УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

А. Латиш, О. Кічмаренко

Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова
вул. Дворянська, Одеса, 65082, Україна
e-mail: andrii.latysh@gmail.com,
olga.kichmarenko@gmail.com

We investigate the optimal control problem for a class of evolutionary parabolic functional-differential equations in a Banach space. Sufficient conditions for the existence of an optimal pair are obtained. At the same time, the main problem of optimal control is considered until the solution leaves the domain, which distinguishes it from other studies.

Досліджується задача оптимального керування для класу еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь параболічного типу в банаховому просторі. Отримано достатні умови існування оптимальної пари. При цьому основна задача оптимального керування розглядається до моменту виходу розв'язку з області, що відрізняє її від інших досліджень.

1. Вступ. У цій роботі розглянуто задачу оптимального керування для еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь у банахових просторах, яка вивчається до моменту виходу розв'язків із деякої області в банаховому просторі:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Au + f_1(t, u_t) + f_2(t, u_t)z(t), \\ &u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{1.1}$$

з критерієм якості

$$\mathcal{J}(z) = \int\limits_0^\tau L(t, u_t, z(t))dt \to \inf, \tag{1.1*}$$

де $h > 0,\ A$ — лінійний (необмежений) оператор у банаховому просторі $X (A \colon X \to X)$, $u_t = u(t + \Theta) \in C([-h, 0]; X)$ для кожного $t \in [0, T],\ D$ — деяка область у $[-h, T] \times C$, ∂D — її межа і $\overline{D} = D \cup \partial D,\ \tau$ — момент виходу розв'язку (t, u_t) на границю $\partial D,\ f_1 \colon D \to X,\ f_2 \colon D \to \mathcal{L}(X, X)$, де $\mathcal{L}(X, X)$ — простір лінійних обмежених операторів із X у X з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}},\ z(t) \in X$ — параметр керування.

Розв'язок початкової задачі (1.1) будемо розуміти в м'якому сенсі (див. п. 2). При цьому момент виходу τ залежить від z, що суттєво ускладнює задачу.

При дослідженні задачі (1.1) – (1.1*) природно виникає питання про продовжуваність м'якого розв'язку рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t, u_t), \\ u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.2}$$

до моменту виходу на границю області.

У скінченновимірному випадку, за умови компактності відображення f, це питання розглянуто в [1]. Однак, для задач оптимального керування наявність у правій частині керування $z(t)$, яке, як правило, є лише вимірною функцією, робить вимогу неперервності $f(t, \varphi)$ неприродною. При цьому ще й нескінченновимірність задачі, а також наявність необмеженості оператора вимагають істотної адаптації результатів [1] до задачі (1.2). Далі ми наведемо відповідні результати. Зауважимо, що умову неперервності ми замінимо умовою типу Каратеодорі, яку застосовують до задач оптимального керування. Точні постановки задач будуть подані в п. 2.

Теорія оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями в скінченновимірному випадку достатньо повно викладена в монографії [2]. В останні роки багато авторів досліджували питання існування оптимальних керувань для різних типів нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах [3 – 7]. Проте у цих роботах розглядалися задачі з фіксованим моментом виходу $\tau = T$ — фіксований кінець інтервалу, що розглядається. При цьому для дослідження задач застосовувалися різні методи, зокрема, принцип максимуму, метод динамічного програмування, прямі методи дослідження екстремальних задач, що базуються на підходах компактності, які застосовуються до напівнеперервних знизу функціоналів. Зазначимо роботи [8 – 11], у яких для дослідження оптимізаційних задач застосовано метод усереднення.

Ця стаття узагальнює на нескінченновимірний випадок результати роботи [11]. Ідея доведення існування оптимального керування та оптимальної траєкторії більш-менш стандартизована і складається з трьох етапів:

1) виділення слабко збіжної мінімізуючої послідовності допустимих керувань;
2) доведення компактності множини відповідних траєкторій;
3) обґрунтування граничного переходу в рівняннях і функціоналі якості.

Однак, на відміну від задач зі скінченним моментом керування T при цьому виникають принципові труднощі: задача розглядається до моменту виходу τ розв'язків із області. При цьому цей момент виходу залежить від керування: $\tau = \tau(z)$. Тому фактичним розв'язком задачі є трійка $\left(z^*, u^*, \tau^*\right)$ — оптимальне керування, оптимальна траєкторія і оптимальний момент виходу. Зазначимо, що частковим випадком цієї задачі є задача найшвидшого виходу розв'язку на границю області $\tau \to \inf$ при $L = 1$.

Оскільки момент виходу $\tau = \tau(z)$ залежить від керування, то для доведення існування оптимального керування доведеться робити ще й граничний перехід у моменті виходу $\tau\left(z^{(n)}\right)$, що є досить нетривіальною задачею.

Далі наведемо структуру роботи. В п. 2 подамо всі необхідні поняття й означення та строгу постановку задачі. Пункт 3 присвячено теоремам існування і продовжуваності до моменту виходу на границю області розв'язків еволюційного функціонально-диференціального рівняння. При цьому будемо мати на увазі, що умови цих теорем повинні задовольняти задачі оптимального керування, що призводить до відмови від умови неперервності за часовою змінною правих частин рівнянь і її заміни на умову вимірності.

Основний результат статті доведено в п. 4. Пункт 5 присвячено застосуванню отриманих результатів до функціонально-диференціальних рівнянь, зокрема, з частинними похідними.

2. Необхідні означення та основні результати. Нехай X — рефлексивний банахів простір з нормою $|\cdot|,$ A — лінійний оператор $A\colon X\to X$ з областю $D(A)$ і A — генератор C_0 напівгрупи $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ обмежених операторів у X.

Ми припускаємо, що ця напівгрупа $S(t)$ є компактною для $t>0$. Для фіксованого $h>0$ розглянемо простір $C=C([-h,0],X)$ неперервних відображень із $[-h,0]$ у X з нормою $\|\varphi\|_C=\sup_{\Theta\in[-h,0]}|\varphi(\Theta)|$.

Означення 2.1. *Будемо говорити, що функція $u(t)\in X$ є м'яким розв'язком початкової задачі (1.2) на $[0,T]$, якщо:*

1) $u(t)=\varphi_0(t),\ t\in[-h,0]$;
2) $u(t)\in C([0,T];X)$;
3) $u(t)$ *задовольняє інтегральне рівняння*

$$u(t)=S(t)u(0)+\int\limits_0^t S(t-s)f(s,u_s)ds \tag{2.1}$$

на $[0,T]$.

Розглядаємо задачу оптимального керування (1.1), (1.1^*) за таких умов:

A_1) допустимими керуваннями будемо вважати функції $z\in L^p((0,T);),\ p>1,\ F$ — опукла й замкнена множина в $X,\ z(t)\in F$ майже для всіх $t\in(0,T)$.

Нехай D — відкрита множина в $\mathbb{R}\times C,\ \partial D$ — її межа і $\overline{D}=D\cup\partial D,\ (0,\varphi_0)\in D,$ $u(t)\in X,\ u_t$ — сегмент $u,\ \tau$ — момент першого виходу розв'язку рівняння (1.1) на межу ∂D.

