УДК 517.929.7

СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

А. Б. Дорош, І. І. Тузик, І. М. Черевко

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: a.dorosh@chnu.edu.ua,
i.tuzyk@chnu.edu.ua,
i.cherevko@chnu.edu.ua

We investigate sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of boundary-value problems for integro-differential equations with many delays. We propose and substantiate an iterative scheme of approximation of the boundary-value problem with delay by the boundary-value problem for a system of ordinary differential equations.

Досліджено достатні умови існування та єдиності розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Запропоновано й обґрунтовано ітераційну схему апроксимації крайової задачі із запізненням крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Вступ. Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється, є математичними моделями різноманітних прикладних процесів у біології, імунології, медицині. Важливим при дослідженні цих задач є встановлення зручних умов, що гарантують існування розв'язків таких задач [1, 2].

Знаходження розв'язків крайових задач із запізненням у аналітичній формі можливе тільки в найпростіших випадках, тому актуальною є розробка ефективних методів їхнього наближеного розв'язання [3]. Застосування методу сплайн-функцій для наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь досліджувалось у роботах [4, 5]. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь спеціальними системами звичайних диференціальних рівнянь запропоновано в [6, 7]. Цей підхід застосовано до дослідження одного класу крайових задач із запізненням [8].

Метою цієї статті є поширення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь для дослідження крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями.

2. Постановка задачі та існування розв'язку. Введемо позначення:

$$\begin{aligned} [y(x)] &= \big(y(x), y(x-\tau_1), \ldots, y(x-\tau_n)\big), \\ [y(x)]_1 &= \big(y'(x), y'(x-\tau_1), \ldots, y'(x-\tau_n)\big), \end{aligned} \tag{1}$$

де $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = \tau$.

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f(x, [y(x)], [y(x)]_1) + \int_a^b g\big(x, s, [y(s)], [y(s)]_1\big) ds, \quad x \in [a, b], \tag{2}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, \quad x \in [a - \tau, a], \quad y(b) = \gamma, \tag{3}$$

де $\gamma \in R,\ \varphi(x) \in C^1[a - \tau, a]$ — початкова функція.

Введемо множину точок, що визначається запізненнями $\tau_i,\ i = \overline{1, n}$:

$$E = \big\{x_i \in [a, b] \colon x_i = a + \tau_i,\ \ i = \overline{1, n}\big\}.$$

Зауважимо, що в точках множини E розв'язок крайової задачі (2), (3), взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Введемо позначення

$$P = \sup\Bigg\{|f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big)| + \left|\int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1) ds\right|,$$

$$|y(x)| < P_1,\ |y(x - \tau_i)| < P_1,\ |y'(x)| < P_2,\ |y'(x - \tau_i)| < P_2,\ i = \overline{1, n},\ x \in [a, b]\Bigg\},$$

$$J = [a - \tau, a], I = [a, b], \quad I_1 = [a, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \ldots, \quad I_n = [x_{n-1}, x_n], \quad I_{n+1} = [x_n, b],$$

$$B = \Bigg\{y(x) \colon y(x) \in \big(C(J \cup I) \cap \big(C^1(J) \cup C^1(I)\big)\big) \cap$$

$$\cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} C^2(I_j)\right),\ |y(x)| < P_1,\ |y'(x)| < P_2\Bigg\},$$

де $P_1,\ P_2$ — додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (2), (3) будемо вважати функцію $y = y(x)$ із простору B, яка задовольняє рівняння (2), за можливим винятком точок множини E та крайові умови (3).

Введемо в просторі B норму

$$\|y\|_B = \max\left\{\frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|,\ \frac{2}{b - a} \max\left(\max_{x \in J} |y'(x)|,\ \max_{x \in I} |y'(x)|\right)\right\};$$

із цією нормою простір B є банаховим простором.

Крайова задача (2), (3) еквівалентна інтегральному рівнянню [9]

$$y(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi\right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I,$$

$$\bar{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \qquad l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \dfrac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases} \tag{4}$$

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \le s \le x \le b, \\ \dfrac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \le x \le s \le b; \end{cases}$$

функція Гріна крайової задачі має вигляд

$$y''(x) = 0, \quad x \in I, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі B:

$$(Ty)(x) = \int\limits_{a-\tau}^{b} \left[f(s,[y(s)],[y(s)]_1) + \int\limits_{a}^{b} g(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1)d\xi \right] \bar{G}(x,s)ds + l(s), \quad x \in J \cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a-\tau}^{b} \left[f(s,[y(s)],[y(s)]_1) + \int\limits_{a}^{b} g(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1)d\xi \right] \bar{G}'_x(x,s)ds + \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a},$$
$$x \in J \cup I.$$

