УДК 517.929

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Conditions under which difference equations in the metric space of bounded sequences have bounded or almost periodic solutions are given.

Наведено умови, при виконанні яких різницеві рівняння в метричному просторі обмежених послідовностей мають обмежені або майже періодичні розв'язки.

1. Основні позначення, майже періодичні послідовності й оператори та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, M — довільний повний метричний простір із метрикою ρ_M, a — довільний елемент цього простору і $\mathfrak{M}$ — метричний простір послідовностей $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, для кожної з яких

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{x}(n), a) < \infty,$$

з метрикою

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{x}_1(n), \mathbf{x}_2(n)).$$

Зазначимо, що метричний простір $\mathfrak{M}$ є повним завдяки повноті простору M.

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву $S_m,\ m \in \mathbb{Z}$, формулою

$$(S_m\mathbf{x})(n) = \mathbf{x}(n+m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Означення 1. *Послідовність $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ називається майже періодичною (за Бохнером) [1, 2], якщо замикання $\overline{\{S_m\mathbf{x} \colon m \in \mathbb{Z}\}}$ множини $\{S_m\mathbf{x} \colon m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.*

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з метрикою

$$\rho_{\mathfrak{B}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Нехай $B[\mathbf{a}, r]$ — замкнена куля в просторі $\mathfrak{M}$ із центром у точці $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$ і радіусом r, тобто множина $\{\mathbf{x} \in \mathfrak{M} \colon \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le r\}$.

Означення 2. *Оператор $\mathbf{H} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ називається майже періодичним (за Бохнером), якщо для кожних $\mathbf{a} \in \mathfrak{M},\ r > 0$ і послідовності $(m_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел існує підпослідовність $(m_{k_l})_{l\ge1}$, для якої*

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in B[\mathbf{a},r]} \rho_{\mathfrak{M}}\Big(S_{m_{l_1}}\mathbf{H}S_{-m_{l_1}}\mathbf{x}, S_{m_{l_2}}\mathbf{H}S_{-m_{l_2}}\mathbf{x}\Big) = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора $\mathbf{H}$ рівносильне означенню, що використовувалося Е. Мухамадієвим при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі обмежених на осі функцій [3, 4].

Нехай $\mathcal{K}$ — множина непорожніх компактних множин K метричного простору M і $R(\mathbf{x})$ — множина $\{\mathbf{x}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Зафіксуємо довільну компактну множину $K \subset \mathcal{K}$. Позначимо через $\mathfrak{D}_K$ множину всіх елементів множини $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких $R(\mathbf{x}) \subset K$.

Означення 3. *Оператор* $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *будемо називати майже періодичним, якщо для кожних множини* $K \in \mathcal{K}$ *і послідовності* $(m_k)_{k\geq 1}$ *натуральних чисел існує підпослідовність* $(m_{k_l})_{l\geq 1}$, *для якої*

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}\Big(S_{m_{l_1}}\mathbf{H}S_{-m_{l_1}}\mathbf{x}, S_{m_{l_2}}\mathbf{H}S_{-m_{l_2}}\mathbf{x}\Big) = 0.$$

Очевидно, що майже періодичний за Бохнером оператор $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є майже періодичним у сенсі означення 3. Однак, майже періодичний у розумінні означення 3 оператор $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ може не бути майже періодичним за Бохнером [5 – 7].

Нехай Λ — обмежена підмножина простору M. Визначимо діаметр $\operatorname{diam}\Lambda$ множини Λ рівністю

$$\operatorname{diam}\Lambda = \sup\{\rho_M(x, y) : x, y \in \Lambda\}.$$

Розглянемо майже періодичний у сенсі означення 3 оператор $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, визначений формулою

$$(\mathbf{F}\mathbf{x})(n) = F(n, \mathbf{x}(n), \mathbf{x}(n + m_1), \ldots, \mathbf{x}(n + m_k)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, $k \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ і $F : \mathbb{Z} \times M^{k+1} \to M$ — оператор, для якого

$$\operatorname{diam} F(\mathbb{Z} \times M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_k) < +\infty \tag{1}$$

для всіх обмежених множин $M_0, M_1, \ldots, M_k$.

Вважаємо, що функції $F(n, x_0, x_1, \ldots, x_k)$, $n \in \mathbb{Z}$, є неперервними на M^{k+1}.