Накладемо такі умови на нелінійності:

A_2) $f_1(t,\varphi)$ — відображення з D у X і $f_2(t,\varphi)$ — відображення з D у $\mathcal{L}(X,X)$, для кожного фіксованого t відображення f_1 і f_2 неперервні по φ, а для кожного фіксованого φ відображення f_1 і f_2 є вимірними по t;

A_3) *(умова лінійного росту)* існує стала $K>0$ така, що нерівність

$$|f_1(t,\varphi)|+\|f_2(t,\varphi)\|_{\mathcal{L}}\leq K(1+\|\varphi\|_C)$$

виконується для всіх $(t,\varphi)\in D$.

Далі накладемо умови на функцію критерію якості (1.1^*):

A_4) відображення $L(t,\varphi,y)\colon D\times F\to\mathbb{R}$ є неперервним за всіма змінними та існує стала $K_1>0$ така, що

$$|L(t,\varphi,y)-L(t,\psi,y)|\leq K_1\|\varphi-\psi\|_C;$$

A_5) похідна Фреше L_u відображення L неперервна за всіма змінними та існують додатні сталі c_1 і α такі, що

$$\|L_u(t,\varphi,y)\|_*\leq c_1\big(1+\|\varphi\|_C^\alpha+|y|^{p-1}\big),$$

де $\|\cdot\|_*$ — норма в спряженому просторі X^*;

A_6) існує стала $c>0$ така, що $L(t,\varphi,y)\geq c|y|^p$;

A_7) $L(t,\varphi,y)$ опукла по y при фіксованих (t,φ).

Основний результат стосується існування оптимальної пари $\big(u^*(t), z^*(t)\big)$ для задачі (1.1), (1.1*).

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови A_1) – A_7). Тоді задача оптимального керування (1.1), (1.1*) має розв'язок $\big(u^*(t), z^*(t)\big)$, де $z^*(t)$ — оптимальне керування, а $u^*(t)$ — відповідна йому оптимальна траєкторія.*

3. Деякі допоміжні результати. У теоремі 2.1 [12] наведено умови існування в'язких розв'язків рівняння (2.1) у випадку, коли відображення $f(t,\varphi)$ неперервне за двома змінними. Але, як сказано у вступі, для задач оптимального керування вимога неперервності по t не є природною. Тому приведемо теорему існування в необхідній для викладу формі, замінивши умову неперервності по t на умову вимірності.

Будемо вважати, що виконуються такі умови: нехай U — відкрита підмножина із C і $f : [0,T] \times U \to X$.

Окрім цього, виконуються умови:

E_1) для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ відображення f є неперервним по φ;

E_2) для кожного фіксованого $\varphi \in U$ відображення f є вимірним по t для кожного $R > 0$;

E_3) для кожного $R > 0$ існує інтегровна функція $m_R(t) \in L^p_{\text{loc}}$ така, що $|f(t,\varphi)| \leq m_R(t), \varphi)$ при $\|\varphi\|_C \leq R$.

Наступна теорема стверджує локальне існування м'якого розв'язку рівняння (2.1).

Теорема 3.1. *Припустимо, що виконуються умови E_1) – E_3). Тоді для кожного $\varphi \in U$ існує $t_1 = t(\varphi)$ і $t_1 \in [0,T]$ та неперервна функція $u : [-h, t_1] \to X$ така, що $u(t)$ є м'яким розв'язком рівняння (2.1) на $[0, h_1]$ із початковою функцією φ.*

Доведення теореми ідейно схоже на доведення відповідної теореми 2.1 [12] із використанням теореми Шаудера про нерухому точку. Тому ми не будемо його проводити детально, а зупинимося на відмінних моментах.

Очевидним є існування $M > 0$ такого, що $\|S(t)\| \leq M$ для $t \in [0,T]$. Можемо обрати $\beta > 0$ таке, що замкнена обмежена множина $B = \{\psi \in C : \|\psi - \varphi\|_C \leq \beta\} \subset U$. Далі аналогічно до [12] вводимо замкнену опуклу обмежену множину $A(\alpha,\beta) = \{y \in C([-h,\alpha]; X) : y_0 = \varphi,\ y_t \in B,\ t \in [0,\alpha]\}$, де α — достатньо мале. На цій множині розглянемо оператор

$$G(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h, 0], \\ S(t)\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t S(t-s) f(s, y_s) ds. \end{cases} \tag{3.1}$$

Далі покажемо, що $G(A(\alpha,\beta)) \subset A(\alpha,\beta)$ при достатньо малому α. При цьому інтегральний член в (3.1) оцінюємо з використанням умови E_3), а саме:

$$\left\| \int_0^t T(t-s) f(s, y_s) ds \right\| \leq M \int_0^\alpha m_R(s) ds \leq \frac{\beta}{3} \tag{3.2}$$

згідно з вибором α та абсолютною неперервністю інтеграла Лебега.

Для доведення того факту, що G відображає $A(\alpha,\beta)$ в передкомпактну підмножину з $A(\alpha,\beta)$, ми використаємо нескінченновимірний аналог теореми Арцела – Асколі.

Рівномірну неперервність сім'ї функцій $G(y)(t)$ можна довести аналогічно до [12]. Для доведення передкомпактності для кожного $t \in [0,\alpha]$ множини $\{G(y)(t) : y \in A(\alpha,\beta)\}$ у X потрібно використати наслідок із [13] (Proposition 8.1).

Твердження 3.1. *Якщо* $S(t),\ t > 0,$ *— компактні оператори і* $p \geq 1$, *то оператор* $Gf(t) = \int\limits_0^t S(t-s)f(s)ds,\ f \in L^p(0,T;X),\ t \in [0,T]$, *є компактним із* $L^p(0,T;X)$ *в* $C([0,T];X)$.

У іншій частині доведення співпадає з [12].

Очевидно, що наведені вище міркування справедливі й у тому випадку, коли початкову точку $t = 0$ замінити на довільну точку $t_0 \in [0,T]$. При цьому початкову функцію потрібно задавати на відрізку $[t_0 - h, t_0]$. Тому природно поставити питання про продовжуваність розв'язку на максимально можливий інтервал.

Позначимо $(0,T) \times U = D$. Очевидно, що D є відкритою множиною в $[0,T] \times C$. Нехай ∂D — межа області D і $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Покажемо, що розв'язок початкової задачі (2.1) із теореми 3.1 може бути продовжений на максимальний інтервал до межі ∂D.

Справедлива наступна теорема про продовження розв'язку.

Теорема 3.2. *За умов теореми 3.1 розв'язок початкової задачі (2.1) із початковими функціями* $(t_0, \varphi) \in D$ *існує на інтервалі максимальної довжини* $[t_0, \tau],\ \tau > t_0$, *і* $(\tau, u_\tau) \in \partial D$.

Зауваження. Розв'язок, про який говориться в теоремі 3.2, називається *непродовжуваним*.

Доведення теореми 3.2. Аналогічний результат у скінченновимірному просторі при умові компактності відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ отримано в [1] (Theorem 2.3.2). Адаптуємо цей підхід до нескінченновимірного випадку за умови, що відображення f задовольняє умови E_1) – E_3). При цьому суттєву роль відіграє компактність напівгрупи $S(t)$.

Для подальшого викладу необхідні наступні леми.

