

УДК 551.509.615

***В.М. Хотяїнець, Р.В. Бардаков, С.В.Краковська, В.М. Шпиг***

## **ЕВОЛЮЦІЯ ЗМІШАНОЇ ХМАРИ: РІСТ ЧАСТИНОК ЛЬОДУ**

У роботі виконано теоретичний аналіз еволюції змішаної хмари або холодного туману з моменту активації ядер льодоутворення до повної кристалізації. Використано максимально просту модель, яка включає переохоложені хмарні краплі однакового розміру, частинки льоду однакового розміру та водяну пару. Отримано безрозмірні вхідні параметри хмари, виокремлено основні сценарії та етапи її еволюції, показано особливості перебігу мікрофізичних процесів на кожному із етапів, знайдено відповідні характерні часи і розміри частинок. Запропоновано оригінальні наближення, які в перспективі можуть служити основою для створення нових науково обґрунтованих і чисельно ефективних параметризацій мікрофізичних процесів у змішаних хмарах для сучасних моделей прогнозу погоди.

**Ключові слова:** змішана хмара, льодоутворення, параметризація, процеси конденсації та коагуляції в хмарі.

### **Вступ**

Коректне представлення хмар та опадів у регіональних та глобальних моделях прогнозу погоди та клімату є однією з найактуальніших проблем у сучасному чисельному моделюванні атмосфери [4, 7, 19]. Поряд із все ще недостатньою вивченістю процесів утворення хмар та опадів загалом, неможливість провести обчислення достатньо швидко через обмеженість розрахункових потужностей є головною причиною того, що хмари наразі вносять найбільші невизначеності як у моделі прогнозу погоди, так і в кліматичні моделі. Це відбувається через те, що в обох цих класах моделей використовуються значні спрощення в представленні процесів хмаро- та опадоутворення. Тобто, всі ці доволі складні фізичні процеси фазових перетворень води в атмосфері розраховуються за узагальнюючими співвідношеннями, які називають параметризаціями, оскільки в них використовують емпіричні параметри, які, як правило, відповідають усередненому стану системи і жорстко прив'язані до географічної місцевості.

Сучасні розробки у цьому напрямі в основному спрямовані на вдосконалення наявних параметризацій шляхом розширення класів частинок льоду (сніг, град, крупа, агрегати), додавання другого моменту – кількості частинок або уточнення параметрів [5, 6, 10, 15, 17, 20, 22]. Принципово нових підходів до вказаної проблеми останнім часом не з'явилося, і в більшості сучасних публікацій активно просувається думка, що перехід від одно- до двоментних параметризацій може поліпшити ситуацію з про-

гнозами сильних опадів та інших явищ погоди, що виходять за межі середньостатистичних, для яких власне і розроблялись параметризації. Цей напрям можна назвати емпіричним «ускладненням» узагальнюючих параметризацій, що може, на жаль, скоріше «штучно створити» додаткові хмари та опади через складнощі із збереженням балансу маси води в атмосфері, аніж поліпшити прогноз.

Очевидно, можна йти й іншим шляхом: відштовхуючись від максимально повної системи рівнянь з урахуванням усіх елементарних процесів у хмарі і жорсткого дотримання закону збереження маси води, послідовно спрощувати описання явищ, які досліджуються, у межах конкретних часових та просторових масштабів. Ця робота є кроком саме в такому напрямі, деякі її положення вже обговорювалися на міжнародних семінарах з моделювання хмар [8, 9].

Наразі існують детальні й доволі точні чисельні моделі мікрофізичних процесів у хмарах, які включають розподіли частинок за розмірами, використовують сотні змінних, що дозволяє представляти хмари, опади та процеси взаємодії між їх складовими максимально наближено до реальних. Історія розвитку таких моделей тісно пов'язана з УкрГМІ, де вперше було запропоновано застосовувати саме розподіли частинок за розмірами для опису процесів еволюції хмар у 60-х роках ХХ ст. М.В. Буйковим. Надалі Г.М. Пірнач було створено цілий клас спектральних мікрофізичних моделей хмар (так звані бін-моделі), які передусім застосовували для теоретичної інтерпретації натурних експериментів із засіву хмар з

метою регулювання опадів [1, 2, 4, 14]. Подібні спектральні моделі успішно використовують з дослідницькими цілями провідні наукові центри світу [3, 7, 14, 18, 20 та ін.]. Такі складні моделі не можна застосувати для оперативних прогнозів погоди, оскільки вони потребують настільки значних розрахункових витрат, яких до цього часу не може собі дозволити жоден прогностичний центр світу. Тому нині існує прірва між добре розвченими спектральними моделями хмар, з одного боку, і вкрай спрощеним представленням хмар у більшості оперативних моделей прогнозу погоди – з іншого.

Основною метою цієї роботи було знайти спрощене, але достатньо точне й фізично обґрунтоване описання мікрофізичних процесів у змішаній хмарі у визначених актуальних умовах атмосфери, придатне в перспективі для реалізації в моделях прогнозу погоди. Основна увага приділялась найважливішому, з погляду формування опадів, і найскладнішому, з фізичного боку, процесу – росту частинок льоду в змішаній хмарі.

#### Модель, основні рівняння і постановка задачі

Науково обґрунтовано спростити описання еволюції змішаної хмари можна лише на підставі всебічного аналізу перебігу мікрофізичних процесів. Тому доцільно почати з моделі, яка допускає достатньо повний аналіз. У цій роботі ми розглянемо просторово однорідну систему, яка складається з переохолоджених хмарних крапель, частинок льоду і водяної пари в повітрі з урахуванням реальних меж зміни параметрів в умовах атмосфери. Аналіз ролі таких ускладнювальних чинників як висхідний рух повітря, розподіл крапель за розмірами та просторова неоднорідність хмари потребуватиме окремого дослідження.

Водяна хмара стає змішаною з моменту активації ядер льодоутворення. Після цього її поточний стан у моделі задається вологістю повітря, концентрацією й розмірами хмарних крапель, а також розмірами льодяних частинок. Концентрація частинок льоду залишається сталою, рівною концентрації активованих ядер льодоутворення. Унаслідок великої теплоємності повітря, тепловий ефект від фазових перетворень за реальних умов можна не враховувати, тиск і температура повітря залишаються сталими.