Завдяки (1) оператор $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є обмеженим [8, с. 14].

Розглянемо різницеве рівняння

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{h}, \tag{2}$$

в якому $\mathbf{h} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{B}$ або $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$.

Метою цієї статті є встановлення умов, при виконанні яких для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ з передкомпактною множиною значень рівняння (2) має обмежений розв'язок або у випадку $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$ — майже періодичний розв'язок.

2. Локально збіжні послідовності. У подальшому крім природної збіжності послідовності елементів простору $\mathfrak{M}$ також будемо використовувати локально збіжні послідовності елементів цього простору.

Означення 4. *За аналогією з [9] говоритимемо, що послідовність елементів* $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(n)$, $k \geq 1$, *простору* $\mathfrak{M}$ *локально збігається до елемента* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n) \in \mathfrak{M}$ *і позначатимемо*

$$\mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{loc},\ \mathfrak{M}} \mathbf{y} \quad \textit{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{k\to+\infty} \rho_M(\mathbf{y}_k(n), \mathbf{y}(n)) = 0.$$

Поняття локально збіжної послідовності введено в [10, 11].

Означення 5. *Обмежену послідовність елементів* $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{M},\ k \geq 1,$ *називатимемо локально збіжною, якщо існує елемент* $\mathbf{z} \in \mathfrak{M},$ *для якого*

$$\mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{loc},\, \mathfrak{M}} \mathbf{z} \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Зазначимо, що завдяки єдиності границь збіжних послідовностей у просторі $\mathfrak{M}$ елемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$ в означенні 5 єдиний.

Важливим є наступне твердження про існування локально збіжних послідовностей елементів простору $\mathfrak{M}$.

Лема 1. *Нехай* $(\mathbf{y}_k)_{k\geq 1}$ *— довільна обмежена послідовність елементів простору* $\mathfrak{M},$ *для якої множини* $\{\mathbf{y}_k(n)\colon k \geq 1\},\ n \in \mathbb{Z},$ *передкомпактні. Існує локально збіжна підпослідовність* $(\mathbf{y}_{k_l})_{l\geq 1}$ *послідовності* $(\mathbf{y}_k)_{k\geq 1},$ *що локально збігається до* $\mathbf{z} = \mathbf{z}(n) \in \mathfrak{M}$ *при* $l \to \infty,$ *де* $\mathbf{z}(n) = \lim_{l\to\infty} \mathbf{y}_{k_l}(n),\ n \in \mathbb{Z},$ *для якої*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{z}(n), a) \leq \sup_{l\geq 1,\ n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{y}_{k_l}(n), a). \tag{3}$$

Доведення. Оскільки множина $\mathbb{Z}$ зліченна, то її елементи можна пронумерувати і подати цю множину у вигляді $\mathbb{Z} = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$. Розглянемо такі підпослідовності послідовності $(\mathbf{y}_k)_{k\geq 1}$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}_{k_{1,1}}, \mathbf{y}_{k_{1,2}}, \ldots, \mathbf{y}_{k_{1,p}}, \ldots, \\
\mathbf{y}_{k_{2,1}}, \mathbf{y}_{k_{2,2}}, \ldots, \mathbf{y}_{k_{2,p}}, \ldots, \\
\vdots \\
\mathbf{y}_{k_{m,1}}, \mathbf{y}_{k_{m,2}}, \ldots, \mathbf{y}_{k_{m,p}}, \ldots, \\
\vdots\,.
\end{gathered}$$

Ці послідовності вважаємо такими, що:

1) кожна наступна послідовність є підпослідовністю попередньої послідовності;
2) такі послідовності є збіжними:

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}_{k_{1,1}}(n_1), \mathbf{y}_{k_{1,2}}(n_1), \ldots, \mathbf{y}_{k_{1,p}}(n_1), \ldots, \\
\mathbf{y}_{k_{2,1}}(n_2), \mathbf{y}_{k_{2,2}}(n_2), \ldots, \mathbf{y}_{k_{2,p}}(n_2), \ldots, \\
\vdots \\
\mathbf{y}_{k_{m,1}}(n_m), \mathbf{y}_{k_{m,2}}(n_m), \ldots, \mathbf{y}_{k_{m,p}}(n_m), \ldots, \\
\vdots\,.
\end{gathered}$$

