УДК 517.923

# ІМПУЛЬСНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА*

**Є. В. Панасенко**

*Запоріз. нац. ун-т*
*вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*
*e-mail: panasenko.yevgeniy@gmail.com*

**О. О. Покутний**

*Ін-т математики НАН України*
*вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна*
*e-mail: lenasas@gmail.com*

We investigate boundary-value problems for the operator-differential Lyapunov equation with pulse action at fixed times with values in the Hilbert space. The case where the corresponding generating operator can have a nonclosed set of values is considered. The results are illustrated by the example of the problem with diagonal operators.

Досліджено крайові задачі для операторно-диференціального рівняння Ляпунова з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу зі значеннями у просторі Гільберта. Розглянуто випадок, коли відповідний породжуючий оператор може мати незамкнену множину значень. Результати проілюстровано на прикладі задачі з діагональними операторами.

Крайові задачі з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу розглянуто у роботах А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [1], О. А. Бойчука, В. П. Журавльова, А. М. Самойленка [2, 3] та багатьох інших математиків. У скінченновимірному випадку крайову задачу для рівняння Ляпунова розглянуто у роботі С. М. Чуйка [4].

У цій статті досліджено крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта [5, 6] зі скінченною кількістю імпульсів. Розглянуто крайову задачу для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта й у тому випадку, коли відповідний оператор може мати незамкнену множину значень. Для певних імпульсних умов побудовано еволюційний оператор і за допомогою нього — узагальнений оператор Гріна. Отримані формули мають достатньо просте зображення. Наведено приклад крайової задачі з діагональними операторами у відповідних просторах.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо крайову задачу з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу:

* Підтримано науковою темою Відділення цільової підготовки Київського національного університету ім. Т. Шевченка при НАН України на 2022 – 2023 рр. ЗМ2022, 0122U002463.

$$\begin{gathered} dotZ(t) = A(t)Z(t) - Z(t)B(t) + \Phi(t), \\ t \neq \tau_i, \quad \Delta Z|_{t=\tau_i} = S_i Z(\tau_i - 0) + \gamma_i, \qquad (1) \\ t, \tau_i \in [a;b], \quad i = 1,2,\ldots,p, \end{gathered}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha. \qquad (2)$$

Нехай $A(t), B(t), \Phi(t) \in C\big([a;b]\backslash\{\tau\}_I;\mathcal{L}(H_1)\big)$ — лінійні та обмежені оператори при кожному $t$, де $C\big([a;b]\backslash\{\tau\}_E;\mathcal{L}(H_1)\big)$ — простір неперервних або кусково-неперервних по $t \in [a;b]$ оператор-функцій, які мають розриви першого роду при $t = \tau_i$; $\mathcal{L}(H_1)$ — простір лінійних і обмежених операторів, що діють з простору Гільберта $H_1$ у себе; $S_i \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні та обмежені оператори такі, що $E + S_i$ невироджені (оборотні), що означає однозначну продовжуваність розв'язків імпульсної системи через точки розриву; $\gamma_i \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні та обмежені оператори; $\ell$ — лінійний неперервний оператор: $\ell :$ $C^1([a;b]\backslash\{\tau\}_I;\mathcal{L}(H_1)) \to H_2;$ $H_2$ — простір Гільберта, $\alpha \in H_2$.

Розв'язок $Z(t)$ крайової задачі (1), (2) шукаємо у просторі кусково-неперервно диференційовних оператор-функцій: $Z(t) \in C^1\big([a;b]\backslash\{\tau_i\}_I;\mathcal{L}(H_1)\big)$