Для швидкості росту (висихання) хмарних частинок у роботі використано максвелівське наближення [20], а також дискретний розподіл крапель за розмірами. Тоді рівняння для радіусу хмарних крапель матиме вигляд:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{D}{\rho_w} \frac{(q - q_s)}{r}, \quad (1)$$

де  $r$  – радіус краплини,  $q$  – абсолютна вологість,  $q_s$  – вологість насичення над поверхнею води (надалі у цьому контексті будемо скорочувати до «над водою»),  $D$  – коефіцієнт дифузії водяної пари,  $\rho_w$  – густина води.

Аналогічний вираз для швидкості конденсаційного росту використаємо і для льодяної частинки<sup>1</sup>. Хоча в природі існує різноманіття форм льодяних кристалів, вважатимемо частинки льоду сферичними, щоб спростити задачу. Тоді рівняння росту (висихання) частинок льоду завдяки тільки конденсації пари матиме вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D}{\rho_{ice}} \frac{(q - Q_s)}{R} \quad (2)$$

де  $R$  – радіус льодяної частинки,  $Q_s$  – вологість насичення над льодом,  $\rho_{ice}$  – густина льоду. Для крапель і частинок льоду нульового радіуса (тобто, коли частинок немає) швидкість конденсаційного росту (висихання) дорівнює нулю.

У процесі коагуляції льодяні частинки, що падають під дією тяжіння, збирають на себе краплини переохолодженої води, які в ході зіткнення практично миттєво замерзають. Нехай частинки льоду збирають усі краплини, що зустрічаються їм на шляху. Краплини малі, тому вважаємо їх нерухомими, швидкість льодяних частинок  $u$  значно більша за швидкість крапель. Тоді зміна концентрації хмарних крапель  $n$  внаслідок коагуляції визначається рівнянням:

$$\frac{dn}{dt} = -N\pi R^2 |u| n, \quad (3)$$

де  $N$  – концентрація частинок льоду. Швидкість частинок льоду знайдемо, виходячи із формули Стокса. Тоді

$$u = \alpha R^2, \quad (4)$$

де коефіцієнт  $\alpha$  визначається формулою

$$\alpha = \frac{2}{9} \frac{(\rho_{ice} - \rho_{air})}{\mu} g. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Зауважимо, що тут і надалі, подібно до термінології, прийнятої у фізиці, під конденсацією будемо розуміти перехід речовини у твердий стан із газоподібного (*англ. deposition*), на відміну від прийнятого в фізиці хмар терміна «сублімація».

Тут  $\rho_{air}$  – густина середовища,  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості повітря,  $g$  – прискорення вільного падіння. Відхилення від формули Стокса можуть бути важливими для великих швидкостей, але вони по-різному виявляють себе для льодяних частинок різної форми, і на цьому етапі враховувати їх не будемо.

Швидкість росту льодяних частинок в результаті коагуляції можна тепер знайти з умови балансу маси: на скільки маса крапель води зменшилася за одиницю часу, на стільки ж збільшилася маса частинок льоду. Тому:

$$\rho_w v \frac{dn}{dt} = -N \rho_{ice} \frac{dV}{dt}, \quad (6)$$

де  $v$  і  $V$  об'єми, а  $n$  і  $N$  – концентрації крапель і льодяних частинок відповідно. З рівнянь (4) – (6) для швидкості зміни радіуса кристалів льоду за рахунок коагуляції отримаємо:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{3} \frac{\rho_w}{\rho_{ice}} \pi a n R^2 r^3. \quad (7)$$

Отримаємо тепер з балансних міркувань рівняння для абсолютної вологості повітря. Зміна маси води в одиниці об'єму за одиницю часу повинна дорівнювати відповідній зміні маси крапель і льоду тільки за рахунок конденсації, тобто:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -n \rho_w \frac{dv}{dt} - \rho_{ice} N \frac{dV}{dt} = \\ &= -\rho_w \cdot 4\pi r^2 n \left( \frac{dr}{dt} \right)_{cond} - \\ &- \rho_{ice} \cdot 4\pi R^2 N \left( \frac{dR}{dt} \right)_{cond}. \end{aligned} \quad (8)$$

Остаточний вигляд рівняння для вологості:

$$\frac{dq}{dt} = -4\pi D r n (q - q_s) - 4\pi D R N (q - Q_s). \quad (9)$$

Тепер запишемо повну систему рівнянь для опису еволюції стану системи, що складається з водяної пари, льодяних частинок і хмарних крапель у повітрі. Якщо вважати, що ми маємо один набір льодяних частинок і  $K$  наборів хмарних крапель, а швидкості росту льодяних частинок за рахунок конденсації і коагуляції – адитивні, матимемо:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{D}{\rho_w} \frac{(q - q_s)}{r_i}, \quad (10)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D}{\rho_{ice}} \frac{(q - Q_s)}{R} + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\rho_{ice}} R^2 l, \quad (11)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = -N \pi \alpha R^4 n_i, \quad (12)$$

$$\frac{dq}{dt} = - \sum_{i=1}^K 4\pi D r_i n_i (q - q_s) - 4\pi D R N (q - Q_s). \quad (13)$$

де  $l$  – водність (маса води у вигляді крапель на одиницю об'єму):

$$l = \sum_{i=1}^K \frac{4}{3} \pi r_i^3 n_i \rho_w \quad (14)$$

Аналогічно, льодність  $L$  означимо як масу частинок льоду на одиницю об'єму:

$$L = \frac{4}{3} \pi R^3 N \rho_{ice} \quad (15)$$

Нижче буде задано також початковий стан системи, що рівнозначно відповідним початковим умовам. Легко показати, що з рівнянь (10) – (15) слідує закон збереження маси води в одиниці об'єму (температуру і густину повітря вважаємо сталими):

$$q(t) + l(t) + L(t) = q_{max} \quad (16)$$

де  $l$  і  $L$  визначені рівняннями (14), (15), стала  $q_{max}$  є водовмістом, який визначається початковим станом системи.

Далі у цій роботі вважатимемо, що всі краплі одного розміру, хоча записані рівняння дозволяють надалі досліджувати і вплив розподілу крапель за початковими розмірами на еволюцію хмари. Тоді із чотирьох рівнянь (10) – (13) тільки три є незалежними, одне з диференціальних рівнянь можна замінити алгебраїчним рівнянням (16).

