УДК 517.929

ПРО ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ЛІНІЙНИМ ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: grygor@imath.kiev.ua
oiop120@gmail.com

We obtain new particular solutions of nonlinear functional-differential equations of neutral type with a linear deviation of the argument, which are encountered in the section of self-similar potentials and coherent states of quantum mechanics, and study some their properties.

Отримано нові часткові розв'язки нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу, які зустрічаються у розділі автомодельних потенціалів і когерентних станів квантової механіки, а також вивчено деякі їхні властивості.

У цій статті розглянуто рівняння

$$\frac{d}{dx}(f(x) + qf(qx)) - (f(x) - qf(qx))^2 = \mu, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + qf(qx)) + f^2(x) - q^2 f^2(qx) = \mu, \tag{2}$$

де $\{q, \mu\} \subset \mathbb{C}$, які зустрічаються у розділі автомодельних потенціалів і когерентних станів квантової механіки (див. [1 – 3] і наведену там літературу). Дослідження рівнянь (1), (2) значною мірою спирається на праці [2, 4, 5].

Наведемо кілька прикладів часткових розв'язків цих рівнянь. У [2] детально досліджено аналітичні розв'язки рівняння (2), перший приклад трохи уточнює формулювання одного з результатів цієї роботи.

Приклад 1. При $\mu = 0,\ q = e^{\pm i \frac{\pi}{k}},\ k = 1, 2 \ldots,$ розв'язком рівняння (2) буде функція $f(x) = x^{-1} g\big(x^k\big)$, де $g(u)$ — непарна функція.

Приклад 2. При $\mu = 0$ розв'язком рівняння (2) буде функція $f(x) = x^v w\left(\dfrac{\log x}{\log q}\right)$, де $v = \dfrac{(2k-1)i\pi}{\log q} - 1,\ k \in \mathbb{Z}$, і w — довільна періодична функція з періодом 1.

Приклад 3. При $q = -1,\ \mu = |\mu| e^{i\phi},\ \{\phi, x\} \subset \mathbb{R}$ розв'язками рівняння (1) будуть функції

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{tg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) \pm e^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{tg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big),$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(-e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{ctg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) \pm e^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{ctg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big),$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{th}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) \pm ie^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{th}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big),$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{cth}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) \pm ie^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{cth}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big).$$

Приклад 4. При $q = -1,\ \mu = |\mu| e^{i\phi},\ \{\phi, x\} \subset \mathbb{R}$ функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{th}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) - \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{th}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in \left[\frac{\pi k}{\sqrt{|\mu|}}, \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}\Big(\pi k + \frac{\pi}{2}\Big)\right),\ k \in \mathbb{Z}$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{th}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) + \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{th}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{|\mu|}}\Big(\pi k - \frac{\pi}{2}\Big), \frac{\pi k}{\sqrt{|\mu|}}\right],\ k \in \mathbb{Z}$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(-e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{ctg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) + \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{ctg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in \left(\frac{\pi k}{\sqrt{|\mu|}}, \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}\Big(\pi k + \frac{\pi}{2}\Big)\right],\ k \in \mathbb{Z}$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(-e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{ctg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) - \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{ctg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{|\mu|}}\Big(\pi k - \frac{\pi}{2}\Big), \frac{\pi k}{\sqrt{|\mu|}}\right),\ k \in \mathbb{Z}$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{tg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) + \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{tg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in [0, +\infty)$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{tg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) - \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{tg}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in (-\infty, 0]$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{cth}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) + \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{cth}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in (0, +\infty)$; функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\phi}\sqrt{|\mu|}\,\mathrm{cth}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big) - \sqrt{|\mu|}\Big|\mathrm{cth}\Big(\sqrt{|\mu|}\cdot x\Big)\Big|\Big)$$

буде розв'язком рівняння (2) для $x \in (-\infty, 0)$.

Приклад 5. При $q = e^{\pm i \frac{\pi}{j+1}},\ j \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ і $\mu = 0$ розв'язком рівняння (1) буде функція

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x^{4(j+1)m+2j+1} \pm \sqrt{4(j+1)m+2j+1}\,x^{2(j+1)m+j}\Big), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Наступний приклад є невеликим узагальненням часткового розв'язку (30), (31) рівняння (2) з [2].

