

## КОРОТКИЙ НАРИС ПРО РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ ІЗ НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ

**О. Ю. Романенко**

*Ін-т математики НАН України*

*вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна*

*e-mail: eromanenko@bigmir.net*

*Світлій пам'яті академіка А. М. Самойленка*

The aim of the present paper is to draw attention to difference equations with continuous argument, which are paradigmatic for simulation of complexity and chaos. Even the simplest equation  $x(t+1) = f(x(t))$ ,  $t > 0$ , has smooth solutions that tend to discontinuous functions with mostly an infinite number of discontinuities on a unit-length interval. These solutions are excellent tools for simulation of highly nonlinear phenomena (deterministic chaos, cascade process of formation of structures, fractal, etc.). Another reason in favor of difference equations with continuous argument is their use in the theory of differential-difference equations and in the theory of equations with partial derivatives.

Мета статті — привернути увагу до різницевих рівнянь із неперервним аргументом, які є парадигмальними для моделювання складності та хаосу. Вже для найпростішого рівняння  $x(t+1) = f(x(t))$ ,  $t > 0$ , характерні гладкі розв'язки, що прямують до розривних функцій зі здебільшого нескінченним числом розривів на інтервалі одиничної довжини. Такі розв'язки — чудовий інструмент для моделювання сильно нелінійних явищ, як-от детермінований хаос, каскадний процес утворення структур, фрактал тощо. Ще один аргумент на користь різницевих рівнянь із неперервним аргументом — застосування в теорії диференціально-різницевих рівнянь і в теорії рівнянь із частинними похідними.

**1. Вступ.** Про простоту як важливу ознаку істинності гіпотези або теорії писало багато видатних мислителів і вчених. У цьому зв'язку показовими є різницеві рівняння з неперервним аргументом, які постають як моделі систем, чиє майбутнє залежить не лише від поточного стану, але й від частини минулої історії. Ці рівняння мають розв'язки вельми складної структури, хоча містять лише елементарні перетворення невідомої функції — зсуви аргументу. Вже найпростіше рівняння

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad f \text{ — неперервне відображення інтервалу в себе,} \quad (1)$$

надає приклад, як дуже складну поведінку можна описати за допомогою дуже простих моделей. Рівняння (1) пропонує відносно прості сценарії просторово-часового хаосу (в загальних рисах зрозумілі навіть просунутим старшокласникам) і додає ще один аргумент — явище автостохастичності — на підтвердження гіпотези, що “хаос” також підпорядковується закономірностям (див. [1, 2] і наведену там бібліографію).

Протягом останніх десятиліть рівняння (1) було в центрі досліджень, проведених у Інституті математики НАН України науковою групою під керівництвом акад. О. М. Шарковського. В результаті якісну теорію таких рівнянь було завершено й опубліковано в [3]

(ключові ідеї висунуто в [4, 5]). Далі основні положення цієї теорії викладено якомога спрощено й лаконічно, але так, щоб не лише окреслити специфічні особливості розв'язків, а й прояснити їхні математичні механізми, зумовлені динамічними властивостями одновимірного відображення, що задає нелінійність. Властивості одновимірних відображень добре відомі й наводяться без пояснень, також вважаються відомими базові поняття теорії динамічних систем, як-от: траєкторія, цикл, атрактор, басейн притягіння та ін.

**2. Про місце різницевих рівнянь із неперервним аргументом у теорії еволюційних задач та їхню специфіку.** Різницеві рівняння з неперервним аргументом (НРУ) є самостійним напрямом теорії різницевих рівнянь. Водночас, їх слід розглядати і як спеціальний розділ теорії функціональних рівнянь<sup>1</sup>, що вивчає рівняння з найпростішим перетворенням аргументу — зсувом  $t \mapsto t + 1$ . Як з'ясувалося, така “простота” оманлива: навіть рівняння з квадратичною нелінійністю мають досить широкий спектр розв'язків від асимптотично сталих до квазівипадкових, поведінка яких при великих  $t$  подібна до поведінки стохастичних процесів. Примітно, що теорія лінійних НРУ з'явилася ще на початку 20-го століття саме в результаті досліджень із функціональних рівнянь — як частина аналітичної теорії, що охоплює системи лінійних різницевих і  $q$ -різницевих рівнянь (див., зокрема, [9–11]). Можливість швидкого просування в цій галузі багато в чому зумовлена наявністю прямих аналогій між лінійними НРУ та лінійними диференціальними рівняннями.

Ситуація з нелінійними НРУ істотно інша. Численні дослідження в цій галузі мають поки що досить розрізнений характер. Донедавна не існувало більш-менш цілісної теорії навіть для найпростішого нелінійного рівняння

$$x(t+1) = (x(t))^2 + \lambda. \quad (2)$$

Це зумовлено тим, що відмінність НРУ від диференціальних рівнянь проявляється повною мірою, коли рівняння нелінійні. Візуальне свідчення — рис. 1, де на прикладі рівняння (2) показано розв'язки, типові для нелінійних НРУ; це неперервні (навіть як завгодно гладкі) функції з необмежено зростаючим градієнтом, а в багатьох випадках і з необмежено зростаючим числом (незгасних) коливань на  $[T, T+1]$  при  $T \rightarrow \infty$ . Звісно, такого роду розв'язків не може бути у звичайних диференціальних рівнянь.

Для нелінійних НРУ отримати загальний розв'язок у скінченному вигляді (через елементарні та спеціальні функції) зазвичай неможливо. На перший план висувається питання про якісну поведінку розв'язків, яка, як бачимо, характеризується низкою властивостей, вельми нестандартних із погляду теорії диференціальних рівнянь. Разом з тим ці властивості отримують цілком природне пояснення з позицій теорії одновимірних відображень (проте очікувати простих технічних узагальнень не варто).

Пояснімо сказане на прикладі рівняння (1). Нехай  $f \in C(I, I)$ ,  $I$  — замкнений обмежений інтервал. Під розв'язками зазвичай розуміють неперервні функції  $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow I$ , що задовольняють рівняння на півосі  $\mathbb{R}^+$ . Тож кожен розв'язок задано власними значеннями на інтервалі  $[0, 1)$  і може бути подано у вигляді

<sup>1</sup> Це теорія функціональних рівнянь без вільних змінних, основи якої закладено у другій половині 20-го століття роботами багатьох математиків, особливо науковою школою відомого польського математика М. Кучми. Його класична монографія [6] стала потужним стимулом для інтенсивних досліджень у цій галузі. Відмітимо також вітчизняну монографію [7] та її розширене перевидання [8], у яких розвиваються підходи до побудови розв'язків функціональних рівнянь методом інваріантів.

$$\begin{aligned} x_\varphi(t) &= f^n(\varphi(t-n)), \quad t \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, \dots, \\ \varphi(t) &= x(t), \quad t \in [0, 1), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$ ,  $f^0(z) = z$ . Отже, динаміку розв'язку  $x_\varphi(t)$  (коли  $\varphi \neq \text{const}$ ) можна трактувати як динаміку континууму незв'язаних осциляторів:

$$\begin{aligned} \text{у кожній точці } \tau \in [0, 1) \text{ розташовано "маятник"} \\ z_n \mapsto z_{n+1} = f(z_n), \quad z_0 = \varphi(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