Лема 3.1. *За виконання умов теореми 3.1, якщо* $W \subset D$ *і* W *— компакт, то існує таке* $\alpha > 0$, *що для довільних початкових даних* $(t_0, \varphi) \in W$ *розв'язок задачі (2.1) існує на відрізку* $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Доведення леми 3.1. Оскільки W — компакт, то існує відкрита множина $V \subset C$ така, що справедливими є включення $W \subset V \subset D$. Тому існує функція $m(t)$ така, що нерівність (3.1) виконується для всіх $(t_0, \varphi) \in W$. Це дозволяє обрати α з побудови множини $A(\alpha, \beta)$ одночасно для всіх $(t_0, \varphi) \in W$. Наступна частина доведення випливає з теореми 3.1.

Лема 3.2. *Якщо* $u(t)$ *— непродовжуваний розв'язок рівняння (2.1) на* $[0, \tau)$, *то для довільного компакту* $W \subset D$ *існує* t_W *таке, що* $(t, u_t) \notin W$ *для* $t \in [t_W, \tau)$.

Доведення леми 3.2. Оскільки W — компакт у D, то з леми 3.1 випливає існування такого $\alpha > 0$, що для довільної точки $(c, \varphi) \in W$ рівняння (2.1) має розв'язок $u(t)$, визначений, як мінімум, на $[c, c + \alpha]$. При цьому $u(t) = \varphi(t),\ t \in [c - h, c]$. Подальше доведення аналогічне до доведення теореми 2.3.1 [1].

Продовжимо доведення теореми 3.2. Завдяки викладеному вище розв'язок рівняння (2.1) із довільними початковими даними $(t_0, \varphi) \in D$ існує на деякому інтервалі $[t_0, \alpha]$. Тоді його можна продовжити на максимальний інтервал $[t_0, \tau)$, існування якого випливає з леми Цорна.

Покажемо, що для довільної замкненої обмеженої множини $K \subset D$ існує t_K таке, що $(t, u_t) \notin K$ при $t \in (t_k, \tau)$.

Нехай це твердження хибне. Тоді існує послідовність $t_K \to \tau - 0$ така, що $(t_k, u_{t_k}) \in K$ для всіх k. Із неперервності за нормою простору X розв'язку $u(t)$ на відрізку $[t_0 - h, \tau - \varepsilon]$ (для довільного $\varepsilon > 0$) випливає рівномірна неперервність u_t у просторі C при $t \in [t_0, \tau - \varepsilon]$.

Тоді множина $P = \{(t, u_t) : t \in [t_0, \tau)\}$ обмежена, оскільки в іншому випадку існувала б послідовність (s_k, u_{s_k}) така, що $s_k \to \tau - 0$, а $\|u_{s_k}\|_C \to \infty,\ k \to \infty$.

Останнє суперечить рівномірній неперервності u_t на $[t_0, \tau-\varepsilon]$, оскільки й послідовність t_k прямує до $\tau - 0$, а u_{t_k} обмежена. Звідси випливає, що всі точки замикання $\overline{P}$ належать K. Отже, $\overline{P} \subset D$.

Покажемо, що множина P міститься у деякому компакті в D. Знову скористуємося нескінченновимірним аналогом теореми Арцела – Асколі. Для цього треба показати, по-перше, що для довільного $\Theta \in [-h, 0]$ передкомпактність множини $P(\Theta) = \{(t, u(t+\Theta)) : t \in (t_0, \tau)\}$, по-друге, рівномірну неперервність сім'ї функцій $\{u(t+\Theta)\|,\ \Theta \in [-h, 0],\ t \in \in [t_0, \tau)\}$.

Для доведення передкомпактності множини $P(\Theta)$ побудуємо для кожного $\delta > 0$ скінченну δ-сітку. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $t_0 = 0$. Оберемо достатньо мале $\nu > 0$ і зафіксуємо його. Тепер всі елементи множини $P(\Theta)$ розіб'ємо на дві підмножини

$$P_1(\Theta) = \{(t, u(t+\Theta)),\ t+\Theta \in [-h, \nu]\},$$
$$P_2(\Theta) = \{(t, u(t+\Theta)),\ t+\Theta \in [\nu, \tau]\}$$

таким чином, що

$$P(\Theta) = P_1(\Theta) \cup P_2(\Theta). \tag{3.3}$$

Існування скінченної δ-сітки для множини $P_1(\Theta)$ випливає з рівномірної неперервності функції $u(t+\Theta)$ на $[-h, \nu]$.

Побудуємо тепер скінченну δ-сітку для множини $P_2(\Theta)$. Елементи цієї множини мають вигляд

$$u(t+\Theta) = S(t+\Theta)\varphi_0(0) + \int_0^{t+\Theta} S(t+\Theta-s) f(s, u_s) ds. \tag{3.4}$$

Для довільного $\varepsilon \in (0, \nu)$ розглянемо множину $P_2(\Theta)$, елементи якої $u_\varepsilon(t+\Theta)$ мають вигляд

$$u_\varepsilon(t+\Theta) = S(t+\Theta)\varphi_0(0) + \int_0^{t+\Theta-\varepsilon} S(t+\Theta-s) f(s, u_s) ds. \tag{3.5}$$

З того, що $\overline{P} \in K$, а K обмежена, завдяки умові $E_3)$ існує інтегрована функція $m(t)$ така, що $|f(s, u_s)| \le m(s)$ при всіх $s \in [0, \tau)$.

Звідси $S(t),\ t \ge 0$, є C_0-напівгрупою. Тоді існує деяка додатна стала $M > 0$ така, що

$$\|S(t)\| \le M, \quad t \in [0, T]. \tag{3.6}$$

Використовуючи властивості напівгрупи, маємо

$$u_\varepsilon(t+\Theta) = S(\varepsilon)S(t+\Theta-\varepsilon)\varphi_0(0) + S(\varepsilon) \int_0^{t+\Theta-\varepsilon} S(t+\Theta-\varepsilon-s) f(s, u_s) ds. \tag{3.7}$$

Таким чином, множина $S(t+\Theta-\varepsilon)\varphi_0(0)$ входить у деякий шар у X для всіх $t\in[0,\tau)$, а множина $S(\varepsilon)S(t+\Theta-\varepsilon)\varphi_0(0)$ є передкомпактною в X.

З (3.7) ми також маємо

$$\left\|\int\limits_0^{t+\Theta-\varepsilon} S(t+\Theta-\varepsilon-s)f(s,u_s)ds\right\| \le$$
$$\le \int\limits_0^{t+\Theta-\varepsilon} \|S(t+\Theta-\varepsilon-s)\|\,|f(s,u_s)|ds \le$$
$$\le \int\limits_0^{t+\Theta-\varepsilon} Mm(s)ds \le M\int\limits_0^{T} m(s)ds \le c.$$

Тоді множина $\int_0^{t+\Theta-\varepsilon} S(t+\Theta-\varepsilon-s)f(s,u_s)ds$ також входить у деякий шар у X для всіх $t\in[0,\tau)$, а множина $S(\varepsilon)\int_0^{t+\Theta-\varepsilon} S(t+\Theta-\varepsilon-s)f(s,u_s)ds$ є передкомпактною в X.