Нехай функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)$ неперервна в області $G[a,b] \times G_1^{n+1} \times G_2^{n+1}$, а функція $g(x,s,[y(s)],[y(s)]_1)$ — неперервна в області $Q = [a,b] \times G$, де $G_1 = \{u \in R\colon |u| < P_1\}$, $G_2 = \{v \in R\colon |v| \le P_2\}$, P_1, P_2 — додатні сталі, що входять у означення простору B та задовольняють за змінними $[y(x)]$, $[y(x)]_1$ умову Ліпшиця зі сталими L_i та L_i^1, $i = \overline{0, 2n+1}$, відповідно.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \dfrac{(b-a)^2}{8} P + \max(|\varphi(a)|, |\gamma|) \right\} \le P_1$;

2) $\max\left\{ \max_{x \in J} |\varphi'(x)|, \dfrac{b-a}{2} P + \left| \dfrac{\gamma-\varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \le P_2$;

3) $\dfrac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} \big(L_i + (b-a)L_i^1\big) + \dfrac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} \big(L_i + (b-a)L_i^1\big) < 1$.

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (2), (3) у просторі B.

Доведення теореми проводиться аналогічно до теореми 1 [5].

3. Схема апроксимації крайової задачі. Розглянемо застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [6, 7] до крайової задачі (2), (3). Спочатку проаналізуємо наближення елементів із запізненням, що входять у рівняння (2). Якщо запізнення τ не є малим, тоді для покращення апроксимації розглянемо m елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані:

$$v_1(x) = y\Big(x - \frac{\tau}{m}\Big), \qquad v_2(x) = y_1\Big(x - \frac{\tau}{m}\Big) = y\Big(x - \frac{2\tau}{m}\Big), \ldots,$$
$$v_m(x) = y_{m-1}\Big(x - \frac{\tau}{m}\Big) = y(x-\tau).$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, які визначає система диференціальних рівнянь [6]

$$\frac{\tau}{m}z_1'(x)+z_1(x)=y(x),$$
$$\frac{\tau}{m}z_i'(x)+z_i(x)=z_{i-1}(x),\quad i=\overline{2,m},\quad x\in[a,b], \tag{5}$$
$$z_i(a)=y\Big(a-\frac{i\tau}{m}\Big),\quad i=\overline{1,m}, \tag{6}$$

де $y(x)$ — вхідна функція першого елемента запізнення.

Зауважимо, що систему (5), (6) досліджено в [10, 11]. Якщо функція $y(x)$ задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталою M похідну на $[a-\tau,b]$, тоді

$$\left|z_i(x)-y\Big(x-\frac{i\tau}{m}\Big)\right|\le\frac{2M\tau}{\sqrt{m}},\quad i=\overline{1,m},\quad x\in[a,b]. \tag{7}$$

У випадку $y(x)\in C[a-\tau,b]$ маємо

$$\left|z_i(x)-y\Big(x-\frac{i\tau}{m}\Big)\right|\le 2\bigg(\frac{K\tau}{\sqrt{m}}+\omega\Big(y,\frac{\tau}{m}\Big)\bigg)=\alpha_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big),\quad i=\overline{1,m},\quad x\in[a,b], \tag{8}$$

де стала $K>0$ не залежить від m, $\omega\Big(y,\dfrac{\tau}{m}\Big)$ — модуль неперервності функції $y(x)$ на $[a-\tau,b]$.

Якщо $x(t)$ — кусково-неперервна функція на $[a-\tau,b]$, що має скінченне число точок розриву першого роду, тоді виконуються нерівності [11]

$$\int\limits_a^b\left|z_j(x)-y\Big(x-\frac{j\tau}{m}\Big)\right|dx\le\alpha_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big),\quad j=\overline{1,m}. \tag{9}$$

У нерівностях (8), (9) $\alpha_1(\delta),\ \alpha_2(\delta)$ — монотонно зростаючі функції, для яких $\lim_{\delta\to0}\alpha_i(\delta)=$ $=0,\ i=1,2.$

Введемо позначення

$$[z(x)]=(z_0(x),z_{l_1}(x),\ldots,z_{l_n}(x)),$$
$$[w(x)]=(w_0(x),w_{l_1}(x),\ldots,w_{l_n}(x)),$$