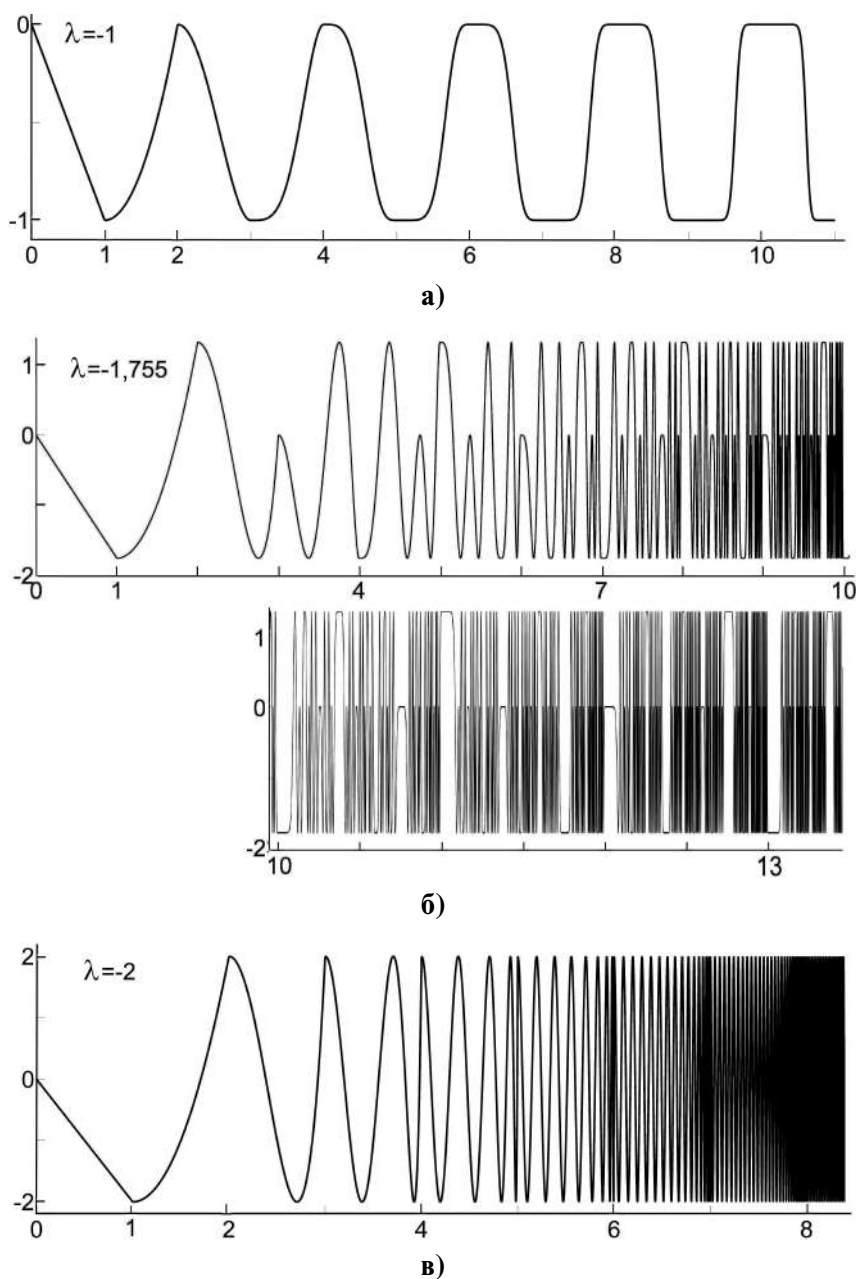


Рис. 1. Типові розв'язки рівняння  $x(t+1) = (x(t))^2 + \lambda$ .

Коливання окремого “маятника” не залежать від “маятників” у інших точках. Стани “маятника”, близькі у початковий момент, зі зростанням часу можуть то віддалятися, то наближатися. Такий рух “маятників” витирає вихідну інформацію та спричиняє наростання невизначеності у їхній колективній динаміці. А це призводить до дедалі складнішої поведінки розв’язків, наприклад, як на рис. 1. Тут у всіх випадках існують точки  $t_* \in [0, 1)$  такі, що похідна  $x'(t)$  необмежено зростає при  $t = t_* + n$  і  $n \rightarrow \infty$ , а отже, розв’язок є асимптотично розривним. У випадку а) така точка лише одна, а у випадках б) і в) їх нескінченно багато. При більш прискіпливому погляді розв’язки видаються асимптотично періодичними з періодом 2, 3 і 1 відповідно.

Наведений приклад ілюструє той загальний факт, що розв’язки рівняння (1) прямують до періодичних розривних функцій. Ці граничні функції часто мають нескінченну кількість розривів на будь-якому інтервалі одиничної довжини (як у випадках б) і в)). У такому разі розв’язки стають хаотичними при великих  $t$ , але з особливістю майже повної періодичності — патерн нерегулярної поведінки зберігається на більших масштабах і щораз ускладнюється на менших масштабах. Отже, у поведінці розв’язків відбувається подвійна тенденція:

- а) непередбачуваність внаслідок дисбалансу деяких або всіх осциляторів (4);
- б) періодичність внаслідок повторюваності у колективній поведінці осциляторів (4).

Перше твердження інтуїтивно зрозуміле. Друге потребує коментаря, чому окремі осцилятори, коливаючись незалежно, водночас “працюють” злагоджено, створюючи періодичний патерн. Узяті разом, осцилятори становлять цілісну систему, подану континуальною сім’єю траєкторій  $f^n(\varphi(t))$ ,  $t \in [0, 1)$ , серед яких у типових ситуаціях є багато нестійких траєкторій. Тому для дослідження динаміки системи треба аналізувати не кожен окрему траєкторію  $f^n(\varphi(\tau))$ , а пучок близьких до неї траєкторій  $f^n(\varphi(t))$ ,  $t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ , до того ж спочатку при  $n \rightarrow \infty$  і лише потім при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тож спільна асимптотична динаміка осциляторів (4) визначається динамікою околів точок під дією  $f$  (а не динамікою точок, як для дискретного рівняння  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ). Траєкторії околів зазвичай асимптотично періодичні [12], тому система осциляторів (4) також поводить себе асимптотично періодично.

**3. Втрата неперервності: асимптотична розривність розв’язків.** На відміну від диференціальних, різницеві рівняння не зумовлюють ані гладкості, ані неперервності розв’язків. Як видно з (3), неперервні розв’язки  $x_\varphi(t)$  породжуються тими  $\varphi: [0, 1] \rightarrow I$ , що задовольняють умови  $\varphi \in C([0, 1], I)$ ,  $\varphi(1 - 0) = f(\varphi(0))$ . Вважатимемо ці умови виконаними і доозначимо  $\varphi(t)$ , поклавши  $\varphi(1) = \varphi(1 - 0)$ . В усіх випадках на рис. 1 існують області, де розв’язки змінюються дуже швидко. Це наводить на думку про асимптотичну втрату неперервності розв’язками рівняння (1), через те що вони не є рівномірно неперервними. Чи буде це так, вирішальною мірою залежить від множини

$$\mathcal{D}(f) = \{z \in I : \text{траєкторія } f^n(z), n \in \mathbb{Z}^+, \text{ є нестійкою за Ляпуновим}\},$$

яку називають *роздільником* відображення  $f$ . В околі точок з  $\mathcal{D}(f)$  має місце розбігання близьких траєкторій: для кожного  $z \in \mathcal{D}(f)$  існує  $d(z) > 0$  таке, що при будь-якому  $\varepsilon > 0$  знайдуться  $z_* \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$  і  $m \in \mathbb{Z}^+$  із властивістю  $|f^m(z) - f^m(z_*)| > d(z)$ .