Разом з неоднорідною крайовою задачею (1), (2) розглянемо однорідну крайову задачу

$$\begin{gathered} \dot{Z}(t) = A(t)Z(t) - Z(t)B(t), \\ t \neq \tau_i, \quad \Delta Z|_{t=\tau_i} = S_i Z(\tau_i - 0), \qquad (3) \\ t, \tau_i \in [a;b], \quad i = 1,2,\ldots,p, \end{gathered}$$

$$\ell Z(\cdot) = 0. \qquad (4)$$

При цьому еволюційний оператор $W(t,a)$ імпульсної задачі (3) пов'язаний з еволюційним оператором $H(t,a) = U(t,a)V^{-1}(t,a)$ системи без імпульсів

$$\dot{H}(t) = A(t)H(t) - H(t)B(t), \quad H(a,a) = E,$$

таким чином:

$$W(t,a) = X(t,a)V^{-1}(t,a), \qquad (5)$$

де

$$X(t,a) = U(t,\tau_j)(E + S_j)\prod_{v=j}^{2} U(\tau_v,\tau_{v-1})(E + S_{v-1})U(\tau_1,a), \qquad (6)$$

$$\tau_j < t \leq \tau_{j+1}.$$

Тут $U(t,a),\ V(t,a)$ — еволюційні оператори однорідних операторних рівнянь

$$\dot{U}(t,a) = A(t)U(t,a), \quad U(a,a) = I, \qquad (7)$$

$$\dot{V}(t,a) = B(t)V(t,a), \quad V(a,a) = I, \qquad (8)$$

відповідно, а $X(t,a)$ — еволюційний оператор однорідного операторного рівняння з імпульсами

$$\dot{X}(t,a) = A(t)X(t,a), \qquad \Delta X|_{t=\tau_i} = S_i X(\tau_i - 0). \qquad (9)$$

Ці формули є аналогами формул для фундаментальних матриць у скінченновимірному просторі [1, с. 49]. Таким чином, маємо

$$W(t,a) = U(t,\tau_j)(E+S_j)\prod_{v=j}^{2} U(\tau_v,\tau_{v-1})(E+S_{v-1})U(\tau_1,a)V^{-1}(t,a), \tag{10}$$

$$\tau_j < t \le \tau_{j+1}.$$

Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C([a;b]\backslash\{\tau_i\}_I;\mathcal{L}(H_1))$ у оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi] \in C([a;b]\backslash\{\tau_i\}_I \times [a;b]\backslash\{\tau_i\}_I;\mathcal{L}(H_1))$ вигляду [5, 6]

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = X(t,\tau)\Phi(\tau)V^{-1}(t,\tau), \quad t,\tau \in [a;b]. \tag{11}$$

За допомогою цього оператора загальний розв'язок імпульсного рівняння (1) можна зобразити у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[M] + \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau + \sum_{i=1}^{p} \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^t[\gamma_i], \tag{12}$$

де оператор $M \in \mathcal{L}(H_1)$ — довільний лінійний обмежений оператор, $\tilde{\mathbf{K}}_\tau^t[\cdot]$ обрано неоднозначно. Як $\tilde{\mathbf{K}}_\tau^t[\cdot]$, наприклад, можна взяти оператор [1]

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^t = \mathbf{K}_{\tau_i+0}^t. \tag{13}$$

Підставимо отриманий розв'язок у крайову умову (2). Тоді одержимо таке операторне рівняння стосовно оператора $M$:

$$Q[M] = g, \tag{14}$$

де оператор $Q$ визначається таким чином:

$$Q\colon \mathcal{L}(H_1) \to H_2, \qquad Q[M] = \ell K_a^{\cdot}[M], \tag{15}$$

а елемент $g \in H_2$ має вигляд

$$g = \alpha - \ell\int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell\tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i]. \tag{16}$$

Припустимо, що оператор $Q$ узагальнено оборотний. Тоді, як показано в [3], він є нормально розв'язним і існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(Q)}: \mathcal{L}(H_1) \to N(Q)$ і $\mathcal{P}_Y: H_2 \to Y$, які індукують розклади просторів $\mathcal{L}(H_1)$ і $H_2$ у прямі суми замкнених підпросторів

$$\mathcal{L}(H_1) = N(Q) \oplus X,$$

$$H_2 = Y \oplus R(Q).$$

Використовуючи нормальну розв'язність оператора $Q$, отримуємо, що рівняння (14) є розв'язним тоді й тільки тоді [3], коли права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_Y g = 0. \tag{17}$$

Тут $\mathcal{P}_Y$ — проєктор на коядро оператора $Q$. Ця умова гарантує, що права частина (14)

$$\alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell K_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i] \in R(Q)$$

належить множині значень оператора $Q$.