де індекси l_j визначають нерівності

$$\frac{\tau l_j}{m}\le\tau_j<\frac{\tau(l_j+1)}{m}. \tag{10}$$

Поставимо у відповідність крайовій задачі (2), (3) крайову задачу для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(x)=f\big(x,[z(x)],[w(x)]\big)+\int\limits_a^b g\big(x,s,[z(s)],[w(s)]\big)ds, \tag{11}$$

$$z_j'(x) = \frac{m}{\tau}\left(z_{j-1}(x) - z_j(x)\right), \quad j = \overline{1,m},$$

$$z_j(a) = \varphi\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{0,m}, \quad z_0(b) = \gamma, \tag{12}$$

$$w_0(x) = \int\limits_a^b \left[f(s,[z(s)],[w(s)]) + \int\limits_a^b g(s,\xi,[z(\xi)],[w(\xi)])d\xi\right] G_x'(x,s)ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}, \tag{13}$$

$$w_j'(x) = \frac{m}{\tau}\left(w_{j-1}(x) - w_j(x)\right), \quad j = \overline{1,m},$$

$$w_j(a) = \varphi'\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1,m}. \tag{14}$$

4. Обґрунтування схеми апроксимації. Введемо позначення

$$N_j(x) = \max_{a \le \xi \le x}\left|z_j(\xi) - y\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right)\right|,$$
$$W_j(x) = \max_{a \le \xi \le x}\left|w_j(\xi) - y'\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right)\right|, \quad j = \overline{0,m}, \quad x \in I, \tag{15}$$

де $z_j(x),\ w_j(x)$ — розв'язки крайової задачі (11)–(14), а $y(x)$ — розв'язок крайової задачі (2), (3).

Наведемо $z_j(x) = z_j^{(1)}(x) + z_j^{(2)}(x)$, де $z_j^{(1)}(x),\ z_j^{(2)}(x)$ — розв'язки таких задач Коші:

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(1)}(x) + z_1^{(1)}(x) = y(x),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(1)}(x) + z_j^{(1)}(x) = z_{j-1}^{(1)}(x), \quad j = \overline{2,m}, \quad t \in I,$$

$$z_j^{(1)}(a) = y\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1,m}, \tag{16}$$

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(2)}(x) + z_1^{(2)}(x) = z_0(x) - y(x),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(2)}(x) + z_j^{(2)}(x) = z_{j-1}^{(2)}(x), \quad j = \overline{2,m}, \quad t \in I,$$

$$z_j^{(2)}(a) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Оцінимо різниці $\left|z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)\right|$, $j = \overline{1,m}$, враховуючи структуру систем (16), (17):

$$\left|z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)\right| \le \left|z_j^{(1)}(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)\right| + \left|z_j^{(2)}(x)\right|. \tag{18}$$

Оскільки $y(x) \in C[a-\tau, b]$, то згідно з нерівністю (8) маємо

$$\left|z_j^{(1)}(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)\right| \le \alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right).$$

Для другого доданка у правій частині (18), аналогічно з викладками у роботі [11], нескладно одержати нерівність

$$\left|z_j^{(2)}(x)\right| \leq \max_{a\leq\xi\leq x}|z_0(\xi)-y(\xi)| = N_0(x). \tag{19}$$

Із нерівностей (18), (19) дістаємо оцінку

$$N_j(x) \leq \alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right) + N_0(x), \quad j=\overline{1,m}, \quad x\in I. \tag{20}$$

Розглянемо тепер зображення

$$w_j(x) = w_j^{(1)}(x) + w_j^{(2)}(x), \quad j=\overline{1,m},$$

де $w_j^{(1)}(x),\ w_j^{(2)}(x)$ — розв'язки задач Коші

$$\begin{gathered}\frac{\tau}{m}\,w_1'^{(1)}(x) + w_1^{(1)}(x) = y'(x),\\ \frac{\tau}{m}\,w_j'^{(1)}(x) + w_j^{(1)}(x) = w_{j-1}^{(1)}(x), \quad j=\overline{2,m}, \quad x\in I,\\ w_j(a) = y'\left(a-\frac{j\tau}{m}\right), \quad j=\overline{1,m},\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\frac{\tau}{m}w_1'^{(2)}(x) + w_1^{(2)}(x) = w_0(x) - y'(x),\\ \frac{\tau}{m}w_j'^{(2)}(x) + w_j^{(2)}(x) = w_{j-1}^{(2)}(x), \quad j=\overline{2,m}, \quad x\in I,\\ w_j^{(2)}(a) = 0, \quad j=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{22}$$