Значущість  $\mathcal{D}(f)$  для  $x_\varphi(t)$  полягає в наступному. Нехай задля простоти  $z_0 \in \mathcal{D}(f)$  є нерухомою точкою. Якщо  $\varphi(t_0) = z_0$  і  $\varphi(t)$  не має екстремуму при  $t = t_0$ , то для будь-якого околу  $V_n$  точки  $t_n = t_0 + n$  маємо, що  $\text{diam } x_\varphi(V_n) > d(z_0)$ , починаючи з деякого  $n$ . Це означає, що графік  $x_\varphi(t)$  поблизу  $t = t_n$  зі зростанням  $n$  стає дедалі схожим на вертикальний відрізок довжини  $> d(z_0)$ . Тому  $x_\varphi(t)$  не є рівномірно неперервним. Якщо ж  $\varphi(t)$  не набуватиме значень з  $\mathcal{D}(f)$ , то  $x_\varphi(t)$  буде рівномірно неперервним.

Отже, всі розв'язки рівномірно неперервні лише за умови, що  $\mathcal{D}(f) = \emptyset$ . Для (2) ця ситуація реалізується при  $\lambda = 1/4$ , коли нерухома точка  $\alpha = 1/2$  відображення  $g: z \mapsto z^2 + \lambda$  притягує всі точки з  $\mathbb{R}$ . Тоді всі розв'язки прямують до стаціонарного розв'язку  $x(t) \equiv \alpha$  при  $t \rightarrow \infty$ , а отже, є рівномірно неперервними. Звичайно, деякі розв'язки можуть бути рівномірно неперервними і тоді, коли  $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$ . Найпростіший приклад — стаціонарні розв'язки (тож завжди існує хоча б один рівномірно неперервний розв'язок). Скажімо, (2) при  $\lambda \neq 1/4$  має два стаціонарні розв'язки:  $x_{1,2}(t) \equiv \alpha_{1,2}$ , що відповідають нерухомим точкам  $\alpha_{1,2} = (1 \mp \sqrt{1-4\lambda})/2$  відображення  $g$ . Якщо  $1/4 < \lambda < 3/4$ , то  $\alpha_1 \notin \mathcal{D}(f)$ , а  $\alpha_2 \in \mathcal{D}(f)$ , проте розв'язок  $x_2(t)$  все одно є рівномірно неперервним. Загалом, типовими рівномірно неперервними розв'язками є асимптотично сталі розв'язки.

Умова  $\mathcal{D}(f) = \emptyset$  виконується у виняткових випадках, тому існування асимптотично розривних розв'язків характерне для (1). Говорячи якнайзагальніше:

- майже в усіх рівнянь вигляду (1) усі розв'язки, крім асимптотично сталих, асимптотично розривні,
- точніше, кожен відмінний від асимптотично сталого розв'язок є асимптотично розривним тільки за умови

$$f^2(z) \neq z \quad \text{на будь-якому невідродженому інтервалі,} \quad (5)$$

тобто,  $f$  не має інтервалів, що складаються з нерухомих точок або циклів періоду 2.

Асимптотична розривність розв'язків спричиняє *градієнтну катастрофу*, коли похідна обмеженої функції необмежено зростає. Так, для розв'язку з рис. 1 а) існує послідовність  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots \rightarrow \infty$  така, що при  $k \rightarrow \infty$  його похідна при  $t = t_k$  зростає необмежено, а його коливання в будь-якому околі  $t = t_k$  наближається до 1. Для розв'язків з рис. 1 б), в) кількість точок “градієнтної катастрофи”, а отже, й кількість незагасних коливань на  $[T, T+1]$  зростає *ad infinitum* при  $T \rightarrow \infty$ . Накопичення коливань додає значної складності та призводить до хаотизації розв'язків. Градієнтна катастрофа притаманна кожному асимптотично розривному розв'язку рівняння (1).

**4. Асимптотична періодичність розв'язків.** Граничну поведінку асимптотично розривного розв'язку неможливо описати у термінах неперервних функцій, необхідно залучати ширші функціональні простори з метриками, відмінними від стандартних  $\sup$ -метрик. Придатним є простір  $SC(\mathbb{R}^+, 2^I)$  напівнеперервних зверху функцій  $\xi: \mathbb{R}^+ \rightarrow 2^I$ , де  $2^I$  — множина всіх замкнених підмножин  $I$ . Для напівнеперервних зверху функцій<sup>2</sup> часто застосовується метрика  $\rho_H$ , визначена як відстань Гаусдорфа між графіками функцій. Ця метрика порівнює функції в цілому (глобально), тож не завжди зручна для обчислень і оцінок. Тому за “основу” для метрики в  $SC(\mathbb{R}^+, 2^I)$  взято іншу метрику  $\rho^\Delta$ , яка еквівалентна  $\rho_H$  і здійснює порівняння функцій в околах точок (локально). А саме:

$$\rho^\Delta(\xi_1|_{[0,L]}, \xi_2|_{[0,L]}) = \sup_{\varepsilon > 0} \min \left\{ \varepsilon, \sup_{t \in [0,L]} \Delta(\xi_1(V_\varepsilon(t)), \xi_2(V_\varepsilon(t))) \right\}, \quad L > 0, \quad (6)$$

де  $\xi|_{[0,L]}$  — звуження  $\xi(t)$  на  $[0, L]$ ,  $\Delta(\cdot, \cdot)$  — відстань Гаусдорфа між множинами,  $V_\varepsilon(t) = [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap [0, L]$ . Далі метрику в  $SC(\mathbb{R}^+, 2^I)$  визначаємо традиційно:

<sup>2</sup>Існує кілька еквівалентних означень напівнеперервних зверху функцій; для наших цілей найбільш підходить таке: функція  $\xi: I \rightarrow 2^I$  називається напівнеперервною зверху, якщо її графік є замкненою множиною в  $I \times I$ .

$$\rho^\Delta(\xi_1, \xi_2) = \sup_{0 < L < \infty} \rho^\Delta(\xi_1|_{[0, L]}, \xi_2|_{[0, L]}). \quad (7)$$

Збіжність послідовності функцій у метриці  $\rho_H$ , а отже, й у  $\rho^\Delta$  еквівалентна існуванню топологічної границі для послідовності їхніх графіків.

Нехай  $u_{(\tau)}(t) = u(t + \tau)$ ; якщо  $u(t) = u_{(p)}(t)$  при деякому  $p > 0$ , то  $u(t)$  є періодичною. Розв'язок  $x(t)$  називаємо  $\Delta$ -асимптотично періодичним, якщо існує періодична функція  $\xi \in SC(\mathbb{R}^+, 2^{\mathbb{R}})$  така, що  $\rho^\Delta(x_{(\tau)}, \xi_{(\tau)}) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , а функцію  $\xi$  називаємо  $\Delta$ -граничною для  $x(t)$ . Якщо говорити стисло, то:

– майже в усіх рівнянь вигляду (1) майже всі розв'язки  $\Delta$ -асимптотично періодичні; до того ж існування періодичних у звичайному сенсі (нестационарних) розв'язків — явище виняткове: такі розв'язки є тоді й тільки тоді, коли (5) порушується.

Надалі умову (5) вважатимемо виконаною.