Множина послідовностей із такими властивостями є не порожньою, оскільки множини $\{\mathbf{y}_k(n)\colon k \geq 1\},\ n \in \mathbb{Z}$, передкомпактні. Завдяки властивостям розглянутих послідовностей діагональна послідовність

$$\mathbf{y}_{k_{1,1}}(n),\ \ \mathbf{y}_{k_{2,2}}(n), \ldots,\ \ \mathbf{y}_{k_{m,m}}(n), \ldots$$

є збіжною для кожного $n \in \mathbb{Z}$ і тому існують границі

$$\mathbf{z}(n) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{y}_{k_{m,m}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

На підставі (4) та обмеженості послідовності $(\mathbf{y}_k)_{k\ge1}$ (за умовами леми 1) справджується співвідношення (3) і послідовність, що визначається рівностями

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

є елементом простору $\mathfrak{M}$.

Лему 1 доведено.

Також справджується лема, аналогічна лемі 1.

Лема 2. *Нехай $(\mathbf{y}_k)_{k\ge1}$ — обмежена послідовність елементів простору $\mathfrak{M}$, для множин значень $R(\mathbf{y}_k),\ k\ge1$, яких для деякої компактної множини $K \in \mathcal{K}$ виконується включення $\bigcup_{k\ge1} R(\mathbf{y}_k) \subset K$. Існують локально збіжна підпослідовність $(\mathbf{y}_{k_l})_{l\ge1}$ послідовності $(\mathbf{y}_k)_{k\ge1}$ і елемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для яких $\mathbf{y}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc},\,\mathfrak{M}} \mathbf{z}$ при $l \to \infty$ і $R(\mathbf{z}) \subset K$.*

Зазначимо, що окремі випадки лем 1 і 2 містяться в [12, 13] та інших роботах автора, що використовують теорію c-неперервних операторів.

3. Допустимі пари компактних множин і умови обмеженості розв'язків рівняння (2). При з'ясуванні умов існування обмежених розв'язків рівняння (2) будемо використовувати локальну апроксимацію елементів простору $\mathfrak{M}$ періодичними елементами цього простору.

Елемент $\mathbf{x}$ простору $\mathfrak{M}$ називаємо *періодичним*, якщо для деякого $p \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$S_p\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Очевидно, що множина $\mathfrak{P}$ всіх періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підмножиною простору $\mathfrak{B}$ і не є підпростором цього простору.

Означення 6. *Пару (K_1, K_2) компактних множин $K_1, K_2 \subset M$ будемо називати допустимою для відображення $\mathbf{F}: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ (або для рівняння (2)), якщо для кожного періодичного елемента $\mathbf{h} \in \mathfrak{P}$, для якого $R(\mathbf{h}) \subset K_2$, рівняння (2) має розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ (він може не бути єдиним), для якого $R(\mathbf{x}) \subset K_1$.*

Зазначимо, що в означенні 6 відображення $\mathbf{F}$ може не бути майже періодичним.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай пара (K_1, K_2) множин $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ є допустимою для рівняння (2).*

Тоді для кожного елемента $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$, для якого $R(\mathbf{h}) \subset K_2$, рівняння (2) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, для якого $R(\mathbf{x}) \subset K_1$.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ із множиною значень $R(\mathbf{h})$ у K_2 і розглянемо послідовність елементів $\mathbf{h}_k \in \mathfrak{P},\ k \ge 1$, для якої

$$\mathbf{h}_k \xrightarrow{\text{loc},\,\mathfrak{M}} \mathbf{h} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Завдяки включенню $R(\mathbf{h}) \subset K_2$ елементи $\mathbf{h}_k,\ k \ge 1$, можна вибрати так, щоб

$$R(\mathbf{h}_k) \subset K_2, \quad k \ge 1. \tag{6}$$

На підставі (6), періодичності $\mathbf{h}_k$ і допустимості пари (K_1, K_2) для $\mathbf{F}$ різницеве рівняння

$$\mathbf{F}\mathbf{x}_k = \mathbf{h}_k \tag{7}$$

має в просторі $\mathfrak{M}$ розв'язок $\mathbf{x}_k$ і $R(\mathbf{x}_k) \subset K_1$ для кожного $k \ge 1$.