Оцінимо різниці

$$\int_a^x\left|w_j(s) - y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds, \quad j=\overline{1,m},$$

враховуючи вигляд систем (21), (22):

$$\int_a^x\left|w_j(s) - y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds \leq \int_a^x\left|w_j^{(1)}(s) - y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds + \\ + \int_a^x\left|w_j^{(2)}(s)\right|ds, \quad j=\overline{1,m}, \quad x\in I. \tag{23}$$

Функція $y'(x)$ є кусково-неперервною на $[a-\tau,b]$, а тому згідно з (9)

$$\int_a^x\left|w^{(1)}(s) - y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds \leq \alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad j=\overline{1,m}, \quad x\in I.$$

Для оцінки $\left|w_j^{(2)}(x)\right|$, аналогічно з (19), маємо

$$\left|w_j^{(2)}(x)\right| \leq \max_{a\leq\xi\leq x}\left|w_0(\xi) - y'(\xi)\right| = W_0(x).$$

Враховуючи одержані нерівності, з (23) дістаємо

$$\int\limits_a^x w_j(s)ds \leq \alpha_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \int\limits_a^x w_0(s)ds, \quad j = \overline{1,m}, \quad x \in I. \tag{24}$$

Для функції $z_0(x)$ запишемо еквівалентне інтегральне рівняння

$$z_0(x) = \int\limits_a^b \left\{ f(s,[z(s)],[w(s)]) + \int\limits_a^b g(s,\xi,[z(\xi)],[w(\xi)])d\xi \right\} G(x,s)ds+$$

$$+ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a), \quad x \in I. \tag{25}$$

Враховуючи позначення (9), (15), оцінки (20) і (24), одержуємо допоміжні нерівності

$$\begin{aligned}\left|y(x-\tau_j) - z_{l_j}(x)\right| &\leq \left|y(x-\tau_j) - y\Big(x - \frac{l_j\tau}{m}\Big)\right| + \left|y\Big(x-\frac{l_j\tau}{m}\Big) - z_{l_j}(x)\right| \leq \\ &\leq N_{l_j}(x) + \omega\Big(y,\frac{\tau}{m}\Big) \leq \alpha_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + N_0(x) + \omega\Big(y,\frac{\tau}{m}\Big) = \\ &= \beta_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + N_0(x), \quad j=\overline{1,m}, \quad x\in I,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_a^b \left|y'(s-\tau_j) - w_{l_j}(s)\right|ds \leq \\ &\leq \int\limits_a^b \left|y'(s-\tau_j) - y'\Big(s-\frac{l_j\tau}{m}\Big)\right|ds + \int\limits_a^b \left|y'\Big(s-\frac{l_j\tau}{m}\Big) - w_{l_j}(s)\right|ds \leq \\ &\leq \int\limits_a^{a+\frac{l_j\tau}{m}} \left|y'(s-\tau_j) - y'\Big(s-\frac{l_j\tau}{m}\Big)\right|ds + \int\limits_{a+\frac{l_j\tau}{m}}^{a+\tau_j} \left|y'(s-\tau_j) - y'\Big(s-\frac{l_j\tau}{m}\Big)\right|ds+ \\ &+ \int\limits_{a+\tau_j}^b \left|y'(s-\tau_j) - y'\Big(s-\frac{l_j\tau}{m}\Big)\right|ds + \alpha_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \int\limits_a^b W_0(s)ds \leq \\ &\leq \Big(\max_{x\in J}|\varphi'(x)| + P_2\Big)\frac{2\tau}{m} + (b-a)\omega\Big(y',\frac{\tau}{m}\Big) + \alpha_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \int\limits_a^b W_0(s)ds = \\ &= \beta_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \int\limits_a^b W_0(s)ds, \quad j=\overline{1,m}, \quad x\in I,\end{aligned} \tag{27}$$

де

$$\beta_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) = \alpha_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \omega\Big(y, \frac{\tau}{m}\Big),$$

$$\beta_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big) = \Big(\max_{x\in J}|\varphi'(x)| + P_2\Big)\frac{2\tau}{m} + (b-a)\omega\Big(y', \frac{\tau}{m}\Big) + \alpha_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big),$$

$\omega\Big(y, \dfrac{\tau}{m}\Big)$, $\omega\Big(y', \dfrac{\tau}{m}\Big)$ — модулі неперервності функцій $y(x)$ і $y'(x)$ відповідно на $J\cup I$ та I.