Якщо умова розв'язності (21) виконана, то операторне рівняння (14) має множину розв'язків вигляду

$$M = Q^{-} g + \mathcal{P}_{N(Q)} C, \tag{18}$$

де $C$ — довільний лінійний обмежений оператор $(C \in \mathcal{L}(H_1))$, $\mathcal{P}_{N(Q)}$ — проєктор на ядро оператора $Q$. Підставляючи оператор $M$ у (12), отримуємо, що загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) може бути поданий у вигляді

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_a^t[\mathcal{P}_{N(Q)} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{19}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином:

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi] d\tau + \sum_{i=1}^{p} \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i] +$$
$$+ \mathbf{K}_a^t \left[ Q^{-}(\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i]) \right]. \tag{20}$$

Отже, отримали таку теорему.

**Теорема 1.** *Нехай оператор $Q$ є узагальнено оборотним. Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$\mathcal{P}_Y \left( \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i] \right) = 0. \tag{21}$$

*Якщо умову (21) виконано, то множина розв'язків (1), (2) має вигляд*

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_a^t\left[\mathcal{P}_{N(Q)} C\right] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{22}$$

*де узагальнений оператор Гріна визначається за формулою*

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi] d\tau + \sum_{i=1}^{p} \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i] +$$
$$+ \mathbf{K}_a^t \left[ Q^{-}(\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i]) \right]. \tag{23}$$

***Зауваження 1.*** Якщо оператори $A$ і $B$ сталі, то еволюційний оператор $W(t,a)$ системи (1) має вигляд

$$W(t,a) = e^{A(t-\tau_j)}(E+S_j)\prod_{v=j}^{2} e^{A(\tau_v-\tau_{v-1})}(E+S_{v-1})e^{A(\tau_1-a)}e^{-B(t-a)}. \tag{24}$$

***Зауваження 2.*** Якщо оператор $A$ комутує з $S$, то еволюційний оператор $W(t,a)$ у формулі (24) можна зобразити у вигляді

$$W(t,a) = e^{A(t-a)}(E+S)^{i(t,a)}e^{-B(t-a)}, \tag{25}$$

де $i(t,a)$ — кількість точок $\tau_i$ на відрізку $[a,t]$.

Покажемо, яким чином можна дослідити розв'язність крайової задачі (1), (2) й у тому випадку, коли оператор $Q$ має незамкнену множину значень.

Будемо припускати, що оператор $Q\colon \mathcal{L}(H_1) \to H_2$, який діє з банахового простору $\mathcal{L}(H_1)$ у гільбертів простір $H_2$, індукує такі розбиття відповідних просторів у прямі суми:

$$\mathcal{L}(H_1) = N(Q) \oplus X, \quad H_2 = \overline{R(Q)} \oplus Y, \tag{26}$$

і відповідні розклади одиниці

$$I_{\mathcal{L}(H_1)} = P_{N(Q)} + P_X, \quad I_{H_2} = P_{\overline{R(Q)}} + P_Y,$$

де $P_{N(Q)}$, $P_X$, $P_{\overline{R(Q)}}$, $P_Y$ — проєктори на відповідні підпростори. Зауважимо, що друге розбиття простору $H_2 = \overline{R(Q)} \oplus Y$ в (26) завжди існує $Y = \overline{R(Q)}^{\perp}$. За аналогією з означеннями [7] допустимих пар запровадимо означення узагальненого $Q$ допустимого підпростору.

