдом для всіх $t > 0$. Причому півосі еліпсоїда дорівнюють $e^{\lambda_i t},\ i = \overline{1,n}$, де $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$, — власні числа матриці A.*

Доведення. Оскільки матриця A є додатно визначеною, то всі власні числа $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$, матриці A є дійсними й додатними і вона зображувана у вигляді $Q\Lambda Q^T$, де Q — ортогональна матриця, стовпці якої містять ортонормований базис із власних векторів, а Λ — діагональна матриця з власними значеннями матриці A на діагоналі. Тому що

$$e^{At}B_1(0) = B_1(0) + A\int\limits_0^t e^{As}B_1(0)ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{Q\Lambda Q^T t}B_1(0) = B_1(0) + Q\Lambda Q^T \int\limits_0^t e^{Q\Lambda Q^T s}B_1(0)ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Qe^{\Lambda t}Q^T B_1(0) = B_1(0) + Q\Lambda Q^T \int\limits_0^t Qe^{\Lambda s}Q^T dsB_1(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Qe^{\Lambda t}B_1(0) = B_1(0) + Q\Lambda \int\limits_0^t e^{\Lambda s}dsB_1(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Qe^{\Lambda t}B_1(0) = B_1(0) + Qe^{\Lambda t}B_1(0)\overset{H}{-}B_1(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Qe^{\Lambda t}B_1(0) = Qe^{\Lambda t}B_1(0),$$

то $X(t) = e^{At}B_1(0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (2).

Оскільки $\Sigma = \Lambda$ і $Qe^{\Lambda t}Q^T$ є сингулярною декомпозицією матриці e^{At} для всіх $t \geq 0$, то півосі еліпсоїда $X(t)$ будуть рівними $e^{\lambda_i t}$, $i = \overline{1,n}$.

Також зауважимо, що $X(t) = e^{At}B_1(0) = Qe^{\Lambda t}B_1(0)$, тобто матриця Q буде задавати поворот еліпсоїда щодо осей координат.

Теорему 7 доведено.

Зауваження 6. Легко перевірити, що розв'язок інтегрального рівняння (2) має властивість $X(t) = (-1)X(t)$ для всіх $t \geq 0$.

Зауваження 7. Якщо матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ є від'ємно визначеною матрицею, то відповідний розв'язок інтегрального рівняння (2) співпадає з розв'язком інтегрального рівняння (2), який відповідає матриці $(-1)A$. Тому

$$(-1)A\int\limits_0^t X(s)ds = A\int\limits_0^t (-1)X(s)ds = A\int\limits_0^t X(s)\,ds,$$

де $X(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (2).

Приклад 4. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q\Lambda Q^T = \begin{pmatrix} -0{,}4719 & -0{,}8817 \\ -0{,}8817 & 0{,}4719 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}2676 & 0 \\ 0 & 0{,}0657 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}4719 & -0{,}8817 \\ -0{,}8817 & 0{,}4719 \end{pmatrix}$$

і, відповідно,

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{1{,}2676\,t} & 0 \\ 0 & e^{0{,}0657\,t} \end{pmatrix}.$$

Також зауважимо, що матриця Q задає поворот еліпса на $61{,}8^\circ$ (рис. 4).