Приклад 6. При $q^n = 1,\ n = 2, 3, 4, 6,\ q \neq 1$ і $\mu = \big(1 - q^2\big)\wp(\xi)$, де еліптична функція Вейєрштраса $\wp\big(z|w, w'\big)$ така, що решітки $\Omega = \big\{w, w'\big\}$ і $\Omega' = \big\{qw, qw'\big\}$ збігаються, останнє можливе згідно з кристалографічною теоремою обмеження; $\xi \in \mathbb{C}$; розв'язком рівняння (2) буде функція

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(x + \dfrac{q}{1-q}\,\xi\right) - \wp'(\xi)}{\wp\left(x + \dfrac{q}{1-q}\,\xi\right) - \wp(\xi)}.$$

Це можна перевірити підстановкою в рівняння з урахуванням формул (18.2.1), (18.2.2), (18.4.1), (18.4.3) і (18.6.1) з [6]. Зазначимо, що при $n = 2$, тобто при $q = -1$, параметр $\mu = 0$ і функція $\wp$ стає довільною. При $n = 3$ і $q = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, якщо покласти $\xi = \pm(1-q)w_{1,2,3}$ (див. [6, с. 630], § 18.13), то $f(0) = 0$. У випадку $g_2 = 0,\ g_3 = 4$ для $\xi = (1-q)w_2$ отримуємо $\mu = i\sqrt{3}$. При $n = 4$ і $q = \pm i$ (див. [6], § 18.14, 18.15), якщо покласти $\xi = w_2$, то $\mu = 0$ і $f(0) = 0$. При $n = 6$ і $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$, якщо вибрати як ξ точку, для якої виконується умова $\wp(\xi) \neq 0$, то $f(0) = 0$. У термінах та позначеннях [2] потенціал дорівнює

$$u_0(x) = 2\wp\left(x + \frac{q}{1-q}\,\xi\right) + \wp(\xi) + \lambda_0,$$

де стала $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — довільна величина. Якщо вибрати $\lambda_0 = C - \wp(\xi)$, де $C \in \mathbb{R}$ — теж довільна величина, тоді потенціал

$$u_0(x) = 2\wp\left(x + \frac{q}{1-q}\,\xi\right) + C$$

буде дійсною функцією для $x \in \mathbb{R}$, якщо точка $\dfrac{q}{1-q}\,\xi \in \mathbb{R}$ і решітка, що визначає функцію $\wp$, симетрична стосовно дійсної осі.

У випадку $q > 0,\ q \neq 1$ часткові розв'язки рівнянь (1), (2) можна будувати за допомогою послідовних наближень у вигляді відповідного ряду для певних початкових значень $f(0)$ [7–9]. У [4] побудовано раціональні розв'язки рівняння (1) для великої множини початкових значень $f(0)$. При $q^3 = 1$ і $q^4 = 1$ додаткові часткові розв'язки рівняння (2) можна знайти в [2]. При $q = -1$ для рівняння (2) у [3] вказано найбільш простий частковий розв'язок $f(x) = \dfrac{\mu x}{2}$.

Якщо функція $f(x)$ — це розв'язок рівняння (1) або (2), то функція $f_j(x) = q^j f\big(q^j x\big)$, $j \in \mathbb{Z}$, буде розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dx}(f_j(x) + qf_j(qx)) - (f_j(x) - qf_j(qx))^2 = \mu q^{2j}$$

або

$$\frac{d}{dx}(f_j(x) + qf_j(qx)) + f_j^2(x) - q^2 f_j^2(qx) = \mu q^{2j}$$

відповідно.

Для аналітичного розв'язку рівняння (1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{3}$$

отримуємо такі рекурентні формули для коефіцієнтів степеневого ряду:

$$a_{n+1}\left(1 + q^{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^{n} a_s a_{n-s}\left(1 - q^{s+1}\right)\left(1 - q^{n-s+1}\right), \quad n \geq 1, \tag{4}$$

$$a_1\left(1 + q^2\right) = \mu + (a_0(1-q))^2.$$

У випадку $f(0) = 0$ аналітичний розв'язок рівняння (1) набуває вигляду

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^{2n-1}, \tag{5}$$

де

$$b_n\left(1 + q^{2n}\right) = \frac{1}{2n-1} \sum_{s=1}^{n-1} b_s b_{n-s}\left(1 - q^{2s}\right)\left(1 - q^{2(n-s)}\right), \quad n \geq 2, \tag{6}$$

$$b_1\left(1 + q^2\right) = \mu.$$

Наступна лема та її доведення майже дослівно повторюють аналогічну лему з [2] разом із доведенням останньої.