**Означення 1.** *Нехай $Q\colon \mathcal{L}(H_1) \to H_2$ — лінійний обмежений оператор із банахового простору $\mathcal{L}(H_1)$ у гільбертів простір $H_2$ та підпростір $X \subset \mathcal{L}(H_1)$ має властивість $\mathcal{L}(H_1) = N(Q) \oplus X$. Тоді підпростір $X$ називається узагальненим $Q$-допустимим підпростором.*

Розглянемо звужений оператор $Q_X : X \to \overline{R(Q)}$, $Q_X M = QM$, $M \in X$ (він буде лінійним, неперервним і ін'єктивним). Поповнимо простір $X$ за нормою $\|M\|_{\overline{X}} = \|Q_X M\|_{H_2}$ і розширимо оператор $Q_X$ на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор будемо позначати як $\overline{Q}_X$. Тоді оператор $\overline{Q}_X : \overline{X} \to \overline{R(Q)}$ буде гомеоморфізмом між просторами $\overline{X}$ і $\overline{R(Q)}$. Будемо позначати $\overline{\mathcal{L}(H_1)} = \overline{X} \oplus N(Q)$.

**Означення 2.** *Нехай $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H_1), H_2)$ і $X$ — узагальнений $Q$-допустимий підпростір. Тоді відображення*

$$Q_X^- : H_2 \to \overline{\mathcal{L}(H_1)},$$

$$Q_X^- y = \overline{Q}_X^{-1} y_1, \quad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in \overline{R(Q)}, \quad y_2 \in Y,$$

*за аналогією з [7] називаємо сильним $X$-узагальнено оберненим до оператора $Q$.*

На підставі цього означення можна виділити три типи розв'язків операторного рівняння (14), а отже, й крайової задачі (1), (2).

***1. Класичні розв'язки.*** Якщо оператор $Q$ є узагальнено оборотним, то $g \in R(Q)$ тоді й тільки тоді, коли $P_Y y = 0$. У цьому випадку множина всіх розв'язків рівняння (14) має вигляд

$$M = Q_X^- g + P_{N(Q)} C \quad \forall C \in \mathcal{L}(H_1).$$

Таким чином, після підстановки у зображення для розв'язку $Z(t, C)$ отримуємо наведену теорему 1.

***2. Сильні узагальнені розв'язки.*** Розглянемо випадок, коли множина значень оператора $Q$ може бути незамкненою, але $X$ — узагальнений $Q$-допустимий підпростір.

**Означення 3.** *Елемент $Q_X^- g$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (14), якщо $g \in \overline{R(Q)} \backslash R(Q)$.*

У цьому випадку множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (14) буде мати вигляд

$$M = Q_X^- g + P_{N(Q)} C, \quad C \in \mathcal{L}(H_1),$$

і оператор $Q_X^- g := Q_X^{-1} g_1$, де $g = g_1 + g_2,\ g_1 \in \overline{R(Q)},\ g_2 \in Y$.

***3. Сильні узагальнені квазірозв'язки.*** Розглянемо випадок, коли $g \notin \overline{R(Q)}$. Це буде тоді й тільки тоді, коли $P_Y g \neq 0$. У цьому випадку існують елементи з $\overline{\mathcal{L}(H_1)}$, що мінімізують норму $\inf \|\overline{Q} M - y\|_{H_2}$, де $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{X}} P_{\overline{X}}$ для $M \in \overline{\mathcal{L}(H_1)}$. Тут $P_{\overline{X}}$ — проєктор на $\overline{X}$. Такі елементи й будуть сильними узагальненими квазірозв'язками.

**Означення 4.** *Довільний елемент з множини*

$$\{Q_X^- g + P_{N(Q)} C\}_{C \in \mathcal{L}(H_1)}$$

*називатимемо сильним узагальненим квазірозв'язком рівняння (14).*

Використовуючи ці поняття сформулюємо загальну теорему узагальненої розв'язності крайової задачі (1), (2).

**Теорема 2.** *Нехай оператор $Q$ має узагальнений $Q$-допустимий підпростір $X$. Тоді:*

1а) *Крайова задача (1), (2) має сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$\mathcal{P}_Y \left( \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot} [\Phi(\tau)] d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot} [\gamma_i] \right) = 0. \tag{27}$$

*Якщо*

$$\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot} [\Phi(\tau)] d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell \mathbf{K}_{\tau_i}^{\cdot} [\gamma_i] \in R(Q),$$

*то розв'язки будуть класичними;*

1б) *За виконання умови розв'язності (27) множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_a^t \left[ \mathcal{P}_{N(Q)} C \right] + \overline{(G[\Phi, \alpha])}(t), \tag{28}$$