### Попередній аналіз і основні рівняння в безрозмірних змінних

Система чотирьох нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку (10) – (13) описує взаємопов'язані зміни вологості, розміру частинок льоду, розміру й концентрації хмарних крапель. Обмін масою між компонентами системи (пара – краплі – лід) і зміна числа крапель відбуваються внаслідок конденсаційних і коагуляційних процесів. Окремі доданки в правих частинах рівнянь ураховують:

- зміну вологості внаслідок конденсації пари на краплях або їх випаровування;

- зміну вологості внаслідок конденсації пари на частинках льоду або їх випаровування;
- випаровування або конденсаційний ріст крапель;
- випаровування або конденсаційний ріст частинок льоду;
- ріст частинок льоду внаслідок захоплення ними хмарних крапель;
- зменшення числа крапель внаслідок їх захоплення частинками льоду.

Швидкості конденсаційних процесів залежать від пересичення над водою і над льодом, які є різними, оскільки  $q_s > Q_s$ . Крім того, швидкості різних процесів по-різному залежать від розмірів відповідних частинок (води чи льоду) [4, 11, 19, 21].

Далі виконаємо попередній аналіз поведінки системи, який необхідний для кращого розуміння логіки подальших дій. Рівновага між водою і паром можлива тільки за відсутності льоду (у водяній хмарі). Тоді рівняння (11), (12) відсутні,  $q = q_s$ , і праві частини рівнянь (10) і (13) обертаються в нуль. Нехай на момент активації ядер льодоутворення така рівновага вже встановилась; відповідний початковий стан системи при  $t = 0$  задамо початковими значеннями вологості  $q_s$ , числа крапель  $n_0$  і водності  $l_s$  (початковий радіус крапель  $r_s$  визначається рівнянням (14)). Об'ємом ядер льодоутворення знехтуємо, тоді у початковий момент  $R = 0, L = 0$ , і у рівнянні (16)  $q_{max} = q_s + l_s$ . Отже, незалежно від  $n_0$ , на рис. 1 початковому стану відповідає точка А.

Активация ядер льодоутворення порушує існуючу рівновагу між паром і водою. Адже в момент активації пересичення над льодом додатне, тому частинки льоду починають швидко рости (див. р-ня (11)), зменшуючи вологість (див. р-ня (13)), у зв'язку з чим з'являється дефіцит насичення. Через це розмір крапель зменшується (див. р-ня (10)), унаслідок гравітаційного руху частинки льоду ростуть швидше, при цьому також зменшується число крапель (див. р-ня (12)).

Після появи льоду, рівновага в системі можлива тільки за відсутності води, коли  $n = 0, l = 0$  і  $q = Q_s$  (див. р-ня (10)-(13)). Легко бачити, що

ця рівновага пара-лід стійка. Тому в цій моделі за будь-яких значень параметрів вся вода в кінцевому підсумку перетворюється на лід, а вологість зменшується до рівноважної над льодом. На рис.1 кінцевому стану системи відповідає точка С. Із (16) випливає, що льодність зростає від нуля до максимального кінцевого значення  $L_m$  за рахунок падіння водності на  $l_s$  і падіння вологості на різницю вологостей насичення над водою та льодом  $\Delta$ :

$$L_m = l_s + \Delta \quad (17)$$

де

$$\Delta = q_s - Q_s \quad (18)$$

Закон збереження маси (16) у просторі змінних  $l$  – водність,  $L$  – льодність,  $q$  – вологість є рівнянням площини, що відтинає рівні відрізки на осях. Формально доступною для руху системи є частина площини у вигляді трикутника, показана на рис. 1, яка відповідає невід'ємним значенням змінних. Як показано далі, за реальних значень параметрів вологість залишається практично сталою  $q \approx q_s$ , поки в хмарі є вода. Іншими словами, траєкторія системи наближено проходить по лінії А-В-С (дещо нижче А-В і близько до В). Це означає, що еволюція змішаної хмари розпадається на дві основні стадії: стадію змішаної хмари (перехід з А у В за  $q \approx q_s$ ), під час якої змішана хмара перетворюється на льодяну, а льодність зростає до  $l_s$ , і стадію льодяної хмари (перехід із В у С при нульовій водності), під час якої льодність додатково зростає на  $\Delta$  за рахунок падіння вологості до  $Q_s$ .

Насправді перехід по лінії А-В на рис. 1 може відбуватись по-різному, оскільки реальний простір станів системи є чотиривимірним, а водність (14) може зменшуватись у різний спосіб: шляхом зменшення розмірів крапель і шляхом зменшення їх числа. Процес може також по-різному розвиватись у часі.

Перейдемо тепер до безрозмірних змінних. Це дозволить виділити малий параметр, а також скоротити число незалежних вхідних параметрів і число випадків, які треба дослідити, за рахунок співвідношень подібності, характерних для даної фізичної системи.

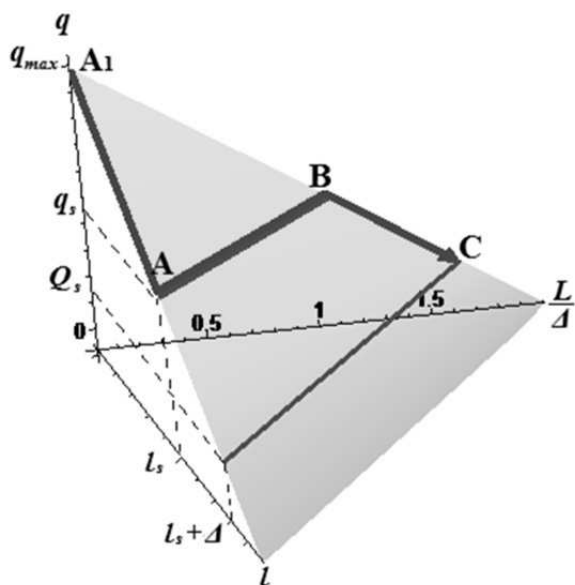


Рис. 1. Характерні положення системи у просторі змінних  $l, L, q$  (водність, льодність, вологість): А – початковий стан (вологість дорівнює насичуючій над водою  $q = q_s$ , льоду немає  $L = 0$ , водність відповідає рівновазі вода-пара  $l = l_s$ ); В – проміжний стан (вологість дорівнює насичуючій над водою  $q = q_s$ , води немає  $l = 0$ , льодність дорівнює початковій водності  $L = l_s$ ); С – кінцевий стан (вологість відповідає насиченню над льодом  $q = Q_s$ , води немає  $l = 0$ , льодність максимальна  $L = L_m$ ); А<sub>1</sub> – нерівноважний стан з максимальною вологістю при заданому водовмісті  $q = q_s + l_s$ , коли води і льоду немає  $l = 0, L = 0$ .