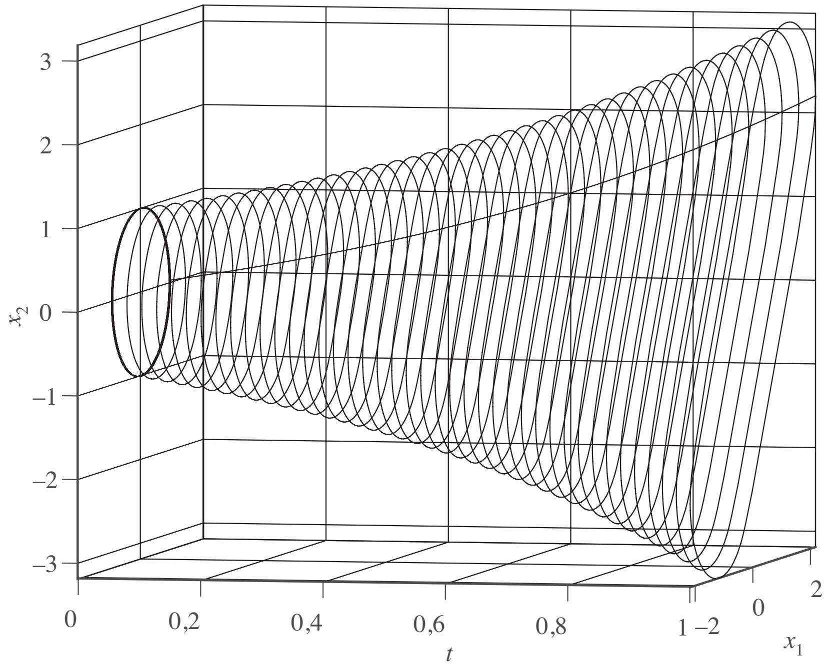

Рис. 4. Розв'язок $X(t),\ t \in [0,1]$.

Література

1. F. S. de Blasi, F. Iervolino, *Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Unione Mat. Ital., **2**, № 4-5, 491 – 501 (1969).
2. В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (1999).
3. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (2009).
4. V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge (2006).
5. A. A. Martynyuk, *Qualitative analysis of set-valued differential equations*, Birkhäuser/Springer, Cham (2019).
6. А. А. Толстоногов, *Дифференциальные включения в банаховом пространстве*, Наука, Новосибирск (1986).
7. Т. О. Комлєва, А. В. Плотніков, Л. І. Плотнікова, Н. В. Скрипник, *Умови існування базових розв'язків лінійних множиннозначних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **73**, № 5, 651 – 673 (2021).
8. Е. В. Очеретнюк, В. И. Слынько, *Оценки площади решений псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве* $\mathrm{conv}(R^2)$, Укр. мат. журн., **69**, № 2, 189 – 214 (2017).
9. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalized set differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A: Math. Anal., **20**, № 4, 433 – 445 (2013).
10. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной*, Укр. мат. журн., **65**, № 10, 1350 – 1362 (2013).
11. Н. В. Скрипник, *Схема ступенчатого усреднения для многозначных дифференциальных уравнений с обобщенной производной*, Нелін. коливання, **20**, № 3, 391 – 400 (2017).
12. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, *Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative*, J. Uncertain. Syst., **13**, № 1, 3 – 13 (2019).
13. А. В. Плотников, А. В. Тумбрукаки, *Интегро-дифференциальные уравнения с многозначными траекториями*, Укр. мат. журн., **52**, № 3, 359 – 367 (2000).

14. А. В. Плотников, А. В. Тумбрукаки, *Интегро-дифференциальные включения с производной Хукухары*, Нелін. коливання, **8**, № 1, 80 – 88 (2005).

15. Н. В. Скрипник, *Усреднение многозначных интегральных уравнений*, Нелін. коливання, **16**, № 3, 408 – 415 (2013).

16. V. Babenko, *Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces*, Appl. Math. Comput., **291**, 354 – 372 (2016).

17. V. Babenko, *Calculus and nonlinear integral equations for functions with values in L-spaces*, Anal. Math., **45**, № 4, 727 – 755 (2019).

18. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk, *Existence and uniqueness theorem for set-valued Volterra–Hammerstein integral equations*, Asian-Eur. J. Math., **11**, № 3, 1850036, 11 p. (2018).

19. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *Existence and uniqueness theorem for set integral equations*, J. Adv. Res. Dyn. Control Syst., **5**, № 2, 65 – 72 (2013).

20. N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik, *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities*, Walter de Gruyter & Co., Berlin (2011).

21. Н. А. Перестюк, Н. В. Скрипник, *Усреднение импульсных многозначных систем*, Укр. мат. журн., **65**, № 1, 126 – 142 (2013).

22. Н. В. Скрипник, *Усреднение импульсных дифференциальных включений с производной Хукухары*, Нелін. коливання, **10**, № 3, 416 – 432 (2007).