*де узагальнений оператор Гріна можна визначити як*

$$\overline{(G[\Phi, \alpha])}(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t [\Phi] d\tau + \sum_{i=1}^{p} \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot} [\gamma_i] +$$
$$+ \mathbf{K}_a^t \left[ \overline{Q}^- \left( \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot} [\Phi(\tau)] d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell \tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot} [\gamma_i] \right) \right]. \tag{29}$$

2а) *Крайова задача (1), (2) має сильні узагальнені квазірозв'язки тоді й тільки тоді, коли*

$$\mathcal{P}_Y\left(\alpha - \ell\int\limits_a^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau - \sum_{i=1}^{p} \ell\tilde{\mathbf{K}}_{\tau_i}^{\cdot}[\gamma_i]\right) \neq 0; \tag{30}$$

2б) *За виконання умови розв'язності (30) множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z(t,C) = \mathbf{K}_a^t\big[\mathcal{P}_{N(Q)}C\big] + \overline{(G[\Phi,\alpha])}(t) \quad \forall C \in \mathcal{L}(H_1). \tag{31}$$

***Приклад.*** Розглянемо крайову задачу (1), (2) на відрізку $[a;b] = [0;1]$ з постійними операторами $A$ і $B$ діагонального вигляду

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right), \quad B = \operatorname{diag}(1,1,1,\ldots)$$

зі значеннями у підпросторі $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2)$, який складається з таких зліченних матриць $D = (d_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, елементи яких є квадратично сумовними $\sum_{i,j} d_{ij}^2 < \infty$ (кожній такій матриці відповідає лінійний обмежений оператор із $\mathcal{L}(l_2)$). Оператор-функція $Z(t) = (z_{ij}(t))_{i,j\in\mathbb{N}}$ належить $C^1\left([0;1]\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\};\mathbf{B}\right)$, тобто

$$\|Z\| = \sup_{t\in[0;1]\backslash\{1/2\}}\Big\{\|Z(t)\|_{\mathbf{B}} + \|\dot{Z}(t)\|_{\mathbf{B}}\Big\} < \infty.$$

Оператори $S$ і $\gamma_1$ мають відповідно діагональний вигляд

$$S = \operatorname{diag}(1,1,\ldots,1,\ldots), \quad \gamma_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots\right).$$

Неоднорідність $\Phi(t)$ набуває вигляду

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\frac{t}{2}}, e^{\frac{3t}{2}}, e^{\frac{t}{2}}, \ldots\right).$$

Імпульсну умову задано у точці $\frac{1}{2}$. Оператор $\ell$, що задає крайову умову, набирає значень у просторі $l_2$, визначаємо його таким чином:

$$\ell Z(\cdot) = R(Z(1) - Z(0)) = (0,0,\ldots,0) \in l_2,$$

де дію оператора $R$ визначено формулою

$$RZ = \left(0, z_{22}, \frac{z_{33}}{2}, \frac{z_{44}}{2^2}, \ldots, \frac{z_{ii}}{2^{i-2}}, \ldots\right).$$

Неважко переконатися, що в цьому випадку дію оператор-функції $\mathbf{K}_{\tau}^t$ визначають так:

$$\mathbf{K}_{\tau}^t[\Theta] = \begin{cases} \operatorname{diag}\left(e^{\frac{t-\tau}{2}}, e^{\frac{t-\tau}{2}}, \ldots\right)\Theta\operatorname{diag}\left(e^{-t+\tau}, e^{-t+\tau}, \ldots\right), & 0 \le \tau \le t \le \frac{1}{2}, \\ \operatorname{diag}\left(2e^{\frac{t-\tau}{2}}, 2e^{\frac{t-\tau}{2}}, \ldots\right)\Theta\operatorname{diag}\left(e^{-t+\tau}, e^{-t+\tau}, \ldots\right), & 0 \le \tau < \frac{1}{2} < t \le 1, \\ \operatorname{diag}\left(e^{\frac{t-\tau}{2}}, e^{\frac{t-\tau}{2}}, \ldots\right)\Theta\operatorname{diag}\left(e^{-t+\tau}, e^{-t+\tau}, \ldots\right), & \frac{1}{2} < \tau \le t \le 1, \\ 0, & 0 \le t \le \tau \le 1. \end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) буде мати такий вигляд:

$$Z(t,M)=\mathbf{K}_0^t[M]+\int\limits_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau,\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right], \tag{32}$$