Введемо безрозмірне пересичення над льодом  $H(t)$  та над водою  $h(t)$  в одиницях  $\Delta$

$$H(t) = \frac{q(t) - Q_s}{\Delta} \quad (19)$$

$$h(t) = \frac{q(t) - q_s}{\Delta} = H(t) - 1 \quad (20)$$

Безрозмірні об'єм краплі  $x$ , об'єм частинок льоду  $y$  і концентрацію крапель  $n'$  введемо таким чином:

$$\frac{r}{r_s} = x^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{R}{R_s} = y^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{n}{n_0} = n' \quad (21)$$

$$r_s = \left( \frac{3l_s}{4\pi\rho_w n_0} \right)^{\frac{1}{3}} R_s = \left( \frac{3l_s}{4\pi\rho_{ice} N} \right)^{\frac{1}{3}}$$

де  $r_s$  – початковий радіус крапель (у точці А, рис.1),  $R_s$  – радіус частинок льоду при  $L=l_s$  (у точці В, рис.1),  $n_0$  – початкова концентрація крапель. Штрих біля  $n$  надалі будемо опускати. У початковий момент часу  $x(0) = 1, n(0) = 1, H(0) = 1, h(0) = 0, y(0) = 0$ . Рівняння еволю-

ції стану і закон збереження маси в безрозмірних змінних набувають вигляду

$$\tau \dot{h} = - \left( n x^{\frac{1}{3}} + \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}} \right) h - \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}} \quad (22)$$

$$T_c \dot{n} = - y^{\frac{4}{3}} n \quad (23)$$

$$\tau \dot{x} = \delta h x^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

$$T_c \dot{y} = (1 + h) \gamma y^{\frac{1}{3}} + n x y^{\frac{4}{3}} \quad (25)$$

$$n x = 1 - \delta h - y \quad (26)$$

Безрозмірні рівняння (22) – (26) включають два характерних часи  $\tau$  і  $T_c$ , а також три безрозмірні параметри  $\delta, \gamma, \varepsilon_1$ , які разом і визначають поведінку системи:

$$\tau = \frac{1}{4\pi D n_0} \left( \frac{4\pi\rho_w n_0}{3l_s} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (27)$$

$$T_c = \frac{4\rho_{ice}}{3l_s \alpha} \left( \frac{4\pi\rho_{ice} N}{3l_s} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (28)$$

$$\delta = \frac{q_s - Q_s}{l_s} = \frac{\Delta}{l_s} \quad (29)$$

$$\gamma = \frac{16\pi\rho_{ice} N \Delta}{3l_s \alpha} \quad (30)$$

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{N}{n_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\rho_w}{\rho_{ice}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (31)$$

Незалежним є тільки один із часів, оскільки  $\gamma\tau = \delta\varepsilon_1 T_c$ . Таким чином, після переходу до безрозмірних змінних і безрозмірного часу поведінка системи визначається трьома незалежними параметрами замість п'яти розмірних параметрів  $q_s, Q_s, n_0, N, l_s$  і трьох констант  $\rho_w, \rho_{ice}$  і  $\alpha$ .

Ця система рівнянь надалі буде вихідною для аналізу еволюції стану системи частинок льоду, крапель і пари. Оскільки для ядер льодоутворення концентрація завжди на декілька порядків менша, ніж для хмарних крапель [5, 19], то за реальних умов  $\varepsilon_1$  є малим параметром порядку  $10^{-2} \div 10^{-4}$  (див. наступний розділ). Далі ми розглянемо спрощення в перебігу фізичних процесів, що виникають унаслідок малості  $\varepsilon_1$ , і відповідні можливості спрощення опису еволюції стану хмари.

### Малість пересичення над водою в змішаній хмарі

З рівняння (22) видно, що ненульове пересичення над водою для  $t > 0$  створюється з поя-

вою і ростом льоду (останній член у правій частині рівняння (22)), але відповідний член пропорційний  $\varepsilon_1$  і є малим. З'ясуємо, за яких умов створене льодом пересичення дійсно залишається малим. Поряд з (22) розглянемо рівняння для пересичення над льодом:

$$\tau \dot{H} = -\left(nx^{\frac{1}{3}} + \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}}\right)H + nx^{\frac{1}{3}} \quad (32)$$

З (22) і (32) видно, що  $(-h)$  і  $H$  формально задовольняють рівняння однакового загального вигляду

$$\dot{u} = -\beta(t)u + F(t) \quad (33)$$

де  $F(t)$  і  $\beta(t)$  додатні. Його розв'язок можна записати у вигляді

$$u(t) = u(0)e^{-B(t,0)} + \int_0^t G(t,t')F(t')dt' \quad (34)$$

де  $B(t,t') = \int_{t'}^t \beta(\xi)d\xi$ ,  $t \geq t' \geq 0$ ;  $G(t,t') = \exp(-B(t,t'))$  – функція Гріна задачі Коші для рівняння (33),  $G(t,t') > 0$ . Отже, оскільки  $H(0) = 1, h(0) = 0$ , то  $(-h)$  і  $H$  додатні. Тобто  $h(t)$  завжди від'ємне, а  $H(t)$  і вологість  $q(t)$  знаходяться в межах  $0 < H(t) < 1, Q_s < q(t) < q_s$ .

Згідно з (23) концентрація крапель завжди зменшується, а оскільки у (24)  $h(t) < 0$ , то зменшується і їх об'єм, відповідно безрозмірна водність  $l' = nx$  також зменшується. Одночасно  $1 + h(t) = H(t) > 0$ , тому обидва доданки в правій частині (25) додатні, і об'єм льоду тільки зростає.