Отже, для всіх $\varepsilon\in(0,\nu)$ множина $P_\varepsilon(\Theta)$ є передкомпактною в X. Тоді ця множина містить скінченну $\dfrac{\delta}{3}$-сітку. Позначимо її $\{u_\varepsilon(t_1+\Theta),\ldots,u_\varepsilon(t_p+\Theta)\}=B(\varepsilon,\delta,\Theta)$. Маємо

$$|u(t+\Theta)-u_\varepsilon(t+\Theta)| = \left\|\int\limits_{t+\Theta-\varepsilon}^{t+\Theta} S(t+\Theta-s)f(s,u_s)ds\right\| \le M\int\limits_{t+\Theta-\varepsilon}^{t+\Theta} m(s)\,ds \to 0,$$

$\varepsilon\to 0$ рівномірно по t і Θ завдяки абсолютній неперервності інтеграла Лебега.

Таким чином, одержуємо

$$\sup_{t\in[0,\tau),\Theta\in[-h,0]} |u(t+\Theta)-u_\varepsilon(t+\Theta)| \to 0, \quad \varepsilon\to 0. \tag{3.8}$$

За δ-сіткою множини $P_\varepsilon(\Theta)$ побудуємо скінченну множину

$$B(\delta,\Theta)=\{u(t_1+\Theta),\ldots,u(t_p+\Theta)\}$$

елементів із $P_2(\Theta)$, де ε обрано так, щоб

$$\sup_{t\in(\nu,\tau)} |u(t+\Theta)-u_\varepsilon(t+\Theta)| < \frac{\delta}{3}. \tag{3.9}$$

Тоді $B(\delta,\Theta)$ є скінченною δ-сіткою для $P_2(\Theta)$. Дійсно, тоді для довільного $t\in(\nu,\tau)$ існує $u_\varepsilon(t_k+\Theta)\in B(\varepsilon,\delta,\Theta)$ таке, що

$$|u_\varepsilon(t_k+\Theta)-u_\varepsilon(t+\Theta)| < \frac{\delta}{3}$$

і

$$|u_\varepsilon(t+\Theta)-u(t+\Theta)| < \frac{\delta}{3}.$$

Отже,

$$|u(t+\Theta)-u(t_k+\Theta)| \leq |u(t+\Theta)-u_\varepsilon(t+\Theta)|+ \\ + |u_\varepsilon(t+\Theta)-u_\varepsilon(t_k+\Theta)| + |u_\varepsilon(t_k+\Theta)-u(t_k+\Theta)| < \tau.$$

Таким чином, скінченну δ-сітку побудовано і для $P_1(\Theta)$, і для $P_2(\Theta)$. Тоді множина $P(\Theta)$ є передкомпактною в X, а отже, першу частину теореми доведено.

Доведемо тепер другу частину теореми — рівномірну неперервність сім'ї функцій $\{u(t+\Theta)\}$. Тобто покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $t \in [0,\tau)$ маємо

$$\big|u(t+\Theta_1)-u(t+\Theta_2)\big| < \varepsilon \tag{3.10}$$

для всіх $\Theta_1, \Theta_2 \in [-h, 0]$, якщо $|\Theta_1 - \Theta_2| < \delta$.

Припустимо, що $\Theta_2 = \Theta + r$. Тоді для деякого $\nu > 0$ розглянемо три випадки.

1. $t+\Theta_2 \leq \nu$. У цьому випадку рівномірна неперервність $u(t+\Theta)$ випливає з рівномірної неперервності функції $u(t)$ на $[-h,\nu]$.

2. $t+\Theta_1 < \nu$ і $t+\Theta_2 \geq \nu$. У цьому випадку маємо $|u(t+\Theta_2)-u(t+\Theta_1)| \leq |u(t+\Theta_2) - u(\nu)| + |u(t+\Theta_1)-u(\nu)|$. Обираючи достатньо мале $\delta > 0$, одержуємо, що точки $t+\Theta_2$ і $t+\Theta_1$ лежать у достатньо малих лівих і правих околах ν таким чином, що

$$|u(t+\Theta_2)-u(\nu)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad |u(t+\Theta_1)-u(\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Відповідно для тих $t \in [0,\tau)$, для яких має місце другий випадок, рівномірна неперервність випливає з неперервності $u(t)$ у точці ν.

3. $t+\Theta_1 \geq \nu$. У цьому випадку з того, що напівгрупа $S(t)$, $t>0$, є компактом, маємо, що $S(t)$ є неперервною в рівномірній операторній топології [14].

Отже, $S(t)$ є рівномірно неперервною на $[\nu, T]$. Тому маємо

$$\begin{aligned}|u(t+\Theta_1)-u(t+\Theta_2)| &\leq \big\|S(t+\Theta_1)-S(t+\Theta_1+\tau)\big\|\,\varphi_0(0)+ \\ &\quad + \int_0^{t+\Theta_1} \big\|S(t+\Theta_1+\tau-s)-S(t+\Theta_1-s)\big\|\,|f(s,u_s)|ds+ \\ &\quad + \int_{t+\Theta_1}^{t+\Theta_1+\tau} \|S(t+\Theta_2-s)\|\,|f(s,u_s)|\,ds = \\ &= I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Із рівномірної неперервності випливає, що $I_1 \to 0$, $\tau \to 0$ рівномірно по всіх t і Θ_1, $I_3 \leq \leq M \int_{t+\Theta_1}^{t+\Theta_1+\tau} m(s)ds \to 0$, $\tau \to 0$, рівномірно по t і Θ_1 завдяки абсолютній неперервності інтеграла Лебега;

$$I_2 \leq \left(\int_0^{t+\Theta_1} \|S(t+\Theta_1+\tau-s)-S(t+\Theta_1-s)\|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T m^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тоді ми маємо такі оцінки:

$$I_2 \leq \left(\int_0^T \|S(s+\tau) - S(s)\|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T m^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad \tau \to 0,$$

за теоремою Лебега про домінантну збіжність.

Таким чином, $\{(t, u_t) : t \in [0, \tau)\}$ належить компактній множині в D, що суперечить лемі 3.2.

Теорему 3.2 доведено.

Таким чином, теорема 3.2 визначає умови, при яких траєкторія (t, u_t) непродовжуваного розв'язку на $[0, \tau)$ виходить до границі при $t \to \tau - 0$, що пояснюється відповідно зі згаданою теоремою.

4. Доведення головного результату. ***4.1. Доведення теореми 2.1.*** Спочатку зауважимо, що керування $z(t) = a$ — сталий елемент із U — є допустимим. Дійсно, для $z(t) = a$ маємо систему керування

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Au + f_1(t, u_t) + f_2(t, u_t)a, \\ &u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Легко бачити, що всі умови теореми 3.1 виконуються. Тоді з теореми 3.1 розв'язок $u(t)$, який відповідає керуванню a, визначений на $[0, \tau)$ і τ — момент першого виходу (t, u_t) на межу ∂D. Для всіх $t \in [0, \tau)$ маємо

$$|u(t)| \leq |S(t)\varphi_0(0)| + \int_0^t |S(t-s) f_1(s, u_s)|\, ds + \int_0^t |S(t-s) f_2(s, u_s) a|\, ds \leq$$

$$\leq M|\varphi_0(0)| + \int_0^t MK(1 + \|u_s\|_C) ds + M \int_0^t \|f_2(s, u_s)\|_{\mathcal{L}} |a| ds \leq$$

$$\leq M|\varphi_0(0)| + K \int_0^t (1 + \|u_s\|_C) ds + K \int_0^t (1 + \|u_s\|) |a| ds \leq$$

$$\leq c_1 + c_2 \int_0^t \max_{s_1 \in [-h, s]} |u(s_1)| ds,$$

де $M = \max_{t \in [0,T]} \|S(t)\|_{\mathcal{L}}$.