$\Delta$ -граничні функції розв'язків можна описати за допомогою множини

$$Q_f(z) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{j > 0} \overline{\bigcup_{i > j} f^i(V_\delta(z))}, \quad V_\delta(z) = (z - \delta, z + \delta) \cap I, \quad (8)$$

що зветься *областю впливу точки*<sup>3</sup> під дією  $f$ . Множина  $Q_f(z)$  — верхня топологічна границя послідовності множин  $\{f^i(V_\delta(z))\}_i$  при  $i \rightarrow \infty$  та  $\delta \rightarrow 0$ , а отже,  $Q_f(z)$  показує, як далеко від траєкторії точки  $z$  відходять траєкторії її сусідніх точок.

– Існує ціле  $p = p(f) > 0$  таке, що майже кожен розв'язок  $x_\varphi(t)$  має  $\Delta$ -граничну функцію періоду  $p$ , яка набуває скінченне число значень і визначається формулою

$$\xi_\varphi(t) = f^n(Q_{f^p}(\varphi(t - n))), \quad t \in [n, n + 1), \quad n = 0, 1, \dots, p - 1. \quad (9)$$

Нехай  $[\cdot]$  позначає цілу частину числа. Коли  $[t] \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ , тоді значення  $\xi_\varphi(t)$  є замкненим невідродженим інтервалом, який називаємо *стрибком*; в іншому разі значення  $\xi_\varphi(t)$  — одноточкова множина (синглетон).

Як приклад розглянемо, спираючись на (3), асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (2) із рис. 1. Позначимо їхні початкові функції  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  у випадках а)–в) відповідно. В усіх цих випадках відображення  $g: z \rightarrow z^2 + \lambda$ , яке асоціюється з (2), має дві нерухомі точки  $\alpha$  і  $\alpha_0$ , обидві відштовхувальні, й інваріантний інтервал  $I = [-\alpha_0, \alpha_0]$ . Як видно з рисунка,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , а отже, й відповідні їм розв'язки  $x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}, x_{\varphi_3}$  набувають значень із  $I$ , тож розглядатимемо  $g$  лише на  $I$  (рис. 2).

Найпростішим є опис найхаотичнішого розв'язку  $x_3(t)$ , що виникає при  $\lambda = -2$ . Тоді  $I = [-2, 2]$ , кожна точка з  $I$  має нестійку траєкторію і будь-який її окіл накриває  $I$  за скінченне число ітерацій. Тому  $\mathcal{D}(g) = [-2, 2]$  і  $Q_g(z) = [-2, 2]$ , а отже,  $x_{\varphi_3}(t)$  має  $\Delta$ -граничну функцію  $\xi_{\varphi_3}(t) = [-2, 2]$ , всюди розривну й періодичну з періодом 1.

Найбільш “хороший” розв'язок  $x_1(t)$  виникає при  $\lambda = -1$ . Тоді  $g$  має притягувальний цикл періоду 2, а саме, цикл  $\{\beta_1, \beta_2\}$ , де  $\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$ . Цей цикл притягує всі точки з  $I$ , крім множини  $\mathcal{D}(g)$ , що складається з нерухомих точок  $\alpha, \alpha_0$  та їхніх прообразів. Отже,  $Q_g(z) = \{\beta_1\} \cup \{\beta_2\}$  для  $z \in I \setminus \mathcal{D}(g)$ . Що ж до  $z \in \mathcal{D}(g)$ , то під дією  $g$  будь-який її окіл розтягується в границі до  $[\beta_1, \beta_2]$ , тому  $Q_g(z) = [\beta_1, \beta_2]$ . Звідси такі висновки щодо  $x_1(t)$ . Згідно з рисунком існує одна точка  $t_* \in [0, 1]$  така, що  $\varphi_1(t_*) \in \mathcal{D}(g)$ , а саме,  $\varphi_1(t_*) = \alpha$ ,

<sup>3</sup>Це поняття введено в [4] у розвиток загальновідомого поняття пролонгації. Дещо пізніше його використовували інші автори, але без уживання терміну “область впливу”.

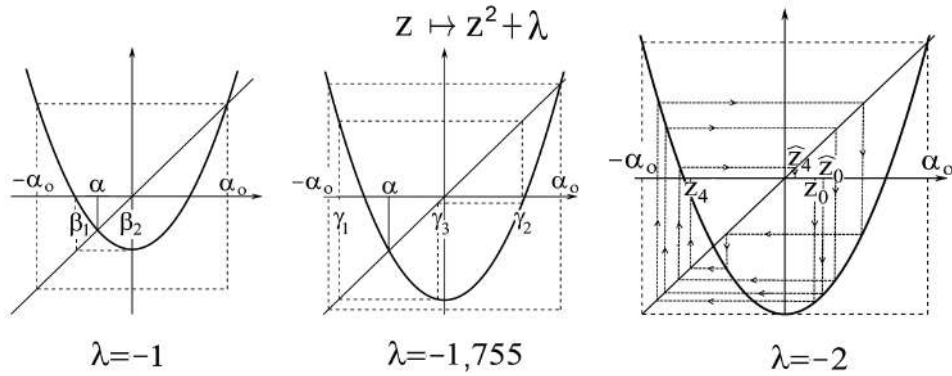


Рис. 2. Види динамічної поведінки квадратичних відображень.

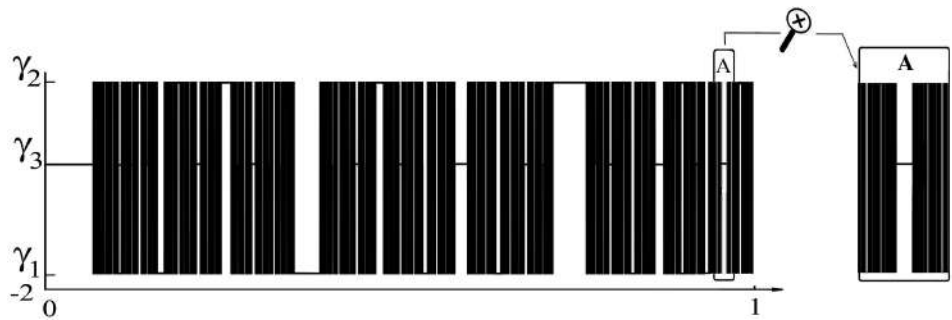


Рис. 3. Δ-гранична функція типового розв'язку рівняння  $x(t + 1) = (x(t))^2 - 1,755$ .

водночас  $\lim_{i \rightarrow \infty} g^{2i}(\varphi_1(t)) = \beta_2$  при  $t \in [0, t_*)$  і  $\lim_{i \rightarrow \infty} g^{2i}(\varphi_1(t)) = \beta_1$  при  $t \in (t_*, 1]$ . Тому Δ-гранична функція для  $x_{\varphi_1}(t)$  має вигляд

$$\xi_{\varphi_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } [t] \in [0, t_*) \cup (t_* + 1, 2], \\ [-1, 0] & \text{при } [t] = t_*, [t] = t_* + 1, \\ -1 & \text{при } [t] \in (t_*, t_* + 1), \end{cases}$$

є періодичною з періодом 2 і має один розрив на кожному інтервалі одиничної довжини.