Щоб отримати оцінку для пересичення  $h(t)$ , зручно працювати з додатною величиною  $u = -h$  і рівнянням (22) у формі (34). Оскільки  $x(0) = 1, n(0) = 1, y(0) = 0$ , то на початку процесу внесок льоду в коефіцієнт  $\beta(t) = \tau^{-1}\left(nx^{\frac{1}{3}} + \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}}\right)$  є малим. Поки  $nx^{\frac{1}{3}} \gg \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}}$ , ним можна знехтувати. Тоді  $\beta(t) \approx \tau^{-1}nx^{\frac{1}{3}}$  монотонно спадає із часом. Одночасно  $F(t) = \tau^{-1}\varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}}$  – монотонно зростає. Звідси послідовно отримуємо:

$$B(t,t') \geq \beta(t)(t-t')$$

$$G(t,t') \leq \exp(-\beta(t)(t-t'))$$

Тоді з (34) маємо:

$$u(t) = \int_0^t G(t,t-\tilde{t})F(t-\tilde{t})d\tilde{t} \leq \int_0^t e^{-\beta(t)\tilde{t}}F(t-\tilde{t})d\tilde{t} \leq \bar{u}(t)$$

де  $\bar{u}(t) = F(t)/\beta(t)$  – розв'язок рівняння (33) в квазістаціонарному наближенні  $\dot{u} = 0$ . Ураховуючи, що пересичення від'ємне, остаточно отримуємо оцінку

$$\bar{h}(t) \leq h(t) < 0 \quad (35)$$

де  $\bar{h}(t)$  – розв'язок рівняння (22) в наближенні  $\tau = 0$

$$\bar{h}(t) = -\frac{\varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}}}{nx^{\frac{1}{3}}} \quad (36)$$

Отже, пересичення над водою залишається малим (за абсолютною величиною) поки  $nx^{\frac{1}{3}} \gg \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}}$ . Якщо домінує висихання крапель, і зменшується їх розмір без суттєвого падіння концентрації, то  $n \approx 1$  і  $h(t)$  залишається малим, поки об'єм краплі й водність не наблизяться до надзвичайно малих значень порядку  $nx \approx x \sim (\varepsilon_1)^3$ . Якщо ж домінує коагуляція, і зменшується концентрація крапель без суттєвого зменшення їх розміру, то  $x \approx 1$  і  $h(t)$  залишається малим, поки концентрація й водність не наблизяться до малих значень порядку  $nx \approx n \sim \varepsilon_1$ .

Таким чином, за реальних атмосферних умов пересичення у змішаній хмарі залишається малим порівняно з  $q_s - Q_s$ , поки вона залишається змішаною, тобто поки в хмарі залишається помітна кількість води. Достатньою умовою малості пересичення є малість величини (36).

#### Аналіз росту частинок льоду і його спрощене описання

Як показано вище, через малість параметра  $\varepsilon_1$  створене льодом пересичення над водою на стадії змішаної хмари залишається малим. У цьому розділі ми проаналізуємо спрощення, які виникають унаслідок цього, зосередивши увагу на найважливішому процесі росту льоду. Щоб явно виділити малий параметр, перейдемо від змінної  $h$  до змінної  $s$ , яка приймає додатні значення:

$$h = -\varepsilon_1 s \quad (37)$$

Якщо виключити водність  $px$  з рівняння (25) за допомогою закону збереження маси (26), рівняння для об'єму льоду набуде вигляду:

$$T_c \dot{y} = (1 - \varepsilon_1 s) \gamma y^{\frac{1}{3}} + (1 + \delta \varepsilon_1 s - y) y^{\frac{4}{3}} \quad (38)$$

Тут перший доданок у правій частині відповідає росту льоду шляхом конденсації пари, а другий – за рахунок коагуляції. У перший входить  $\varepsilon_1 s$  – пересичення в одиницях  $\Delta$ , яке, як показано вище, є малим на стадії змішаної хмари, і ним можна знехтувати. У другий доданок входить  $\delta \varepsilon_1 s$ ; з урахуванням (20) і (29) – це пересичення в одиницях  $l_s$ , яке може й не бути малим порівняно з одиницею за малих  $l_s$ , коли  $\delta \gg 1$ . Проте, як буде показано далі, у такому разі роль коагуляції не може бути визначальною, і навіть за таких умов члени порядку  $\varepsilon_1$  практично не впливають на ріст льоду. Знехтувавши у (38) доданками порядку  $\varepsilon_1$ , отримаємо спрощене рівняння для росту льоду, яке не пов'язане з іншими рівняннями вихідної системи:

$$T_c \frac{dy}{dt} = \gamma y^{\frac{1}{3}} + (1 - y) y^{\frac{4}{3}} \quad (39)$$

Якщо використати безрозмірний час, це рівняння міститиме єдиний параметр  $\gamma$  (30).

Проведемо аналіз цього рівняння. Воно може бути точно розв'язане аналітично, але розв'язок є громіздким. Залежно від  $\gamma$  можливі два крайні сценарії еволюції змішаної хмари, коли визначальними загалом є коагуляційні ( $\gamma \ll 1$ ), або конденсаційні ( $\gamma \gg 1$ ) процеси.

Якщо  $\gamma \gg 1$ , то в системі домінує конденсаційний ріст льоду, другий доданок у правій частині (39) є малим від початку і до кінця процесу (точка С на рис. 1). На стадії змішаної хмари лід росте завдяки висиханню крапель при майже незмінному їх числі; легко бачити, що квадрат радіуса частинок льоду росте лінійно із часом. У такому режимі льодність зростає до  $l_s$  за час  $T_d$  (табл.1). Після зникнення крапель ріст льоду продовжується вже на стадії льодяної хмари.

Коагуляційний сценарій росту льоду ( $\gamma \ll 1$ ) включає 4 етапи. Початковий етап  $0 < y < \gamma$  є конденсаційним у разі сталої вологості, перший доданок у правій частині (39) є більшим за другий. Коли  $y > \gamma$  починається етап індивідуаль-

ного коагуляційного росту (тепер другий доданок перевищує перший). Він переходить в етап швидкого коагуляційного росту (етап 3), коли  $y$  зростає настільки, що помітним стає зменшення водності через зростання об'єму льоду.

Етапи 1 і 2 протікають без помітної зміни розміру і числа крапель. На стадії швидкої коагуляції лід росте за рахунок швидкого падіння концентрації крапель. Швидкість коагуляційного росту максимальна за  $y \approx 0,5$ ; з наближенням у до одиниці, а водності до нуля (кругла дужка у (39)), швидкість коагуляції значно падає, і ріст льоду знову переходить у конденсаційний, але вже за рахунок падіння вологості; починається стадія льодяної хмари. Найважливіші характерні часи процесів і окремих етапів росту льоду зведено в табл.1.