Тоді з використанням нерівності

$$\max_{s \in [-h, t]} |u(s)| \leq \max_{s \in [-h, 0]} |\varphi_0(s)| + \max_{s \in [0, t]} |u(s)| \tag{4.2}$$

одержуємо

$$\max_{s \in [-h, t]} |u(s)| \leq c_3 + c_4 \int_0^t \max_{s_1 \in [-h, s]} |u(s_1)| ds. \tag{4.3}$$

Із (4.2) також випливає очевидна нерівність

$$\sup_{t\in[0,\tau)} ||u(t)||_C \le \sup_{s\in[-h,0]} |\varphi(s)| + \sup_{s\in[0,\tau)} |u(s)|. \tag{4.4}$$

Із (4.3), (4.4) і леми Гронуолла отримуємо

$$\max_{t\in[0,\tau)} \|u_t\|_C \le c_5,$$

де стала c_5 не залежить від τ.

Із обмеженості u_t та умови A_4) випливає обмеженість

$$\int_0^\tau \mathcal{L}(t,u_t,a)\,dt. \tag{4.4*}$$

Отже, $\inf_{z\in U}\mathcal{J}(z) < \infty$. Із невід'ємності $\mathcal{J}(z)$ випливає існування невід'ємної нижньої грані m значень $\mathcal{J}(z)$.

Нехай $\{z^{(n)}(t)\}$ — мінімізуюча послідовність така, що $\mathcal{J}\big(z^{(n)}\big) \to m,\ n\to\infty$. Побудуємо послідовність $\{u^{(n)}\}$ розв'язків рівняння (1.1), які відповідають керуванням $z^{(n)}$, при цьому кожний розв'язок визначено на своєму максимальному інтервалі $[0,\tau_n)$. Із A_6) маємо

$$m+1 \ge \int_0^{\tau_n} \mathcal{L}\Big(t,u_t^{(n)},z^{(n)}(t)\Big)dt \ge \int_0^T |z^{(n)}(t)|^p dt \tag{4.5}$$

для достатньо великих n. Завдяки рефлексивності X слабко компактною в $L^p([0,T];X)$ є послідовність $\{z^{(n)}(t)\}$, а отже, існує послідовність, перепозначена як $\{z^{(n)}\}$, і $z^* \in$ $\in L^p([0,T];X)$ таке, що $z^{(n)} \xrightarrow{w} z^*$ в $L^p([0,T];X)$ при $n\to\infty$.

З того, що U — замкнена й опукла, за лемою Мазура стверджуємо, що $z^0\in U$.

Покажемо тепер рівномірну обмеженість розв'язків $u^{(n)}(t)$ на $[0,\tau_n)$. З інтегрального зображення

$$u^{(n)}(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)\Big[f_1\big(s,u_s^{(n)}\big) + f_2\big(s,u_s^{(n)}\big)z^{(n)}(s)\Big]ds \tag{4.6}$$

маємо

$$\big|u^{(n)}(t)\big| \le M|\varphi(0)| + M\int_0^t K\Big(1+\big\|u_s^{(n)}(t)\big\|_C\Big)ds +$$

$$+ M\int_0^t K\Big(1+\big\|u_s^{(n)}(t)\big\|_C\Big)|z^{(n)}(s)|ds.$$

Тоді для q такого, що $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1$, одержуємо

$$\big|u^{(n)}(t)\big|^q \le 3^{q-1}\left(|\varphi(0)|^q + MK^qT^{\frac{q}{p}}2^{q-1}\int_0^t\Big(1+\big\|u_s^{(n)}\big\|_C^q\Big)ds\right)\left(\int_0^T \big|z^{(n)}(s)\big|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.7}$$

звідки з урахуванням (4.5) стандартними міркуваннями з використанням леми Гроноулла приходимо до нерівності

$$\max_{s\in[-h,\tau_n)} |u^{(n)}(s)| \le c_6,$$

де стала c_6 не залежить від n.

Із теореми 3.2 маємо, що $\left(\tau_n, u^n_{\tau_n}\right) \in \partial D$, а з (4.7) завдяки рівномірній неперервності u_t на $[0,\tau)$ отримуємо

$$\left\|u^{(n)}_{\tau_n}\right\|_C \le c_6 \qquad \text{i} \qquad \lim_{t\to\tau_n-0} u^{(n)}(t) = u^{(n)}(\tau_n).$$

Продовжимо функції $u^{(n)}(t)$ на весь сегмент $[0,T]$ таким чином:

$$v^{(n)}(t) = \begin{cases} u^{(n)}(t), & t\in[0,\tau_n), \\ u^{(n)}(\tau_n), & t\in[\tau_n,T]. \end{cases} \tag{4.8}$$

Із (4.6) випливає, що

$$u^{(n)}(\tau_n) = S(\tau_n)\varphi(0) + \int_0^{\tau_n} S(\tau_n - s)\Big[f_1\big(s,u^{(n)}_s\big) + f_2\big(s,u^{(n)}_s\big)z^{(n)}(s)\Big]ds.$$

Тоді аналогічними з теоремою 3.2 міркуваннями, які використовувалися для доведення компактності $P(\Theta)$, отримуємо, що сім'я $\left\{u^{(n)}(\tau_n)\right\}$ компактна в X. У такий же спосіб робимо висновок, що $\left\{u^{(n)}(t)\right\}$ компактна в X при $t\in[0,\tau_n)$. Очевидно, що рівностепенево неперервною на $[0,T]$ є сім'я функцій $\left\{v^{(n)}(t)\right\}$, а тому компактною в $C([0,T];X)$; отже, вона містить збіжну в $C([0,T];X)$ підпослідовність, яку знову позначимо через $v^{(n)}(t)$. Нехай $v^{(n)}(t)$ рівномірно збігається до $v^*(t)$. Ця функція визначена й неперервна на $[0,T]$. Позначимо через τ^* момент першого виходу пари $\left(t, v^*_t\right)$ із D, тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t\in[0,T] : (t,v^*_t)\in\partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо } \ (t,v^*_t)\in D \ \ \forall t\in[0,T]. \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$v^{(n)}_{\tau_n} = v^{(n)}(\tau_n+\Theta) = u^{(n)}(\tau_n+\Theta) = u^{(n)}_{\tau_n}$$

і τ_n — момент першого виходу $\left(t, v^*_t\right)$ на ∂D. Тепер ми покажемо, що

$$\tau^* \le \lim_{n\to\infty}\inf \tau_n. \tag{4.9}$$

Дійсно,

$$\tau^* \ge \lim_{n\to\infty}\inf \tau_n = \tau. \tag{4.10}$$

Існує послідовність $\tau_{n_k}\to\tau,\ n_k\to\infty$.