Враховуючи властивості функцій f та g, оцінки (26) і (27), а також $|G(x,s)| \le \dfrac{b-a}{4}$, $x, s \in I$, із співвідношень (4) і (25) маємо нерівності

$$\begin{aligned} |y(x) - z_0(x)| \le \frac{(b-a)^2}{4}\beta_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big)\sum_{j=0}^{n}\big(L_j + (b-a)L_j^1\big) + \\ + \frac{b-a}{4}\beta_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)\sum_{j=n+1}^{2n+1}\big(L_j + (b-a)L_j^1\big) + \\ + \frac{b-a}{4}\sum_{j=0}^{n}\big(L_j + (b-a)L_j^1\big)\int_a^b N_0(s)\,ds + \\ + \frac{b-a}{4}\sum_{j=n+1}^{2n+1}\big(L_j + (b-a)L_j^1\big)\int_a^b W_0(s)\,ds. \end{aligned} \tag{28}$$

Позначимо $\max_{0\le i\le 2n+1}(L_i, L_i^1) = Q$; тоді нерівність (29) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} |y(x) - z_0(x)| \le \frac{b-a}{4}Q(n+1)(1+b-a)\Big[(b-a)\beta_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \beta_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)\Big] + \\ + \frac{b-a}{4}Q(n+1)(1+b-a)\int_a^b [N_0(s) + W_0(s)]ds. \end{aligned} \tag{29}$$

Враховуючи тепер, що $|G'_x(x,s)| \le 1,\ t, s \in I$, аналогічно маємо

$$\begin{aligned} |y'(x) - w_0(x)| \le Q(n+1)(1+b-a)\Big[(b-a)\beta_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \beta_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)\Big] + \\ + Q(n+1)(1+b-a)\int_a^b [N_0(s) + W_0(s)]ds. \end{aligned} \tag{30}$$

Нерівності (29), (30) справедливі для всіх $x \in I$, тому дістаємо оцінку

$$N_0(b) + W_0(b) \le Q_1\Big[(b-a)\beta_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \beta_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)\Big] + Q_1\int_a^b [N_0(s) + W_0(s)]ds, \tag{31}$$

де $Q_1 = Q(n+1)(1+b-a)\Big(1 + \dfrac{b-a}{4}\Big)$.

Застосувавши тепер нерівність Гронуолла, отримаємо

$$N_0(b) + W_0(b) \le Q_1\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) + \beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right]e^{Q_1}.$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай функції* $f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big)$ *і* $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1)$ *задовольняють умови теореми 1. Тоді крайова задача (10) – (14) апроксимує крайову задачу (2), (3) і виконуються співвідношення*

$$\max_{a\le\xi\le x}\left|z_j(\xi) - y\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right)\right| + \max_{a\le\xi\le x}\left|w_j(\xi) - y'\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right)\right| \le N\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad j = \overline{0,m}, \quad x \in I,$$

де стала N *не залежить від* j *і* m, *а* $\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right)$ *— монотонно неспадна функція така, що*

$$\lim_{m\to\infty}\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$$

Література

1. J. M. Cushing, *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*, Lect. Notes Biomath., Vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, New York (1977).
2. C. Tunc, *Properties of solutions to Volterra integro-differential equations with delay*, Appl. Math. Inf. Sci., **10**, № 5, 1775 – 1780 (2016).
3. H. Brunner, *Recent advances in the numerical analysis of Volterra functional differential equations with variable delays*, J. Comput. Appl. Math., **228**, № 2, 524 – 537 (2009).
4. Н. П. Настасьєва, І. М. Черевко, *Наближений метод розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу*, Мат. студії, **10**, № 2, 147 – 152 (1998).
5. I. Cherevko, A. Dorosh, *Existence and approximation of a solution of boundary-value problems for delay integro-differential equations*, J. Numer. Anal. Approx. Theory, **44**, № 2, 154 – 165 (2016).
6. A. Halanay, *Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations*, Acad. Press, New York (1981).
7. О. В. Матвій, І. М. Черевко, *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість*, Нелін. коливання, **7**, № 2, 208 – 216 (2004).
8. О. А. Матвій, І. М. Черевко, *Апроксимація крайових задач із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки, № 3, 129 – 137 (2003).
9. L. J. Grim, K. Schmitt, *Boundary-value problems for delay-differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **74**, № 5, 997 – 1000 (1968).
10. Л. А. Піддубна, І. М. Черевко, *Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **2**, № 1, 42 – 50 (1999).
11. О. В. Матвій, І. М. Черевко, *Апроксимація систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь із багатьма запізненнями*, Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика, Вип. 150, 50 – 54 (2002).

Одержано 04.11.22