На етапах 1 і 2 ( $\gamma \ll 1$ ) природно вимірювати у в одиницях  $\gamma$ , а множник  $1 - y$  можна покласти рівним одиниці, поки виконується умова  $y \ll 1$ . Тоді в записаному через змінну  $z = y/\gamma$  рівнянні (39) з'являється відповідний час  $t_d$  (табл.1):

$$t_d \frac{dz}{dt} = z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{4}{3}} \quad (40)$$

З'ясувати його фізичний зміст допомагає точний розв'язок рівняння (40). Зробивши заміну  $z = w^3$ , після інтегрування з початковою умовою  $w(0) = 0$  отримуємо:

$$t' = \frac{1}{2} \ln(w^2 - w + 1) - \ln(w + 1) + \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2w-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad (41)$$

де  $t' = t/t_d$ ,  $w = (y/\gamma)^{1/3}$ .

Розрахуємо час (в одиницях  $t_d$ ), що відповідає  $w = 1$ , тобто  $y = \gamma$ :

$$\lim_{w \rightarrow 1} t'(w) = -\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.12 \quad (42)$$

Він відповідає переходу від конденсаційного (етап 1) до індивідуального коагуляційного росту льоду (етап 2). Отже, моментом закінчення стадії переважно конденсаційного росту льоду можна вважати  $t \approx 1,1t_d$ .

Переходові до швидкої коагуляції відповідають порівняні з одиницею значення  $y$ , тобто великі  $w$ :  $w = (y/\gamma)^{1/3} \gg 1$ . Згідно з (41)  $w \rightarrow \infty$  за скінченний час, що є наслідком наближення

1 – у ≈ 1. Порівняння з точним розв'язком показує, що цей час приблизно відповідає закінченню етапу швидкої коагуляції (етап 3)

$$\lim_{w \rightarrow \infty} t'(w) = \frac{3\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.6 \quad (43)$$

Розв'язком (41) можна користуватись замість розв'язання диференціального рівняння (39) за умови  $u \ll 1$ .

Таблиця 1

Характерні часи процесів у змішаній хмарі

Час	Формули	Опис
$\tau$	$\varepsilon_1 \delta T_d$	$\frac{1}{4\pi D n_0} \left( \frac{4\pi \rho_w n_0}{3l_s} \right)^{\frac{1}{3}}$ Час конденсаційної релаксації вода-пара в точці А (рис. 1)
$T_c$	$\gamma T_d$	$\frac{4\rho_{ice}}{3l_s \alpha} \left( \frac{4\pi \rho_{ice} N}{3l_s} \right)^{\frac{1}{3}}$ Характерний час швидкої коагуляції ( $\gamma \ll 1$ )
$t_d$	$T_c / \gamma^{\frac{1}{3}}$	$\frac{4\rho_{ice}}{3l_s \alpha} \left( \frac{\alpha l_s}{D \Delta} \right)^{\frac{1}{3}}$ 1,1 $t_d$ – тривалість конденсаційного росту льоду і момент переходу до індивідуального коагуляційного росту (перехід етап 1 – етап 2, $\gamma \ll 1$ ); 3,6 $t_d$ – момент закінчення етапу швидкої коагуляції ( $\gamma \ll 1$ )
$T_d$		$\frac{l_s}{4\pi N D \Delta} \left( \frac{4\pi \rho_{ice} N}{3l_s} \right)^{\frac{1}{3}}$ Час росту льоду за рахунок висихання крапель за конденсаційного сценарію росту льоду ( $\gamma \gg 1$ ).

Для знаходження зміни об'єму льоду з часом у запропонованому наближенні по  $\varepsilon_1$  достатньо замість вихідної системи трьох взаємопов'язаних рівнянь розв'язати одне рівняння (39). Якщо ж необхідно знайти й інші параметри стану, то рівняння для інших величин також можна частково спростити, зберігаючи лише головні члени по  $\varepsilon_1$ . Рівняння (23) для концентрації крапель не змінюється, а об'єм крапель і пересичення знаходяться із рівнянь

$$x = (1 - y)/n \quad (44)$$

$$t \dot{h} = -n^{\frac{2}{3}}(1 - y)^{\frac{1}{3}}h - \varepsilon_1 y^{\frac{1}{3}} \quad (45)$$

**Площина початкових станів і чисельне моделювання**

Застосування результатів наведеного вище теоретичного аналізу на практиці вимагає прив'язки отриманих безрозмірних параметрів і характерних часів до реальних умов. Легко бачити, що за відсутності вертикальних рухів первинними керуючими параметрами для хмари, які визначають характерні часи і параметр  $\gamma$ , є початкова водність  $l_s$ , концентрація частинок льоду  $N$  і різниця вологостей насичення  $\Delta$ . Як видно із табл. 1 й означення параметра  $\gamma$  (30),

відповідні залежності є степеневими. Тому в площині параметрів «початкова водність – концентрація частинок льоду», відкладених у логарифмічному масштабі, лінії сталих значень характерних часів і параметра  $\gamma$  (рис. 2) є прямими. Вибрані на рис. 2 межі зміни водності й концентрації відповідають актуальним умовам в однорідних змішаних хмарах або холодних туманах.

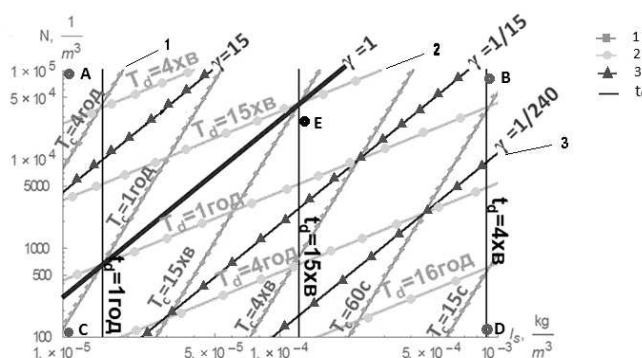


Рис. 2. Зміна характерних часів і параметра  $\gamma$  залежно від водності  $l_s$  і концентрації частинок льоду  $N$ ;  $T_c$  – лінії типу (1),  $T_d$  – лінії типу (2),  $\gamma$  – лінії типу (3),  $t_d$  – вертикальні прямі

Тут і надалі в чисельному моделюванні для розрахунків використано такі значення фіксо-



ваних параметрів: коефіцієнт дифузії  $D = 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , густина води  $\rho_w = 1 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , густина льоду  $\rho_{ice} = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , коефіцієнт у формулі (5):  $\alpha = 1,2 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1} \text{ м}^{-1}$ , різниця рівноважних вологостей насичення над водою та льодом  $\Delta = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/\text{м}^3$  – максимальна із можливих, що відповідає температурі близько  $-12^\circ\text{C}$ .