Отже, для достатньо великого n_k маємо $\tau_{n_k} < \tau^*$ і

$$(\tau, v^*_\tau)\in D, \quad \left(\tau_{n_k}, v^{(n_k)}_{\tau_{n_k}}\right)\in\partial D. \tag{4.11}$$

З іншого боку, беручи до уваги рівномірну збіжність $v^{(n)}(t)$ до $v^*(t)$ і рівномірну неперервність $v^*(t)$ на $[-h,T]$, легко показати, що $v^{(n_k)}_{\tau_{n_k}} \to v^*_\tau$ у $C,\ n_k \to \infty$.

З того, що множина ∂D замкнена, маємо, що $\left(\tau, v^*_\tau\right) \in \partial D$, а це суперечить (4.11).

Покладемо $u^*(t) = v^*(t)$. Далі покажемо, що $u^*(t)$ є розв'язком рівняння (1.1), який відповідає керуванню $z^*(t)$.

Розглянемо такі випадки:

1. $\tau^* < \tau$.

Тоді за теоремою про характеризацію нижньої границі множина $\left\{n \in \mathbb{N}\colon \tau_n \le \tau^*\right\}$ є скінченною і існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$ така, що $\tau_{n_k} > \tau^*$. Отже, $v^{(n_k)}(t) = u^{(n_k)}(t)$ для $t \in \left[0,\tau^*\right]$ і $u^{(n_k)}(t)$ збігається рівномірно до $u^*(t),\ n_k \to \infty$. Маємо

$$u^{(n_k)}(t) = S(t)\varphi(0) + \int\limits_0^t S(t-s) f_1\Big(s, u^{(n_k)}_s\Big) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t S(t-s) f_2\Big(s, u^{(n_k)}_s\Big) z^{(n_k)}(s) ds \tag{4.12}$$

для $t \in \left[0,\tau^*\right]$.

Отже,

$$u^{(n_k)}(t) = S(t)\varphi(0) + \int\limits_0^t S(t-s) f_1\Big(s, u^{(n_k)}_s\Big) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t S(t-s) \Big[f_2\Big(s, u^{(n_k)}_s\Big) - f_2(s, u^*_s)\Big] z^{(n_k)}(s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t S(t-s) f_2(s, u^*_s) z^{(n_k)}(s) ds. \tag{4.13}$$

Очевидно, що $u^{(n_k)}_t \to u^*_t$ в C для всіх $t \in \left[0,\tau^*\right]$.

Перейдемо до границі в (4.12). За теоремою Лебега про мажорантну збіжність можемо зробити висновок, що третій доданок у (4.13) збігається до нуля.

Розглянемо останній доданок у (4.12). Він являє собою компактний оператор стосовно $z^{n_k}(t)$, який діє з $L^p([0,T];X)$ у $C([0,T];X)$ згідно з твердженням 3.1, а тому переводить слабко збіжну в $L^p([0,T];X)$ послідовність $\left\{z^{(n_k)}(t)\right\}$ у сильно збіжну в $C([0,T];X)$ послідовність з огляду на рефлексивність X.

Враховуючи, що для лінійного неперервного оператора $A\colon X \to Y,\ X,\ Y$ — банахові простори, зі слабкої збіжності $x_n \xrightarrow{w} X$ у X випливає слабка збіжність $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$ у Y, робимо висновок, що останній доданок у (4.12) збігається в X до інтеграла

$$\int\limits_0^t S(t-s) f_2(s, u^*_s) z^*(s) ds.$$

Отже, в цьому випадку отримуємо

$$u^*(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)f_1(s,u_s^*)ds + \int_0^t S(t-s)f_2(s,u_s^*)z^*(s)ds. \tag{4.14}$$

А тому $u^*(t)$ є розв'язком рівняння (1.1), який відповідає керуванню $z^*(t)$ на $\big[0,\tau^*\big]$.

2. $\tau^* = \tau$.

Оберемо довільну точку $t_1 \in [0,\tau)$. Тоді множина $\big\{\tau_n : \tau_n \le t_1\big\}$ є скінченною.

У випадку скінченності множини $Z = \big\{\tau_n : t_1 < \tau_n < \tau^*\big\}$ доведення зводиться до попереднього випадку. Нехай Z — нескінченна множина і τ_{n_k} — підпослідовність послідовності τ_n така, що $\tau_{n_k} \in Z$. Тоді для кожного $t \in [0,t_1]$ маємо $v^{(n_k)}(t) = u^{(n_k)}(t)$ і $v^*(t) = u^*(t)$.

Аналогічно до попереднього випадку одержуємо, що $u^*(t)$ — розв'язок рівняння (1.1), який відповідає керуванню $z^*(s)$. Тоді (4.15) виконується для $t \in [0,t_1]$ при довільному $t_1 < \tau$. Граничним переходом у (4.15) при $t_1 \to \tau$ ми переконуємося, що виконується (4.15) при $t = t_1$.

Залишилося показати, що пара $\big(u^*(t), z^*(t)\big)$ є оптимальною.

Знову розглянемо два випадки:

1. $\tau^* < T$.

а) $\tau < \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau$.

Тоді існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$ така, що $\{\tau_{n_k}\} > \tau^*$, і $v^{(n_k)}(t) = u^{(n_k)}(t)$, $u^*(t) = v^*(t)$ для $t \in \big[0,\tau^*\big]$.

Нехай $a \in U$ — стале допустиме керування. Використовуючи нерівність

$$\Big|L\Big(t,u_t^*,u^{(n_k)}(t)\Big) - L(t,u_t^*,a)\Big| \le \sup_{\lambda\in(0,1)} \Big\|L_u\Big(t,u_t^*,a+\lambda\Big(u^{(n_k)}(t)-u_0\Big)\Big)\Big\|_*\Big|u^{(n_k)}(t)-u_0\Big|,$$

з урахуванням A$_5$) маємо

$$L\Big(t,u_t^*,u^{(n_k)}(t)\Big) \le L(t,u_t^*,a) + c_1\left(1 + \|u_t^*\|_C^\alpha + \Big|u^{(n_k)}(t)-u_0\Big|^{p-1}\right)\Big|u^{(n_k)}(t)-u_0\Big|,$$

звідки випливає інтегрованість $L\big(t,u_t^*,u^{(n_k)}(t)\big)$ на $\big[0,\tau^*\big]$.