23. И. В. Атамась, В. И. Слынько, *Устойчивость неподвижных точек одного класса квазилинейных каскадов в пространстве* $\mathrm{conv}(R^n)$, Укр. мат. журн., **69**, № 8, 1166 – 1179 (2017).

24. Т. А. Комлева, Л. И. Плотникова, А. В. Плотников, *Одна многозначная дискретная система и ее свойства*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1519 – 1524 (2018).

25. T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, A. V. Plotnikov, *Partial averaging of discrete-time set-valued systems*, Stud. Univ. Babeş – Bolyai Math., **63**, № 4, 539 – 548 (2018).

26. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, *Дифференциальные включения с производной Хукухары*, Нелін. коливання, **10**, № 2, 229 – 246 (2007).

27. А. В. Плотников, *Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары*, Укр. мат. журн., **41**, № 1, 121 – 125 (1989).

28. Н. В. Плотникова, *Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 386 – 400 (2006).

29. Н. В. Скрипник, *Периодические решения линейных дифференциальных включений с импульсами*, Укр. мат. журн., **60**, № 9, 1287 – 1296 (2008).

30. V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra, *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Taylor & Francis Group, London (2003).

31. Н. А. Перестюк, Н. В. Скрипник, *Усреднение нечетких систем*, Укр. мат. журн., **70**, № 3, 412 – 428 (2018).

32. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с многозначными решениями*, Укр. мат. журн., **60**, № 10, 1326 – 1337 (2008).

33. А. В. Плотников, Т. А. Комлева, *Усреднение нечетких дифференциальных уравнений на конечном промежутке*, Нелін. коливання, **14**, № 4, 516 – 527 (2011).

34. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, *Averaging of the fuzzy differential equations*, J. Uncertain. Syst., **6**, № 1, 30 – 37 (2012).

35. А. В. Арсирий, А. В. Плотников, *Системы управления многозначными траекториями с многозначным критерием качества*, Укр. мат. журн., **61**, № 8, 1142 – 1147 (2009).

36. Т. О. Комлєва, А. В. Плотніков, *Одна задача оптимальної швидкодії для лінійної керованої багатозначної системи*, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1082 – 1094 (2020); DOI: 10.37863/umzh.v72i7.2300.

37. Т. А. Комлева, Л. И. Плотникова, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Усреднение нечетких управляемых систем*, Нелін. коливання, **14**, № 3, 325 – 332 (2011).

38. А. В. Плотников, *Управляемые квазидифференциальные уравнения и их некоторые свойства*, Дифференц. уравнения, **34**, № 10, 1332 – 1336 (1998).

39. В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко, *Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 376 – 385 (2006).

40. R. Jafari, S. Razvarz, A. Gegov, W. Yu, *Fuzzy control of uncertain nonlinear systems with numerical techniques: a survey*, Adv. Intell. Syst. Comput., **1043**, 3 – 14 (2020).

41. S. Melliani, A. El Allaoui, L. S. Chadli, *Controlled fuzzy evolution equations*, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Cham, **372**, 113 – 126 (2019).

42. M. Najariyan, M. H. Farahi, *Optimal control of fuzzy controlled system with fuzzy initial conditions*, Iran. J. Fuzzy Syst., № 10, 21 – 35 (2013).

43. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, *The averaging of control linear fuzzy 2π-periodic differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms, **18**, № 6, 833 – 847 (2011).

44. N. D. Phu, N. V. Hoa, H. Vu, *On comparisons of set solutions for fuzzy control integro-differential systems*, J. Adv. Res. Appl. Math., **4**, № 1, 84 – 101 (2012).

45. L. T. Quang, N. D. Phu, N. V. Hoa, H. Vu, *On maximal and minimal solutions for set integro-differential equations with feedback control*, Nonlinear Stud., **20**, № 1, 39 – 56 (2013).

46. W. Yu, R. Jafari, *Modeling and control of uncertain nonlinear systems with fuzzy equations and Z-number*, Wiley-IEEE Press (2019).

47. G. E. Forsythe, C. B. Moler, *Computer solution of linear algebraic systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1967).

48. M. Hukuhara, *Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac., № 10, 205 – 223 (1967).

49. R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (2013).

Одержано 03.10.22