За лемою 2 існує локально збіжна підпослідовність $(\mathbf{x}_{k_l})_{l\geq 1}$ послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ і елемент $\mathbf{x}_*$, для яких

$$\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc}, \, \mathfrak{M}} \mathbf{x}_* \quad \text{при} \quad l \to \infty \tag{8}$$

і

$$R(\mathbf{x}_*) \subset K_1.$$

Покажемо, що

$$(\mathbf{F}\mathbf{x}_*)(n) = h(n) \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Застосовуючи аксіому трикутника до елементів простору M [14, с. 41], отримуємо, що для кожного $n \in \mathbb{Z}$ виконується нерівність

$$\rho_M((\mathbf{F}\mathbf{x}_*)(n), h(n)) \leq \rho_M((\mathbf{F}\mathbf{x}_*)(n), (\mathbf{F}\mathbf{x}_{k_l})(n)) + \\ + \rho_M((\mathbf{F}\mathbf{x}_{k_l})(n), \mathbf{h}_{k_l}(n)) + \rho_M(\mathbf{h}_{k_l}(n), \mathbf{h}(n)).$$

Оскільки на підставі (5), (7) і (8) для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{l\to\infty} (\rho_M((\mathbf{F}\mathbf{x}_*)(n), (\mathbf{F}\mathbf{x}_{k_l})(n)) + \rho_M((\mathbf{F}\mathbf{x}_{k_l})(n), \mathbf{h}_{k_l}(n)) + \rho_M(\mathbf{h}_{k_l}(n), \mathbf{h}(n))) = 0,$$

то

$$\rho_M((\mathbf{F}\mathbf{x}_*)(n), h(n)) = 0 \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z},$$

тобто правильним є співвідношення (9), а отже, $\mathbf{x}_*$ є розв'язком рівняння (2).

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що теорема 1 є прикладом застосування допустимих пар компактних множин для дослідження задачі про умови існування обмежених (не майже періодичних) розв'язків різницевого рівняння (2). У подальшому ми використаємо допустимість уведених до розгляду пар і для з'ясування умов існування майже періодичних розв'язків цього рівняння.

4. Умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (2). У теоремі 1 відображення $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ може не бути майже періодичним. Навіть у випадку майже періодичності цього відображення в сенсі означення 3 і виконання включення $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$ з цієї теореми не випливає, що рівняння (2) має розв'язок у просторі $\mathfrak{B}$. Щоб існував розв'язок досліджуваного рівняння з такою властивістю, потрібно вимагати для $\mathbf{F}$ виконання додаткових вимог. Такі вимоги ми подамо з використанням визначеного на множині розв'язків різницевого рівняння допоміжного функціонала δ.

4.1. Функціонал δ. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ і множину $K \in \mathcal{K}$. Нехай $N(\mathbf{F}, K)$ — множина всіх розв'язків рівняння (2), для кожного з яких $R(\mathbf{x}) \subset K$ і $\overline{R(\mathbf{x})} \neq K$. Припустимо, що $N(\mathbf{F}, K) \neq \varnothing$.

Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$. Нехай

$$r(\mathbf{x}^*, K) = \sup\Big\{\rho_M(x, z) : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)}, \ z \in K\Big\}.$$

Згідно з означенням множини $N(\mathbf{F}, K)$ і нерівністю $N(\mathbf{F}, K) \neq \varnothing$ маємо

$$r(\mathbf{x}^*, K) > 0.$$

Також зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Позначимо через $\Omega\big(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon\big)$ множину всіх елементів $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких $R(\mathbf{z}) \subset K$ і $\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*) \geq \varepsilon$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{z}\in\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{z}, \mathbf{F}\mathbf{x}^*). \tag{10}$$

Цей функціонал будемо використовувати для дослідження рівняння (2).