Нехай $\mathcal{X}_R(t)$ — функція-індикатор множини $\big\{t \in \big[0,t^*\big] : \big|z^*(t)\big| < R\big\}$ для $R > 0$. З умов A$_5$) і A$_7$) отримаємо

$$\int_0^{\tau^*} L\Big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\Big)\mathcal{X}_R(t)dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t,u_t^*,z^*(t))\mathcal{X}_R(t)dt +$$

$$+\int_0^{\tau^*} L_U(t,u_t^*,z^*(t))\Big(u^{(n_k)}(t)-u^*(t)\Big)\mathcal{X}_R(t)dt. \tag{4.15}$$

Із A$_5$) маємо

$$\big\|L_U(t,u^*(t),z^*(t))\big\|_*\mathcal{X}_R(t) \le c_1\big(1 + \|u_t^*\|_C^\alpha + R^{p-1}\big),$$

отже, другий доданок у (4.16) прямує до нуля завдяки слабкій збіжності $u^{(n_k)} \xrightarrow{w} u^*$ у $L^p([0,T];X)$. Тоді

$$\lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau^*} L\Big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\Big)\mathcal{X}_R(t)dt \geq \int_0^{t} L(t,u_t^*,z^*(t))\mathcal{X}_R(t)dt.$$

Згідно з тим, що $L(t,u,y)\geq 0,\ \mathcal{X}_R(t)\leq 1$ і $\mathcal{X}_R(t)\to 1,\ R\to\infty$, з останньої нерівності отримуємо

$$\int_0^{\tau^*} L(t,u_t^*,z^*(t))dt \leq \lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau^*} L\Big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\Big)dt; \tag{4.16}$$

при цьому враховано інтегровність $L\big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\big)$ на $[0,\tau^*]$. Очевидно, з умови A_4) отримуємо

$$\int_0^{\tau^*}\Big|L\Big(t,u_t^{(n_k)},z^{(n_k)}(t)\Big)-L\Big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\Big)\Big|dt\to 0,\quad n_k\to\infty. \tag{4.17}$$

Далі маємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau_k} L\Big(t,u_t^{(n_k)},z^{(n_k)}(t)\Big)dt \geq \\
&\geq \lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau^*}\Big[L\Big(t,u_t^{(n_k)},z^{(n_k)}(t)\Big)-L\Big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\Big)\Big]dt+ \\
&+\lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau^*}\Big[L\Big(t,u_t^*,z^{(n_k)}(t)\Big)-L(t,u_t^*,u^*(t),z^*(t))\Big]dt+ \\
&+\int_0^{\tau^*} L(t,u_t^*,z^*(t))dt.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Як було показано вище, перший доданок у правій частині нерівності (4.17) дорівнює нулю, а другий доданок невід'ємний згідно з (4.18). Тому

$$\begin{aligned}
m=&\lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau_{n_k}} L\Big(t,u_t^{(n_k)},z^{(n_k)}(t)\Big)dt \geq \\
&\geq \lim_{n_k\to\infty}\inf\int_0^{\tau^*} L\Big(t,u_t^{(n_k)},z^{(n_k)}(t)\Big)dt \geq \int_0^{\tau^*} L(t,u_t^*,z^*(t))dt.
\end{aligned}$$

Отже, трійка $\big(u^*(t),z^*(t),\tau^*\big)$ є оптимальною.

б) Нехай $\tau^* = \tau = \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$.

Оберемо довільне $t_1 \in [0, T]$ таким чином, щоб $t_1 < \tau^*$. Розглянемо множину $Z = \{\tau_n : \tau_n \in (t_1, \tau^*)\}$. Достатньо дослідити випадок, коли ця множина нескінченна. Тоді аналогічно до випадку а) ми можемо показати, що

$$\int_0^{t_1} L(t, u_t^*, z^*(t))dt \le n,$$

звідки граничним переходом при $t_1 \to \tau^*$ одержимо

$$\int_0^{\tau^*} L(t, u_t^*, z^*(t))dt \le m,$$

що доводить теорему і в цьому випадку.

2. Нехай $\tau^* = T$.

У цьому випадку $\tau = \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau^* = T$, і доведення зводиться до випадку 1б.

Теорему доведено.

5. Застосування параболічних функціонально-диференціальних рівнянь. Нехай Q — обмежена область у $\mathbb{R}^d$ з межею ∂Q, що задовольняє умову Ляпунова. Розглянемо в цій області еліптичний оператор

$$A = A(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x). \tag{5.1}$$

Коефіцієнти a_{ij} в операторі A є неперервними за Гельдером із експонентою $\beta \in (0, 1)$, симетричні та задовольняють умову еліптичності

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\eta_i\eta_j \ge c_0|\eta|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^d, \tag{5.2}$$

для деякого $c_0 > 0$, $|\cdot|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^d$.

Коефіцієнти b_i і c також неперервні за Гельдером із деякою додатною експонентою Гельдера.

Нехай $X = L^2(Q) = H_1$ і $D(A) = H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$. Позначимо також $Q_T = (0, T) \times Q$. Нехай F — опукла замкнена множина в $\mathbb{R}$. Через $\|\cdot\|_H$ позначимо стандартну норму в $L^2(Q)$.

Розглянемо два випадки функціонально-диференціального рівняння:

а) рівняння з функціоналом інтегрального типу;

б) рівняння з максимумом.

У випадку а) задача набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f\left(t, x, \displaystyle\int_{-h}^{0} \|u(t+\Theta)\|_H d\Theta\right) + f_1\left(t, x, \displaystyle\int_{-h}^{0} ||u(t) + \Theta||_H d\Theta\right), \\ u(t, x) = \varphi(t, x), \quad t \in [-h, 0], \quad x \in Q, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad t \in [0, T], \end{cases} \tag{5.3}$$

де $\varphi(t, x) \in C_0 = C([0, T]; L^2(Q))$.

Функції $f(t,x,y)$ і $f_1(t,x,y)$ будемо вважати заданими при $t \in [0,T],\ x \in Q,\ y \in \in [0,l],\ l > 0$, зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, неперервними за сукупністю аргументів і ліпшицевими за змінною y зі сталою L. При цьому область $D \in [-h,T] \times C$ є множиною $\{(t,\varphi)\colon t \in [-h,T],\ \varphi \in G\}$, де G — множина функцій $\varphi \in C$ таких, що $\int_{-h}^{0} \|\varphi(\Theta,\cdot)\|_H d\Theta \in [0,l)$, а ∂G — множина функцій $\varphi \in C$ таких, що $\int_{-h}^{0} \|\varphi(\Theta,\cdot)\| d\Theta = l$ або $\varphi(\Theta,x) = 0$ майже всюди.

При цьому, природно, передбачаємо, що початкова функція $\varphi(t,x)$ із (4.3) належить G. Тоді $\partial D = ([0,T] \times \partial G) \cup \big(\{T\} \times \overline{G}\big)$.

Допустимими керуваннями обираємо функції $z \in L^2(Q_T)$ такі, що $z(t,x) \in F$ майже для всіх $t \in [0,T],\ x \in Q$.

Відомо, що A^{-1} є компактним оператором (див., наприклад, [15], §6.2), власні значення λ_k оператора A є дійсними і $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots$. Тоді з [16] (Sec. 1.4), напівгрупа $S(t)$ є компактною для $t > 0$.

Отже, всі умови для оператора A виконуються.

Тепер перевіримо умови A$_2$), A$_3$) для відображень f_1 і f_2.