Тепер про розв'язок  $x_{\varphi_2}(t)$ . Він виникає при  $\lambda = -1,755$ , коли  $g$  майже таке ж, як при  $\lambda = -1$ . Знову існує притягувальний цикл, але з періодом 3, який позначимо  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ; числові значення знаходяться з рівняння  $\frac{f^3(z) - z}{f(z) - z} = 0$ . Цей цикл притягує всі точки з  $I \setminus \mathcal{D}(g)$ , проте роздільник  $\mathcal{D}(g)$  має набагато складнішу структуру — він гомеоморфний множині Кантора. Як наслідок Δ-гранична функція для  $x_{\varphi_2}(t)$  періодична з періодом 3 і має незліченну кількість розривів на кожному інтервалі одиничної довжини. Формула для  $\xi_{\varphi_2}(t)$  доволі громізка, хоча формально аналогічна формулі для  $\xi_{\varphi_1}(t)$ . Не будемо її наводити, а просто продемонструємо на рис. 3, наскільки складною є  $\xi_{\varphi_1}(t)$ , зокрема її графік є самоподібним у околі вертикальних сегментів.

Для рівнянь вигляду (1) можливі ситуації, коли типовими є Δ-асимптотично майже періодичні розв'язки, що прямують до майже періодичних напівнеперервних зверху функцій. Для (2) така ситуація реалізується, зокрема, коли  $\lambda$  набуває значення, при якому  $g$  має цикли з періодами 1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$ , ..., і тільки.

**5. Специфічні особливості розв’язків.** Для рівняння (1) типові  $\Delta$ -асимптотично періодичні розв’язки з розривними граничними функціями. Це, з одного боку, говорить про регулярність динаміки розв’язків, а з іншого вказує на те, що їхня асимптотична поведінка може бути дуже складною через складну геометрію  $\Delta$ -граничних функцій. Приклад рівняння (2) показує, що ускладнення розв’язку  $x_\varphi(t)$  зі зростанням  $t$  пов’язане з топологічною структурою множини розривів його  $\Delta$ -граничної функції  $\xi_\varphi(t)$ , тобто з  $\mathcal{D}(f, \varphi) = \{t = t_* + n : t_* \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))\}$ . Тут вирішальна роль належить множині  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ , яка здебільшого успадає структуру роздільника  $\mathcal{D}(f)$  і є першопричиною нестандартних властивостей розв’язків. Далі коротко наведено ці властивості (які виникають, коли  $f$  має цикл періоду, відмінного від степеня 2).

**Фрактальна геометрія розв’язків.** Хаотичність розв’язку  $x_\varphi(t)$  природно оцінювати, виходячи з геометрії графіка його  $\Delta$ -граничної функції  $\xi_\varphi(t)$ , складність якої визначає структура множини  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ . Коли  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$  має додатну фрактальну розмірність, тоді можемо говорити про дуже високий степінь хаосу. Дійсно, як множина на площині графік  $\xi_\varphi(t)$  є локально самоподібним (див. рис. 3) і, крім того, фрактальним, тобто його фрактальна розмірність більша за одиницю. Останнє можна коротко пояснити так. Нехай  $\dim_{\text{box}}$  позначає box-counting розмірність (одну з версій фрактальної розмірності), а  $\text{gr}$  — графік функції. Якщо розглянути граничні функції  $\xi_{\varphi_1}$ ,  $\xi_{\varphi_2}$ ,  $\xi_{\varphi_3}$ , то очевидно, що

$$\dim_{\text{box}} \text{gr } \xi_\varphi|_{[0,1]} = \dim_{\text{box}} \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) + 1,$$

принаймні для  $\xi_\varphi(t)$  зі скінченною множиною значень на  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$ . Тож за умови, що  $\dim_{\text{box}} \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) > 0$ , фрактальна розмірність  $\text{gr } \xi_\varphi|_{[0,1]}$ , а отже, й  $\text{gr } \xi_\varphi|_{[T, T+1]}$  більша за 1 і навіть може дорівнювати 2. Зокрема,

$$\dim_{\text{box}} \text{gr } \xi_{\varphi_2}|_{[T, T+1]} < 2, \quad \dim_{\text{box}} \text{gr } \xi_{\varphi_3}|_{[T, T+1]} = 2, \quad T > 0.$$

Ці факти говорять про асимптотично фрактальну геометрію розв’язків. На рис. 4 показано, як “працює” асимптотична фрактальність на прикладі розв’язку з рис. 1 б). При горизонтальному збільшенні фрагмент графіка **a** виявляється майже копією графіка з [6, 7], фрагмент **b** так само виглядає майже копією графіка з [9, 10]. Така ситуація продовжує повторюватися з кроком 3 вздовж осі  $t$  (розмір кроку дорівнює періоду  $\Delta$ -граничної функції розв’язку, а кількість коливань зростає експоненціально).

**Space-filling властивість.** Графік кожного розв’язку  $x_\varphi(t)$  має розмірність 1. Проте, якщо  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$  — інтервал (як на рис. 1 в)), то графік його  $\Delta$ -граничної функції  $\xi_\varphi(t)$  має розмірність 2, точніше,

$$\dim_{\text{box}} \text{gr } \xi_\varphi|_{[T, T+\delta]} = 2 \quad \text{при будь-яких } T, \delta > 0.$$

З геометричного погляду це означає, що (неперервна) крива  $s = x_\varphi(t)$  стає зі зростанням  $t$  дедалі подібною до space-filling кривої (кривої Пеано), що проходить через кожен квадрат деякого квадрата. А саме, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує  $T_\varepsilon > 0$  таке, що  $\text{gr } x_\varphi(t)$  перетинає  $\varepsilon$ -окіл кожної точки області  $\Pi_{\varphi, T} = \{(t, s) \in \text{gr } \xi_\varphi|_{[T, \infty)}\}$  при  $t > T_\varepsilon$ . Тобто,  $\text{gr } x_\varphi(t)$  “намагається” цілкомити заповнити область  $\Pi_{\varphi, T}$  при  $T \gg 1$ . Прикладом цього є розв’язок з рис. 1 в): чим більше  $T$ , тим щільніше його графік заповнює область  $[T, \infty) \times [-2, 2]$ . Загалом, подібна поведінка притаманна кожному розв’язку  $x_\varphi(t)$ , для якого  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$  містить принаймні один інтервал. Такі розв’язки називаємо *сильно хаотичними*.



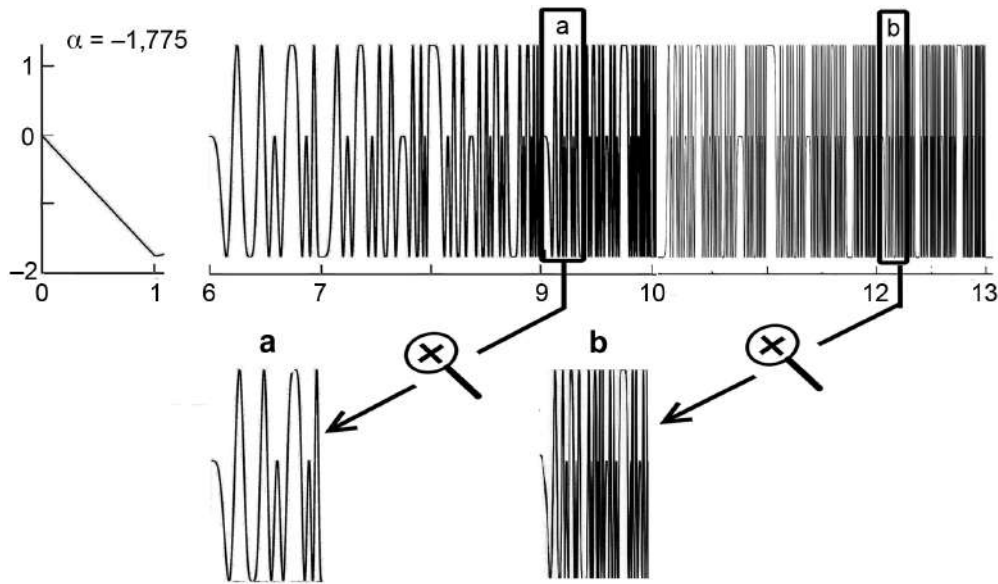


Рис. 4. Асимптотична самоподібність роз'язків.