Лема 1. *Ряд (5), (6) сходиться у колі* $|z| < R_q$ *для кожного* $|q| < 1$. *Для радіуса збіжності* R_q *виконується оцінка* $R_q \geq \dfrac{\pi}{2\sqrt{|b_1|\alpha}}$, *де* $\alpha = \dfrac{\left(1 + |q|^2\right)^2}{1 - |q|^4}$; *ця оцінка є точною при* $q = 0$.

Збіжність ряду (3), (4) при $|q| < 1$ в деякому околі нуля доводиться за допомогою міркувань, аналогічних доведенню леми з [2]. Рівняння (1) можна легко записати у формі, де замість коефіцієнта q стоїть коефіцієнт q^{-1}, тому надалі ми обмежимося випадком $|q| \leq 1$. При цьому випадок $q = e^{i\frac{2\pi}{2k+1}}$, $k = 1, 2 \ldots$, розглядаємо так само, як випадок $|q| < 1$, а для випадку $q = e^{i\frac{\pi}{k}}$, $k = 1, 2 \ldots$, у прикладі 5 вказано часткові розв'язки рівняння (1).

У [4] показано зв'язок між розв'язками рівнянь (1) і (2). А саме: якщо $v(x)$ — розв'язок рівняння (1), то функція $f(x) = qv(qx) - v(x)$ буде розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dx}(f(x) + qf(qx)) + f^2(x) - q^2 f^2(qx) = \mu\left(q^2 - 1\right). \tag{7}$$

Навпаки, якщо $f(x)$ — розв'язок рівняння (7) і $|q| < 1$, то функція

$$v(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n x)$$

буде розв'язком рівняння (1) за умови, що цей ряд сходиться та допускає почленне диференціювання. Зокрема, якщо $|q| < 1$, то цей зв'язок дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між аналітичними розв'язками рівнянь (1) і (7) за допомогою рівності $f(0) = (q-1)v(0)$, при цьому радіуси збіжності відповідних розв'язків збігаються.

З огляду на роботу [5], розглянемо рівняння (1), коли $|q| = 1$, $q^n \neq \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Для $\theta \in \mathbb{R}$ визначимо множину

$$S_\theta = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1 \wedge \exists v > 0 \colon \ \frac{1}{|\alpha^n - e^{2\pi i\theta}|} \leq (2n)^v, \ \ n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Наступна лема є простим узагальненням теореми 6.6.5 з [10].

Лема 2. *Множина* S_θ *має міру* 2π.

Доведення. Незначна зміна доведення теореми 6.6.5 з [10] дозволяє довести лему 2 для $\theta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Тому із включення $\overline{S_\theta} \subset S_{-\theta}$ слідує нерівність $2\pi = m_0(S_\theta) = m_0\big(\overline{S_\theta}\big) \leq$ $\leq m_0(S_{-\theta}) \leq 2\pi$, де міру m_0 визначено в [10].

Лему 2 доведено.

З (4) випливають нерівності

$$|a_{n+1}| \leq \eta_{n+1} \frac{4}{n+1} \sum_{s=0}^{n} |a_s||a_{n-s}|, \quad n \geq 1,$$

$$|a_1| \leq \eta_1 \big(|\mu| + 4|a_0|^2\big),$$

де

$$\eta_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\big|q^{n+1} + 1\big|}, \quad n \geq 1.$$