Точками  $A, B, C, D$  на рис. 2 позначено чотири екстремальні комбінації параметрів  $l_s$  і  $N$ , для яких проводилось чисельне моделювання еволюції стану хмари. Параметри, що відповідають відміченим на рисунку точкам, наведено

в табл. 2. У точках  $A$  і  $C$  час  $\tau = 55 \text{ с}$ , у точках  $B$  і  $D$  час  $\tau = 11 \text{ с}$ .

З рис. 2 і табл. 2 видно, що безрозмірні параметри системи, а також характерні часи та співвідношення між ними істотно змінюються в актуальній для практики частині площини параметрів  $l_s, N$  – на декілька порядків. Лівіше і вище від прямої  $\gamma = 1$  знаходиться область великих  $\gamma$ , а правіше і нижче – малих. Як показав наведений вище аналіз, у першій області має реалізуватися сценарій переважно конденсаційного росту льоду, а у другій – коагуляційного.

Таблиця 2

Значення параметрів для точок  $A, B, C, D, E$  (рис. 2)

Тчк.	$N, \text{м}^{-3}$	$l_s, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\varepsilon_1$	$\gamma$	$\delta$	$t_d, \text{с}$	$T_c, \text{с}$	$T_d, \text{с}$
$A$	$10^5$	$10^{-5}$	0,0480	$3,5 \cdot 10^2$	11,8	4770	33600	95,65
$B$	$10^5$	$10^{-3}$	0,0480	$3,5 \cdot 10^{-2}$	0,118	221	72	2060
$C$	$10^2$	$10^{-5}$	0,00048	$3,5 \cdot 10^{-1}$	11,8	4770	3360	9565
$D$	$10^2$	$10^{-3}$	0,00048	$3,5 \cdot 10^{-5}$	0,118	221	7,2	206100
$E$	$10^4$	$10^{-4}$	0,010	$3,5 \cdot 10^{-1}$	1,18	1027	725	2060

У чисельному моделюванні паралельно розв'язувались точна система рівнянь (22), (23), (25), (26) і наближена, що включає спрощене рівняння росту льоду (39) та рівняння (23) і (44), (45). Відповідні розв'язки представлено на рис. 3. Вони підтверджують задовільну точність запропонованого наближення по  $\varepsilon_1$  для змішаної хмари в усіх чотирьох випадках комбінацій екстремальних значень початкової водності і концентрації частинок льоду, наведених у табл. 2 (точки  $A, B, C, D$ ). Особливо це стосується росту об'єму льоду (криві 1). Із рис. 3 видно також, що пересичення над водою (відхилення  $H(t)$  від одиниці, криві 4 на рис. 3), дійсно залишається малим, допоки в хмарі є вода, що є основою запропонованого вище наближення. Причому точність наближення для об'єму льоду залишається високою, навіть тоді, коли ріст пересичення над водою стає помітним (рис. 3б, криві 1 і 4).

Типові картини двох протилежних сценаріїв еволюції стану змішаної хмари – конденсацій-

ного і коагуляційного – демонструють рис. 3а і рис. 3г. Перший стосується точки  $A$  з рис. 2, коли  $l_s$  найменше,  $N$  найбільше,  $\gamma$  найбільше, а другий – точки  $D$  з рис. 2, коли  $l_s$  найбільше,  $N$  найменше,  $\gamma$  найменше. На рис. 3а лід росте завдяки висиханню крапель (крива 2) за сталої їх концентрації (крива 3). Натомість, на рис. 3г добре видно різко виражений етап швидкої коагуляції з різким ростом об'єму льоду і симетричним падінням концентрації крапель (крива 3) за сталої їх об'єму (крива 2).

Коагуляційному сценарію відповідає і рис. 3б (точка  $B$  з рис. 2:  $l_s$  найбільше і  $N$  найбільше); через більше значення  $\gamma$  окремі етапи росту льоду розділені тут не так чітко, як для точки  $D$ . Для точок  $D$  і  $B$  вся вода перетворюється на лід приблизно за один і той же час (близько 700 с), оскільки тривалість стадії змішаної хмари визначається часом  $t_d$ , який не залежить від  $N$  (див. табл. 1).

Проміжній ситуації відповідає рис. 3в (точка  $C$  з рис. 2:  $l_s$  найменше і  $N$  найменше). Хоча  $\gamma$

тут менше одиниці, видно, що краплі висихають дещо швидше, ніж зменшується їх концентрація (криві 2 і 3 відповідно). Тобто для точки *C* конденсаційні процеси вже дещо переважають, а для точки *A* ця перевага виражена ще набагато сильніше. З рис. 3в і 3а видно, що перехід від *C* до *A* (тобто збільшення концентрації ядер льодоутворення від низької до високої за малої водності) супроводжується також різким скороченням часу, за який у хмарі зникає вода, приблизно в 100 разів. Напроти, з рис. 3г і 3б видно протилежне: для точок *D* і *B* (водність висока) вода зникає в хмарі приблизно за один і той же час,

близько 700 с. Таким чином, концентрація ядер льодоутворення сильно впливає на час співіснування води і льоду в хмарі у випадку низьких водностей і практично не впливає у випадку високих. Пояснюється це зміною сценарію еволюції змішаної хмари з конденсаційного на коагуляційний. Для першого час існування змішаної хмари визначається часом  $T_d$ , а для другого – часом  $t_d$ . Вони мають різний фізичний зміст – як видно з табл. 1, час  $T_d$  зменшується з ростом концентрації ядер як  $N^{-2/3}$ , а час  $t_d$  не залежить від  $N$ .