**Потрапляння за горизонт передбачуваності.** Для сильно хаотичних розв'язків неможливо надійно обчислити значення при великих  $t$ . Тоді кажуть, що *розв'язок знаходиться за горизонтом передбачуваності*. За приклад знову візьмімо  $x_{\varphi_3}(t)$  з рис. 1 в). З асимптотичної поведінки його  $\Delta$ -граничної функції  $\xi_{\varphi_3}(t) = [-2, 2]$  випливає, що незалежно від  $t, t' \in \mathbb{R}^+$  значення  $x_{\varphi_3}(t+n)$  і  $x_{\varphi_3}(t'+n)$  відрізняються при певному  $n = n'$  на величину, майже рівну діаметру інтервалу  $[-2, 2]$ . Тобто при фіксованому  $t$  для як завгодно малих  $\varepsilon > 0$  і  $\delta > 0$  існує  $K > 0$  таке, що

$$\sup_{t': |t-t'| < \varepsilon} |x_{\varphi_3}(t+n) - x_{\varphi_3}(t'+n)| \geq d - \delta, \quad d = \text{diam} [-2, 2].$$

Загалом, для хаотичних  $x_{\varphi}(t)$  справедлива та ж сама формула, де  $d$  — найменший із діаметрів стрибків функції  $\xi_{\varphi}(t)$ .

Отже, знаходження числових значень сильно хаотичних розв'язків рано чи пізно втрачає сенс. Невідворотність виходу за горизонт передбачуваності фіксує той факт, що багатьом природним системам притаманно поводитися так, як ми не можемо очікувати (наскільки б глибоко їх не досліджували).

Space-filling властивість та потрапляння за горизонт передбачуваності зумовлені чутливою залежністю  $f$  від початкових даних і відзеркалюють її в геометричному та, відповідно, обчислювальному планах.

**Явище автостохастичності.** У загальному розумінні автостохастичність — це спонтанний розвиток у детермінованій системі хаотичних процесів, які можна описати в імовірнісних термінах [13]. Щодо (1), то автостохастичність полягає в існуванні розв'язків, які виходять за горизонт передбачуваності, проте їхня поведінка асимптотично точно описується випадковими процесами. Ймовірнісний опис згодом-непередбачуваних розв'язків виявляється можливим, коли  $f$  має гладку (абсолютно неперервну відносно міри Лебега) інваріантну міру. В моделях, описуваних за допомогою (1), автостохастичність фізично реалізовна у тому сенсі, що існують однопараметричні сім'ї хаотичних  $f$ , які мають гладку інваріантну міру на множині параметрів додатної міри Лебега.

Як приклад візьмімо (2) з  $\lambda = -2$ , коли відповідне відображення  $g: z \mapsto z^2 - 2$  має гладку інваріантну міру  $\mu(dz) = -dz/\pi\sqrt{4-z^2}$ , зосереджену на  $I = [-2, 2]$ . Для  $g$  майже кожна траєкторія нестійка, всюди щільна на  $I$ , а ймовірність, що вона потрапить у множину  $A \subset I$ , асимптотично точно визначається випадковою величиною з розподілом  $P(A) = \mu(A)$ . Ця часова стохастичність траєкторій відображення  $g$  трансформується у просторово-часову стохастичність розв'язків рівняння (2). Точніше, нестационарний розв'язок  $x_\varphi(t)$  можна розглядати як пучок траєкторій  $g^n(z)$ , що виходять із  $z = \varphi(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . За умови несингулярності  $\varphi(t)$  ансамбль випадкових величин, що відповідають цьому пучку, утворює випадковий процес<sup>4</sup>, який описуватиме статистичні властивості  $x_\varphi(t)$ .

Для строгого обґрунтування цих міркувань замість  $SC(I, 2^I)$  використано інший розширений простір  $\mathcal{R}(I, I)$ , що складається з випадкових і детермінованих вимірних функцій  $\zeta: I \rightarrow I$ , і запропоновано спеціальну метрику  $\rho^\#$ , яка дозволяє порівнювати функції на підставі їхніх скінченновимірних розподілів. Установлено, що за умови існування у  $f$  гладкої інваріантної міри кожний сильно хаотичний розв'язок прямує у метриці  $\rho^\#$  до певного випадкового процесу, який визначається згаданою інваріантною мірою (див. [14] та наведену там бібліографію). Задля конкретності наведемо формулювання для (2) при  $\lambda = -2$ . Кожному розв'язку  $x_\varphi(t)$  з несингулярною  $\varphi(t)$  відповідає граничний випадковий процес  $\zeta_\varphi(t)$ , скінченновимірні розподіли якого визначаються через  $\mu$ . Його одновимірний розподіл має вигляд

$$F(t, x) = \mu([-2, x]) = -\frac{1}{\pi} \int_{-2}^x \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}} = -\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{2-x}, \quad x \in [-2, 2]. \quad (10)$$

Розподіли вищих порядків також виражаються через  $\mu$ , але здебільшого вже залежать від  $\varphi$  (наявність автокореляцій). Процес  $\zeta_\varphi(t)$  описує статистичну поведінку  $x_\varphi(t)$ . Зокрема, ймовірність того, що  $x_\varphi(t)$  у віддалений момент набуває значення з  $[a, b] \subset I$ , майже дорівнює  $F(t, b) - F(t, a)$ . Різним розв'язкам зазвичай (але не завжди) відповідають різні граничні випадкові процеси. Якщо нехтувати автокореляціями (які часто не важливі для застосувань), то асимптотичну динаміку майже всіх розв'язків, включно зі зображенням на рис. 1 в), можна описати за допомогою лише одного, спрощеного, випадкового процесу — стаціонарного процесу з незалежними значеннями, який повністю визначається одновимірним розподілом (10). Тут спостерігаємо спонтанну еволюцію розв'язків у напрямку “забування” початкових умов.

**Каскадне утворення структур.** Відмінні від асимптотично сталих розв'язки мають надзвичайно важливу властивість — утворення структур їхніми графіками, що наочно демонструють приклади розв'язків із рис. 1. На рис. 1 а) явно проглядається формування на  $[n, n+2]$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , простої структури, граничний вигляд якої зображено на рис. 5 а). Для решти розв'язків процес самоструктурування значно складніший.

На рис. 5 б) показано, як у графіку з рис. 1 б) відбувається каскадне виникнення когерентних структур (які тривалий період майже не змінюють форми). З виникненням структур менших масштабів структури більших масштабів продовжують існувати, що приводить до каскадної просторово-часової ієрархії структур. Кожен ієрархічний ланцюжок складається з геометрично подібних структур, унаслідок чого утворюється фракталоподібна

<sup>4</sup> Функцію  $\varphi(t)$  називаємо несингулярною, якщо  $\text{mes } \varphi^{-1}(A) = 0$  при  $\text{mes } A = 0$  ( $\text{mes}$  позначає міру Лебега). Виконання умов узгодженості Колмогорова забезпечується інваріантністю  $\mu$  стосовно  $g$  і несингулярністю  $\varphi$ .