і

$$Z(t,M)=\mathbf{K}_0^t[M]+\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau+\int\limits_{\frac{1}{2}}^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau+\tilde{\mathbf{K}}_{\frac{1}{2}}^t[\gamma_1],\quad t\in\left(\frac{1}{2},1\right]. \tag{33}$$

Підставляючи в отримані формули значення $\mathbf{K}_\tau^t$, одержуємо розв'язки у вигляді

$$Z(t,M)=e^{-\frac{t}{2}}M+\operatorname{diag}\left(e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}},\frac{e^{\frac{3t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}{2},\dots\right),\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

$$Z(t,M)=2e^{-\frac{t}{2}}M+$$
$$+\operatorname{diag}\left(e^{\frac{-t+1}{2}}-2e^{-\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}},\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}+1}-e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{3t}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}},\dots\right),$$

де $M=(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$. Підставляючи одержані вирази у крайову умову, маємо таке операторне рівняння щодо $Q\colon \mathbf{B}\to l_2$:

$$Q[M]=\left(2e^{-\frac{1}{2}}-1\right)\left(0,m_{22},\frac{m_{33}}{2},\frac{m_{44}}{2^2},\dots,\frac{m_{ii}}{2^{i-2}},\dots\right)=g=(0,g_2,g_3,\dots),$$

де координати $g\in l_2$ мають вигляд

$$g_{2i}=\frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}}{2^{2i-2}},$$

$$g_{2i+1}=\frac{-1+2e^{-\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}}{2^{2i-1}}.$$

Неважко побачити, що оператор $Q$ має незамкнену множину значень (послідовність операторів $M_n=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,\dots)\in\mathbf{B}$ така, що $Q[M_n]\in l_2$, й збігається до оператора $M=\operatorname{diag}(1,\dots,1,\dots)\notin\mathbf{B}$, $Q[M],\in l_2$). Поповнюючи підпростір $X$ за нормою $\|M\|_{\overline{X}}^2=$ $=\|Q_XM\|_{l_2}^2=\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{m_{ii}^2}{2^{2i-4}}$, отримуємо простір $\overline{\mathbf{B}}=N(Q)\oplus\overline{X}$ і нормально-розв'язний оператор $\overline{Q}$ на ньому. Сильний псевдообернений оператор $\overline{Q}^+\colon l_2\to\mathbf{B}$ буде діяти таким чином:

$$\overline{Q}^+\beta=\overline{Q}^+(\beta_1,\beta_2,\dots)=\operatorname{diag}\left(0,\beta_2,2\beta_3,\dots,2^{i-1}\beta i,\dots\right),\quad \beta=(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}\in l_2.$$

Один із сильних узагальнених розв'язків має вигляд

$$M=\operatorname{diag}\left(0,\frac{1}{2e^{-\frac{1}{2}}-1}g_2,\dots,\frac{1}{2e^{-\frac{1}{2}}-1}g_i,\dots\right).$$

Підставляючи його у зображення (32), (33), отримуємо сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (1), (2).

Таким чином, наведений приклад ілюструє викладену вище теорію побудови розв'язку крайової задачі (1), (2).

## Література

1. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
2. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2018).
3. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).
4. С. М. Чуйко, *Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием*, Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины, **28**, 148 – 158 (2014).
5. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Крайові задачі для рівняння Ляпунова у банаховому просторі*, Нелін. коливання, **19**, № 2, 240 – 246 (2016).
6. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі* $\mathbf{L}_p$, Нелін. коливання, **21**, № 4, 523 – 536 (2017).
7. А. А. Бойчук, А. А. Покутный, *Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта*, Укр. мат. журн., **67**, № 9, 1181 – 1188 (2015).

*Одержано 20.09.22*