Очевидно, що умова A$_2$) виконується. Далі маємо

$$\|f_1(t,x,\varphi)\|_H^2 = \int\limits_Q \left| f_1\left(t, x, \int\limits_{-h}^{0} \|\varphi(\Theta,\cdot)\| d\Theta\right)\right|^2 dx =$$

$$= \operatorname{mess}^2(Q) \left| f_1\left(t, x, \int\limits_{-h}^{0} \|\varphi(\Theta,\cdot)\| d\Theta\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\left(|f_1(t,x,0)|^2 + \left(L\int\limits_{-h}^{0} \|\varphi(\Theta,\cdot)\| d\Theta\right)^2\right) \leq$$

$$\leq 2\left(|f_1(t,x,0)|^2 + L^2h^2 \sup_{\Theta\in[-h,0]} \|\varphi(\Theta,\cdot)\|^2\right).$$

Отже, умова A$_3$) щодо f_1 виконується. Аналогічно перевіряємо й умову A$_3$) для f_2. Звідси також маємо

$$\|f_2(t,x,\varphi)\varsigma\|_H^2 = \int\limits_\Theta \left\| f_2\left(t, x, \int\limits_{-h}^{0} \varphi(\Theta,\cdot) d\Theta\right)\varsigma(x)\right\|^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_Q 2\left(|f_2(t,x,0)|^2 + L^2h^2 \sup_{\Theta\in[-h,0]} \|\varphi(\Theta,\cdot)\|_H^2 \int\limits_Q |\varsigma(x)|^2\right) dx$$

для $\varsigma \in L^2(Q)$. Тому $f_2(t,x,\varphi) \in \mathcal{L}(H,H)$. Отже, всі умови щодо f_1 і f_2 виконуються.

Перейдемо до перевірки умов щодо критерію якості.

Будемо вважати, що:

1) функція $L(t,\varphi,v)\colon [0,T]\times G\times F\to\mathbb{R}^1$ визначена і неперервна за всіма змінними та задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою L;

2) частинна похідна L_v є неперервною за сукупністю змінних у області визначення і для деяких сталих $c_0>0,\ \alpha>0$ задовольняє оцінку

$$|L_v(t,y,v)|\le c_0(1+\|\varphi\|_C^\alpha+\|v\|);$$

3) існує стала $c_1>0$ така, що

$$L(t,y,v)\ge c_1|v|^2;$$

4) функція $L(t,y,v)$ опукла по v для кожних фіксованих $t\in[0,T],\ y\in[0,l]$.

Функціонал якості має вигляд

$$\mathcal{J}(z)=\int_0^\tau\left(\int_Q L(t,u_t(x),z(t,x))dx\right)dt\to\inf.$$

Очевидно, що умову A_4) теореми 2.1 виконано. Перевіримо умову A_5) для $p=2$. Для всіх $\psi,\psi_1\in L^2(Q)$ для похідної Фреше L' відображення L як відображення із $L^2(Q)$ в $\mathbb{R}$ згідно з теоремою Рісса маємо

$$\left|L'(t,\varphi,\psi(x))\cdot\psi_1\right|=\left|\int_Q|L_v(t,\varphi,\psi(x))\cdot\psi_1(x)dx\right|\le$$

$$\le c_0\left|\int_Q|\psi_1(x)|dx+\int_Q\|\varphi\|_C^\alpha|\psi_1(x)\right|dx+\int_Q|\psi(x)\psi_1(x)|dx\le$$

$$\le\mathrm{const}\left(1+\|\varphi\|_C^\alpha+\sqrt{\int_Q\psi^2(x)dx}\sqrt{\int_Q|\psi_1(x)|^2dx}\right).$$

Отже, умову A_5) виконано. Умови A_6), A_7) також, очевидно, виконуються. А тому задача оптимального керування (4.3) має розв'язок.

Випадок б) рівняння з максимумом. Розглянемо таку задачу оптимального керування

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=Au+f_1\left(t,x,\max\limits_{s\in I(t)}\|u(s)\|_H\right)+f_2\left(t,x,\max\limits_{s\in I}\|u(s)\|_H\right)z(t),\\ u(t,x)=\varphi(t,x),\quad t\in[-h,0],\quad x\in Q,\\ u(t,x)=0,\quad x\in\partial Q,\quad t\in[0,T],\end{cases}\tag{5.4}$$

де $I(t)=[\beta(t),\alpha(t)],\ \beta(t),\ \alpha(t)$ — неперервні на $[0,T]$ функції такі, що $\beta(t)\le\alpha(t)\le t$ і $\min_{t\in[0,T]}(\beta(t)-t)=-h$.

Інші припущення такі ж, як і в задачі (5.3). Загальну теорію диференціальних рівнянь із максимумом подано в [17].

Задача (5.4) зводиться до задачі (1.1), якщо покласти

$$\widetilde{f}_1(t,x,\varphi)=f_1(t,x,\max_{\Theta\in[\beta(t)-t,\alpha(t)-t]}\varphi(\Theta)) \qquad \text{і} \qquad \widetilde{f}_2(t,x,\varphi)=f_2(t,x,\max_{\Theta\in[\beta(t)-t,\alpha(t)-t]}\varphi(\Theta)).$$

При цьому область $G\in C$ — множина функцій $\varphi\in C$ таких, що $\|\varphi(\Theta,\cdot)\|_H\in(0,l)$ і для кожної такої функції існує точка $\Theta\in[-h,0]$ така, що $\|\varphi(\Theta,\cdot)\|_H=l$ або $\varphi(\Theta,x)\equiv 0$ для майже всіх $x\in Q$.

Легко бачити, що всі умови теореми 2.1 виконано.

Література

1. J. Hale, *Theory of functional differential equation*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg (1977).
2. V. Kolmanovskii, L. Shaikhet, *Control of systems with aftereffect*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **157** (1996).
3. J. Lu, X. Yang, *A class of Hilfer fractional stochastic differential equations and optimal controls*, Adv. Difference Equ., Paper No. 17, 17 pp. (2019).
4. B. Øksendal, *Optimal control of stochastic partial differential equations*, Stoch. Anal. Appl., **23**, № 1, 165 – 179 (2005).
5. A. Sulem, B. Øksendal, *Applied stochastic control of jump diffusions. 2nd edn.*, Springer, Berlin (2007).
6. О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна, *Наближена стабілізація для нелінійної параболічної крайової задачі*, Укр. мат. журн., **63**, № 5, 654 – 661 (2011); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **63**, № 5, 759 – 767 (2011).
7. O. V. Kapustyan, P. O. Kasyanov, J. Valero, *Structure of the global attractors for weak solutions of a reaction-diffusion equation*, Appl. Math. Inf. Sci., **9**, № 5, 2257 – 2264 (2015).
8. A. M. Samoilenko, A. N. Stanzhitskii, *On the averaging of differential equations on an infinite interval*, Differ. Equ., **242**, № 4, 505 – 511 (2006).
9. Т. В. Носенко, О. М. Станжицький, *Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 512 – 519 (2008); ***English translation:*** Nonlinear Oscil., **11**, № 4, 539 – 547 (2008).
10. V. I. Kravets', T. V. Kovalchuk, V. V. Mohyl'ova, O. M. Stanzhyts'kyi, *Application of the method of averaging to the problems of optimal control over functional*, Differ. Equ., **70**, № 2, 232 – 242 (2018).
11. O. Kichmarenko, O. Stanzhyts'kyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differentials equations*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 2, 196 – 211 (2018).
12. J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer-Verlag, New York (1996).
13. G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in Infinite dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
14. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York (1983).
15. L. Evans, *Partial differential equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2010).
16. D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1981).
17. D. Bainov, S. Hristova, *Differential equations with maxima*, CRS Press Tylor and Francis Group (2011).

Одержано 11.12.22