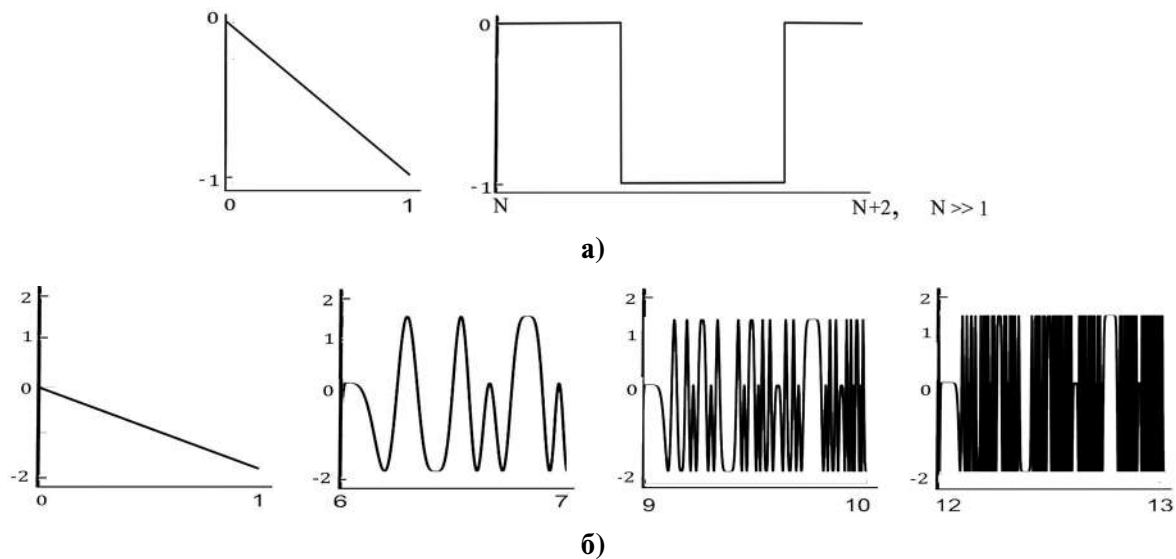


Рис. 5. Утворення структур.

структура, локально самоподібна на різних масштабних рівнях (*скейлінг*). Відповідальною за цей тип структурування є дуже складна топологічно-динамічна організація басейну притягувального циклу  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  відображення  $g$ .

Графік з рис. 1 в) надає приклад іншого типу самоорганізації, де поява структур меншого масштабу супроводжується руйнуванням структур більшого масштабу. З певного моменту структури стають такими дрібними, що вже не є когерентними, і їхню колективну динаміку можна розглядати як хаотичне змішування. Цей тип структурування виникає тому, що множина  $\mathcal{D}(g)$  є щільною на інваріантному інтервалі  $I$ .

Коли  $f$  складніше за унімодальне відображення (скажімо, бімодальне), рівняння (1) зазвичай має розв'язки з обома типами самоструктурування, до того ж існують розв'язки із самоструктуруванням першого типу на одних інтервалах та другого типу на інших (*хімероподібні структури*).

**6. Про застосування та ідеальну турбулентність.** Коли йдеться про застосування різницевих рівнянь із неперервним аргументом, відразу ж виникає питання про можливість їхнього використання для дослідження функціональних рівнянь, які заміною змінних можна звести до різницевих. На жаль, такий підхід здебільшого виявляється формальним і не дозволяє автоматично отримати змістовні результати. Зворотна заміна змінних при поверненні до функціонального рівняння може суттєво спотворити “якісний портрет” розв'язків. Візьмімо, наприклад,  $q$ -різницеve рівняння

$$x(qt) = f(x(t)), \quad q > 1, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

сама назва якого говорить про його спорідненість із різницевими рівняннями. Заміна  $t = q^\tau$ ,  $x(t) = y(\tau)$  приводить (11) до вигляду  $y(\tau + 1) = f(y(\tau))$ . Проте, коли  $f$  нелінійне, задача про успадковування рівнянням (11) властивостей різницевих рівнянь зовсім не тривіальна і вимагає спеціальних досліджень. Адже  $x(t)$  отримується “експоненційним розтягненням”  $y(\tau)$  вздовж осі  $t$  (у  $q$  разів при зростанні  $t$  на 1), а це при великих  $q$  призводить до принципових відмінностей у поведінці  $x(t)$  та  $y(\tau)$ . Втім, перехід від функціонального рівняння до вже дослідженого різницевого може бути корисним, скажімо, допоможе сформулювати

вірогідні гіпотези щодо якісної поведінки розв'язків. Одним із прикладів є рівняння (11), яке саме з таких позицій досліджено в [15, 16].

Значно оптимістичніше виглядає ситуація із застосуванням різницевого рівняння у теорії диференціально-різницевого рівняння, а також у нелінійній математичній фізиці, зокрема при моделюванні просторово-часового хаосу.

Перша з цих областей не потребує спеціальних коментарів, беззаперечно користь від застосування при цьому теорії різницевого рівняння очевидна. Насамперед, це стосується рівнянь нейтрального типу (які найближчі до різницевого), а також цілком інтегрованих рівнянь [4], які безпосередньо зводяться до різницевого. Так, рівняння

$$\dot{x}(t+1) = 2x(t)\dot{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (12)$$

інтегруванням зводиться до сім'ї різницевого рівнянь

$$x(t+1) = (x(t))^2 + \lambda, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda \text{ — параметр.} \quad (13)$$

Із міркувань неперервності випливає, що розв'язок  $x_\varphi(t)$  рівняння (12) буде розв'язком лише одного рівняння з сім'ї (13), а саме рівняння

$$x(t+1) = (x(t))^2 + \lambda[\varphi], \quad \text{де } \lambda[\varphi] = \varphi(1) - (\varphi(0))^2.$$

Отже, одне з найпростіших диференціально-різницевого рівнянь має всі специфічні особливості різницевого рівняння, навіть більше: воно за різноманіттям розв'язків “багатше” за кожне окреме рівняння з (13). Для складніших рівнянь, безпосередньо не звідних до різницевого, застосування останніх пов'язане з розвиненням теорії збурень.

Щодо другої області застосувань наведемо деякі пояснення. Давно відомо, що при дослідженні крайових задач для рівнянь із частинними похідними можуть виникати рівняння з відхиленням аргументу (різницеві, функціональні, диференціально-функціональні і т. п.). У цьому плані різницеві рівняння надають багато простих і наочних прикладів (див, зокрема, [17, 18]). Візьмімо крайову задачу для рівняння переносу

$$w_t - w_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1], \quad (14)$$

$$w|_{x=1} = f(w|_{x=0}), \quad f \in C^1 \text{ — гладка функція.} \quad (15)$$

Для (14) загальний розв'язок має вигляд  $w(x, t) = u(x + t)$ , де  $u$  — довільна  $C^1$ -гладка функція. Підставляючи цю формулу в (15), одержуємо для  $u(t)$  різницеве рівняння

$$u(t+1) = f(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

Тож розв'язок  $w_\varphi(x, t)$ , відповідний до умови  $w|_{t=0} = \varphi(x)$ , можна подати у вигляді  $w_\varphi(x, t) = u_\varphi(x + t)$ , де  $u_\varphi$  — розв'язок, відповідний до умови  $u(t) = \varphi(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Ще один приклад: крайова задача для хвильового рівняння

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1], \quad (17)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w_t|_{x=1} = g(w_x)|_{x=1}, \quad g \in C^1 \text{ — гладка функція.} \quad (18)$$

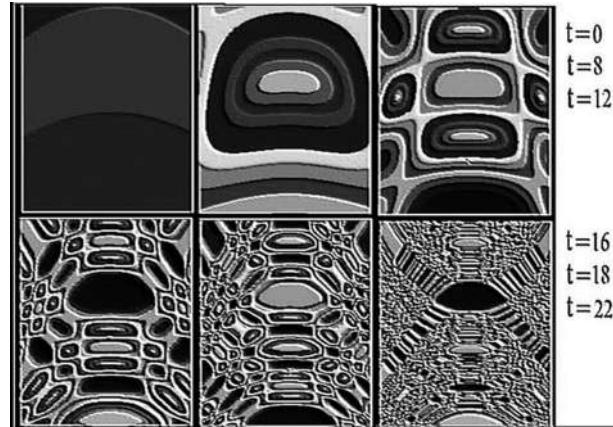


Рис. 6. Один із сценаріїв переходу до розподіленого хаосу.