Зауваження 1. Якщо як метричний простір M взяти банаховий простір E із нормою $\|\cdot\|_E$, то метричний простір $\mathfrak{M}$ буде банаховим простором із нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{x}(n)\|_E,$$

а тому (10) на підставі рівності $\mathbf{F}\mathbf{x}^* = \mathbf{h}$ набуває вигляду

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{z}\in\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \|\mathbf{F}\mathbf{z} - \mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}.$$

4.2. Умови майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (2) з використанням функціонала $\boldsymbol{\delta}$. За допомогою функціонала δ у випадку майже періодичних $\mathbf{F}$ і $\mathbf{h}$ наведемо умови майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (2). При цьому ми не будемо використовувати $\mathscr{H}$-клас рівняння (2) і умову роздільності розв'язків $\mathscr{H}$-класу цього рівняння, як у [15 – 17].

Справедлива така теорема.

Теорема 2 [18]. *Нехай $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — майже періодичне відображення в сенсі означення 3 і $\mathbf{h}$ — майже періодичний елемент простору $\mathfrak{B}$.*

Якщо для розв'язку $\mathbf{x}^* \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2), де $K \in \mathcal{K}$, $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) \neq 0$ і виконується співвідношення $\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0$ для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$, то цей розв'язок майже періодичний.

Доведення цієї теореми наведено в [18].

Зауваження 2. Кожний розв'язок $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2), для якого $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

У формулюванні теореми 2 неявно використано те, що множина $N(\mathbf{F}, K)$ є не порожньою. Наведемо умови, коли ця вимога виконується.

4.3. Поповнення теореми 2 допустимістю пари $\Big(\boldsymbol{K}, \overline{\boldsymbol{R}(\mathbf{h})}\Big)$ для $\boldsymbol{F}$. Якщо здійснити таке поповнення, то множина $\mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ буде не порожньою і отримане твердження буде більш змістовним.

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — *майже періодичне відображення в сенсі означення 3 і* $\mathbf{h}$ — *майже періодичний елемент простору* $\mathfrak{B}$*;*

2) *для кожного розв'язку* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ *рівняння (2), де* $K \in \mathcal{K}$, $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) \neq 0$ *і виконується співвідношення* $\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0$ *для всіх* $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$ *або* $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) = 0$;

3) *пара* $\Big(K, \overline{R(\mathbf{h})}\Big)$ *компактних множин* K *і* $\overline{R(\mathbf{h})}$ *є допустимою для* $\mathbf{F}$.

Тоді кожний розв'язок $\mathbf{x}^*$ *рівняння (2) майже періодичний.*

Зазначимо, що твердження теореми 3 — наслідок теорем 1 і 2. Справді, завдяки допустимості пари $\left(K, \overline{R(\mathbf{h})}\right)$ компактних множин K і $\overline{R(\mathbf{h})}$ для $\mathbf{F}$ (множина $\overline{R(\mathbf{h})}$ компактна на підставі означення 1) і твердженню теореми 1 множина $N(\mathbf{F}, K)$ є не порожньою. Це є підставою для подальшого застосування до рівняння (2) теореми 2 і зауваження 2. Отже, твердження теореми 3 правильне.

5. Додаткові зауваження та літературні вказівки.

1. Лему 1 про існування локально збіжної послідовності елементів метричного простору $\mathfrak{M}$ опубліковано вперше.

2. Поняття допустимої пари компактних множин для різницевого рівняння (2) уведено в розгляд уперше. Це поняття не збігається з поняттям допустимості пари банахових функціональних просторів для диференціальних рівнянь, що розглядалося в [19].

3. Множина допустимих пар компактних множин для рівняння (2) є не порожньою. У цьому легко переконатися, обмежившись розглядом досліджуваного рівняння в лінійному випадку.

4. Теореми 1 і 3, що використовують допустиму пару компактних множин для рівняння (2), є новими.

5. Узагальнення теореми 2 у випадку дискретних рівнянь у метричному просторі $\mathfrak{M}$ відображень $\mathbf{x}$ зліченної адитивної групи G у метричний простір M, для кожного з яких

$$\sup_{g\in G} \rho_M(\mathbf{x}(g), a) < \infty,$$

з метрикою

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sup_{g\in G} \rho_M(\mathbf{x}_1(g), \mathbf{x}_2(g))$$

наведено в [7].

6. Функціонали, аналогічні функціоналу δ, введено автором у статтях [20 – 24] для дослідження нелінійних майже періодичних рівнянь

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$f(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$G(t, x(t), x(t-\Delta_1), \ldots, x(t-\Delta_m)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тут $f : \mathbb{R} \times E \to E$ і $G : \mathbb{R} \times E^{m+1} \to E$ — неперервні оператори, E — банаховий простір і $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — довільні дійсні числа. Для цих рівнянь отримано умови майже періодичності обмежених розв'язків із передкомпактними множинами значень.