Визначимо послідовність

$$b_{n+1} = \eta_{n+1} \frac{4}{n+1} \sum_{s=0}^{n} b_s b_{n-s}, \quad n \geq 1,$$

$$b_1 = \eta_1 \big(|\mu| + 4b_0^2\big), \quad b_0 = |a_0|.$$

Очевидно, що $|a_n| \leq b_n$, $n \geq 0$. Визначимо ще одну послідовність

$$c_{n+1} = \frac{4}{n+1} \sum_{s=0}^{n} c_s c_{n-s}, \quad n \geq 1,$$

$$c_1 = |\mu| + 4c_0^2, \quad c_0 = |a_0|.$$

Тоді ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{8}$$

буде розв'язком початкової задачі

$$y'(x) = |\mu| + 4y^2(x), \quad y(0) = |a_0| = |f(0)|,$$

тому

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(0)|}{1-4|f(0)|x}, & \mu = 0, \\ \dfrac{\sqrt{|\mu|}}{2}\operatorname{tg}\left(2\sqrt{|\mu|}x + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{\sqrt{|\mu|}}|f(0)|\right)\right), & \mu \neq 0, \end{cases}$$

і радіус збіжності ряду (8) дорівнює

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{4|f(0)|}, & \mu = 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{|\mu|}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{\sqrt{|\mu|}}|f(0)|\right)\right), & \mu \neq 0. \end{cases}$$

Визначимо послідовність

$$\delta_0 = 1, \qquad \delta_{n+1} = \eta_{n+1} \max_{0 \le m \le n} \delta_m \delta_{n-m}, \quad n \ge 0.$$

За допомогою методу математичної індукції отримаємо нерівність $b_n \le \delta_n c_n,\ n \ge 0.$

Далі нам знадобиться лема 4 з [5]. І хоча ця лема справедлива, проте зробимо два прості зауваження щодо її доведення. По-перше, оскільки основа математичної індукції — це $n = 0, 1,$ то можна припускати, що лему доведено для $n \ge 1$ замість $n \ge 2$ і, по-друге, можна використовувати більш точну нерівність

$$2^{r-1} \prod_{k=1}^{r} (m_{k-1} - m_k) \ge m_0 - m_r \ge \frac{n}{2}.$$

Згідно з лемою 4 з [5] при $q \in S_0 \bigcap S_{1/2}$ виконується оцінка

$$\delta_n \le (n+1)^{-2v} 2^{(7v+1)n}, \quad n = 0, 1 \ldots,$$

де число v вибирається спільним для обох множин S_0 і $S_{1/2}$; тому ряд (3), (4) сходиться у колі $|z| < 2^{-7v-1}\rho.$

Таким чином, довели таку теорему.

Теорема. *Якщо* $q \in S_0 \bigcap S_{1/2}$, *то ряд (3), (4) сходиться у деякому околі нуля.*

Якщо $v(x)$ — аналітичний розв’язок рівняння (1) з теореми, то функція $f(x) = qv(qx) - v(x)$ буде аналогічним розв’язком рівняння (7), для якого в [5] отримано інше коло, скажімо C_f, де цей степеневий ряд сходиться. Оскільки радіуси збіжності розв’язків $v(x)$ і $f(x)$ збігаються, то $v(x)$ сходиться і в колі C_f.

Література

1. V. P. Spiridonov, *Self-similar potentials in quantum mechanics and coherent states*, Phys. Particles Nuclei., **52**, 274 – 289 (2021).
2. S. Skorik, V. Spiridonov, *Self-similar potentials and the q-oscillator algebra at roots of unity*, Lett. Math. Phys., **28**, 59 – 74 (1993).
3. Y. Liu, *Regular solutions of the Shabat equation*, J. Differential Equations, **154**, 1 – 41 (1999).

4. V. E. Adler, *On the rational solutions of the Shabat equations*, Nonlinear Physics: Theory and Experiment (Lecce, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 3 – 10 (1996).
5. Y. Liu, *An existence result for the Shabat equation*, Aequationes Math., **64**, № 1-2, 104 – 109 (2002).
6. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, No. 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (1964).
7. Д. В. Бельский, *Об асимптотических свойствах непрерывно дифференцируемых решений квазилинейных дифференциально-функциональных уравнений*, Нелін. коливання, **8**, № 1, 3 – 8 (2005).
8. А. М. Самойленко, Г. П. Пелюх, *Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства*, Укр. мат. журн., **46**, № 6, 737 – 747 (1994).
9. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский, *Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом*, Нелін. коливання, **18**, № 2, 149 – 163 (2015).
10. A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, New York (1991).

Одержано 12.10.22