Загальний розв'язок для (17) записуємо як  $w(x, t) = u_1(x + t) + u_2(x - t)$ , де  $u_1, u_2$  — довільні  $C^2$ -гладкі функції. Підстановка у (18) показує, що  $u = u_1'(t)$  задовольняє різницеве рівняння

$$u(t + 1) - u(t - 1) = g(u(t + 1) + u(t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (19)$$

Звісно, формули переходу від розв'язків рівняння (19) до розв'язків задачі (17), (18) вже не такі прості, як у попередньому прикладі (див. [19]).

Поведінка розв'язків крайових задач, звідних до різницевих або близьких до них рівнянь, не менш складна, ніж у різницевих рівнянь, які досконало підходять для моделювання складних нелінійних явищ, як-от: каскади структур спадаючих масштабів, змішування, утворення фракталів тощо. На основі цього запропоновано концепцію *ідеальної турбулентності* — математичного феномена, який надає принципово нові сценарії просторово-часового хаосу. Ці сценарії засновані на складності “внутрішньої” (просторової) структури “точок” атрактора, водночас динаміка на самому атракторі може бути простою, наприклад, атрактор може складатися з однієї нерухомої точки. Ідеальна турбулентність спостерігається у багатьох ідеалізованих моделях (що нехтують внутрішнім опором) реальних систем, які вивчаються в електродинаміці, акустиці, радіофізиці. Поняття “ідеальна турбулентність” увійшло в наукову термінологію, представлено в Encyclopedia of Nonlinear Science [1]. Основні результати та бібліографію див. у [2, 20–22].

Візуальної виразності ідеальна турбулентність набуває у крайових задачах із двома просторовими змінними, наприклад як на рис. 6. Це ілюстрація до крайової задачі

$$w_t = w_x + w_y, \quad v_t = -v_x - v_y, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ w|_{y=0} = v|_{y=0}, \quad w|_{y=1} = f(v)|_{y=1}, \quad f(z) = \lambda(1 - z^2) - 1.$$

При кожному  $t \in \mathbb{R}^+$  розв'язок цієї задачі визначає у площині  $(x, y)$  векторне поле  $(w(x, y, t), v(x, y, t))$ . Щоб візуалізувати просторово-часову еволюцію поля, у точках  $(x, y)$  обчислено його модуль  $m = m(x, y, t)$  і відповідний піксель дисплея зафарбовано згідно з обраною шкалою. Збільшуючи  $t$ , можна простежити динаміку отримуваних миттєвих портретів, намальованих “підчером”  $m$ . На рис. 6, який відповідає випадку  $\lambda = 1,925$ , виразно простежуються етапи виникнення каскадної просторово-часової ієрархії структур.

Структури з ієрархічного ланцюжка демонструють геометричну подібність: третя картинка ( $t = 12$ ) “стрілко розмножується” зі зростанням часу, але зі зменшенням у масштабах. Зрештою відбувається формування фрактальної структури, самоподібної на різних масштабних рівнях (скейлінг), як це добре видно з трьох останніх картинок ( $t = 16$ ,  $t = 18$ ,  $t = 22$ ). Всі ці явища описуються строго математично завдяки можливості зведення крайової задачі до різницевого рівняння.

Можна з упевненістю стверджувати, що аналіз крайових задач методом редукції до різницевого рівнянь (звісно, коли це можливо) та створення надалі теорії збурень сприятимуть істотному просуванню до глибшого розуміння таких складних явищ як самоорганізація та детермінований хаос.

### Література

1. A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, *Turbulence: ideal*, Encyclopedia of Nonlinear Science (ed. A. Scott), Routledge, New York (2005).
2. О. М. Шарковський, О. Ю. Романенко, *Ідеальна турбулентність: фрактальні і стохастичні аттрактори траєкторій в ідеалізованих моделях математичної фізики*, Ін-т математики НАН України, Київ (2020).
3. О. Ю. Романенко, *Різницеві рівняння з неперервним аргументом*, Ін-т математики НАН України, Київ (2014).
4. А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Київ (1986).
5. E. Yu. Romanenko, *Attractors of continuous difference equations*, Comput. Math. Appl., **36**, № 10-12, 377 – 390 (1998).
6. М. Кuczma, *Functional equations in a single variable*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw (1968).
7. Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский, *Введение в теорию функциональных уравнений*, Ин-т математики АН УССР, Киев (1974).
8. Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский, *Метод инвариантов в теории функциональных уравнений*, Ін-т математики НАН України, Київ (2013).
9. G. D. Birkhoff, *General theory of linear difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **12**, 243 – 284 (1911).
10. R. D. Carmichael, *The general theory of linear  $q$ -difference equations*, Amer. J. Math., **34**, 147 – 168 (1912).
11. G. D. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Math., **60**, 1 – 89 (1932).
12. В. В. Федоренко, *Топологический предел траекторий интервала простейших одномерных динамических систем*, Укр. мат. журн., **54**, № 3, 425 – 430 (2002).
13. A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, *Ideal turbulence: Attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **2**, № 1, 31 – 36 (1992).
14. E. Yu. Romanenko, *Randomness in deterministic continuous time difference equations*, J. Difference Equ. Appl., **16**, № 2-3, 243 – 268 (2010).
15. Г. А. Дерфель, Е. Ю. Романенко, А. Н. Шарковский, *Асимптотическая разрывность гладких решений нелинейных  $q$ -разностных уравнений*, Укр. мат. журн., **52**, № 12, 1615 – 1629 (2000).
16. G. A. Derfel, E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, *Long-time properties of simplest nonlinear  $q$ -difference equations*, J. Difference Equ. Appl., **6**, 485 – 511 (2000).
17. A. N. Sharkovsky, *Difference equations and boundary value problems*, New Progress in Difference Equations (Proc. ICDEA-2001), Taylor and Francis, London (2004).
18. А. Н. Шарковский, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **244**, 281 – 296 (2004).
19. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, *From boundary-value problems to difference equations: A method of investigation of chaotic vibrations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **9**, № 7, 1285 – 1306 (1999).
20. A. N. Sharkovsky, *Ideal turbulence*, Nonlinear Dynam., **44**, 15 – 27 (2006).
21. Е. Ю. Романенко, А. Н. Шарковский, *Динамические системы и моделирование турбулентности*, Укр. мат. журн., **59**, № 2, 217 – 230 (2007).
22. O. Romanenko, *Continuous-time difference equations and distributed chaos modelling*, Math. Lett., **8**, № 1, 11 – 21 (2022).

Одержано 26.09.22