Аналогічний функціонал для дослідження нелінійних різницевих, диференціальних і диференціально-різницевих рівнянь

$$x(n+1) = g(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

і

$$F\left(t,\ \sum_{l=0}^{m} A_l(t)x(t-\Delta_l),\ \sum_{l=0}^{m} B_l(t)\frac{dx(t-\tau_l)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

використано автором у [25 – 27]. У цих рівняннях g і F — відображення, що діють із $\mathbb{Z}\times E$ і $\mathbb{R}\times E\times E$ відповідно в E і задовольняють умову майже періодичності, $A_l(t)$ і $B_l(t)$ — неперервні на $\mathbb{R}$ майже періодичні функції зі значеннями в $L(E,E)$, $m\in\mathbb{N}$, а $\Delta_0,\ldots,\Delta_m$ і $\tau_0,\ldots,\tau_m$ — довільні дійсні числа. Для рівнянь (11) – (13) також отримано умови майже періодичності обмежених розв'язків із передкомпактними множинами значень.

Література

1. S. Bochner, *Beitrage zur Theorie der fastperiodischen, I Teil: Funktionen einer Variablen*, Math. Ann., **96**, 119 – 147 (1927); *II Teil: Funktionen mehrerer Variablen*, Math. Ann., **96**, 383 – 409 (1927).
2. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, Москва (1953).
3. Э. Мухамадиев, *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций*, Мат. заметки, **11**, № 3, 269 – 274 (1972).
4. Э. Мухамадиев, *Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений*, Мат. заметки, **30**, № 3, 443 – 460 (1981).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером*, Нелін. коливання, **17**, № 3, 407 – 418 (2014).
6. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 112 – 119 (2015).
7. В. Е. Слюсарчук, *Почти периодические решения дискретных уравнений*, Изв. РАН. Сер. мат., **80**, № 2, 125 – 138 (2016).
8. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
9. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений*, Нелін. коливання, **2**, № 4, 523 – 539 (1999).
10. В. Е. Слюсарчук, *Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений, Душанбе, 102 – 103 (1987).
11. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений*, Укр. мат. журн., **39**, № 5, 660 – 662 (1987).
12. V. E. Slyusarchuk, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations*, Acta Appl. Math., **65**, № 1-3, 333 – 341 (2001).
13. В. Ю. Слюсарчук, *Неявні недиференційовні функції в теорії операторів*, Вид-во Нац. ун-ту вод. гос-ва та природокористування, Рівне (2008).
14. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища шк., Київ (1974).
15. J. Favard, *Sur lesequations differentielles a coefficients presque periodiques*, Acta Math., **51**, 31 – 81 (1927).
16. L. Amerio, *Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **39**, 97 – 119 (1955).
17. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва (1967).
18. V. Yu. Slyusarchuk, *Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space*, Miskolc Math. Notes, **15**, № 1, 211 – 215 (2014).
19. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).

20. В. Ю. Слюсарчук, *Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом*, Нелін. коливання, **16**, № 1, 118 – 124 (2013).
21. В. Ю. Слюсарчук, *Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі*, Укр. мат. журн., **65**, № 2, 307 – 312 (2013).
22. В. Ю. Слюсарчук, *Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь*, Буковин. мат. журн., **1**, № 1-2, 136 – 138 (2013).
23. В. Ю. Слюсарчук, *Дослідження майже періодичних різницевих рівнянь з неперервним аргументом, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь*, Буковин. мат. журн., **1**, № 3-4, 137 – 143 (2013).
24. В. Е. Слюсарчук, *Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве*, Мат. заметки, **97**, № 2, 277 – 285 (2015).
25. В. Ю. Слюсарчук, *Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом*, Нелін. коливання, **16**, № 3, 416 – 425 (2013).
26. В. Ю. Слюсарчук, *Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **66**, № 3, 384 – 393 (2014).
27. В. Е. Слюсарчук, *Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений*, Изв. РАН. Сер. мат., **78**, № 6, 179 – 192 (2014).

Одержано 14.10.22