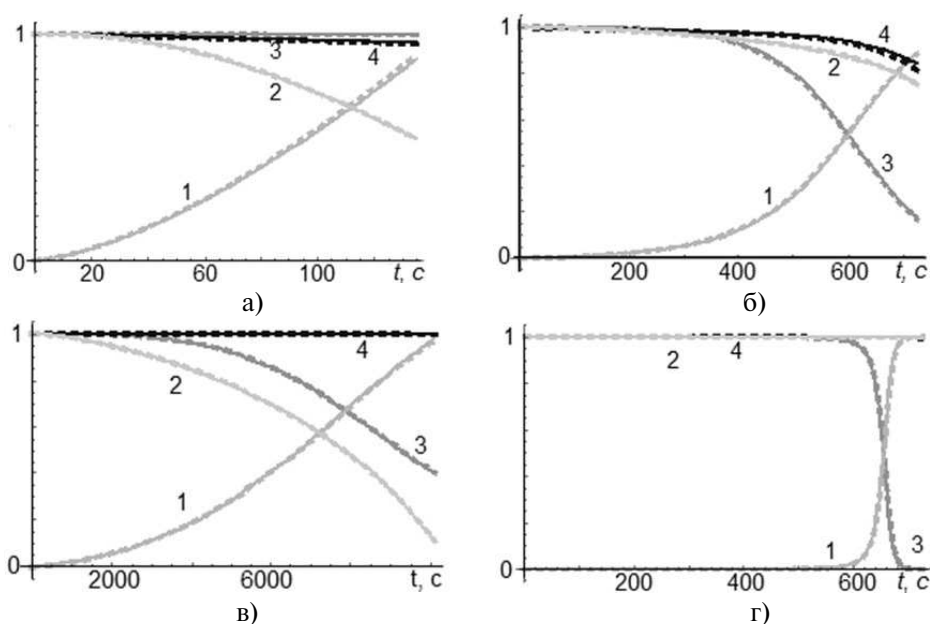


Рис. 3. Еволюція стану системи на стадії змішаної хмари згідно точної (суцільні лінії) і наближеної (штрихові лінії) систем рівнянь для комбінацій екстремальних значень водності і концентрації частинок льоду, характерних для реальних умов в атмосфері, що відповідають точкам *A* (а), *B* (б), *C* (в), *D* (г) (див. табл. 2). Криві відповідають безрозмірним змінним: 1 – об’єм льоду  $y(t)$ ; 2 – об’єм хмарних крапель  $x(t)$ ; 3 – концентрація крапель  $n(t)$ ; 4 – пересичення над льодом  $H(t)$ .

### Обговорення

Оскільки вологість насичення над льодом менша, ніж над водою, після активації ядер льодоутворення частинки льоду починають рости; лід порушує рівновагу між парою і хмарними краплями, яка існувала на момент активації. У результаті вологість, розмір та концентрація хмарних крапель також починають змінюватись. Частинки льоду ростуть унаслідок двох процесів: конденсації пари на поверхні льоду і коагуляції (збору нерухомих хмарних крапель части-

нками льоду, що рухаються під дією тяжіння). У роботі продемонстровано, що різні комбінації можливих в атмосфері умов приводять до різноманіття варіантів поведінки системи, які потребують адекватного відображення в моделях прогнозу погоди.

У результаті проведеного в роботі аналізу виявлено ряд фізичних особливостей, що стосуються еволюції стану хмари. Показано, що в безрозмірних змінних система у вибраній моделі характеризується трьома безрозмірними вхід-

ними параметрами, позначеними як  $\gamma$ ,  $\delta$  і  $\varepsilon_1$ , причому параметр  $\varepsilon_1$  (31) є малим за реальних умов. Це спрощує взаємозв'язки між параметрами стану системи вода-пара-лід. Навіть за найнесприятливіших комбінацій вхідних параметрів хмари пересичення над водою залишається малим і практично не впливає на баланс маси, поки в хмарі залишається вода, тобто поки хмара залишається змішаною. Одночасно пересичення над льодом залишається практично сталим.

Це дозволяє значно спростити описання змін параметрів стану в часі за практично цікавих умов, що і є головною метою роботи. Зокрема, ріст маси льоду може бути описаний одним рівнянням першого порядку (39) з єдиним параметром  $\gamma$  (30); інші параметри стану можуть бути знайдені окремо з рівнянь (23), (44), (45). Задовільну точність такого описання доведено теоретично і підтверджено чисельним моделюванням для широкого діапазону комбінацій параметрів хмари.

У всіх випадках хмара послідовно проходить дві стадії, змішаної й льодяної хмари, коли ріст льоду відбувається відповідно в результаті падіння водності або в результаті падіння вологості до насиченої над льодом. При цьому існують два граничні сценарії еволюції стану залежно від  $\gamma$ . За умови  $\gamma \gg 1$  конденсаційні процеси домінують над коагуляційними, частинки льоду ростуть за рахунок висихання крапель майже без падіння їх концентрації. За умови  $\gamma \ll 1$  коагуляційні процеси в цілому домінують над конденсаційними, а ріст льоду проходить чотири етапи (початковий конденсаційний ріст, індивідуальний коагуляційний ріст частинок льоду без зміни концентрації крапель, швидка коагуляція з поглинанням крапель льодом, конденсаційний ріст на стадії льодяної хмари в зв'язку із зменшенням вологості). При цьому процесам у хмарі властива низка характерних часів, визначених у цій роботі (табл. 1).

Для розв'язків отриманих наближених рівнянь можна побудувати в майбутньому нескладні аналітичні наближення й апроксимації, які перекриватимуть усі цікаві з практичного боку значення параметрів. Частково це вже зроблено

(див. розв'язок (41)). Таким чином, відкривається можливість повністю уникнути чисельного розв'язання диференціальних рівнянь.

Коректне застосування отриманих у роботі результатів потребує уважного врахування обмежень моделі. Зокрема, у майбутньому необхідно врахувати обмеження, пов'язані з переміщенням частинок льоду [6, 10] та скінченними розмірами хмари і кроком прогностичної моделі по висоті й по часу. Необхідно також дослідити вплив розподілу крапель за початковими розмірами [4, 5, 20, 22] та вплив висхідних рухів повітря на ріст льоду [4, 12].

### Висновки

Детальний фізичний аналіз процесів конденсації та коагуляції в змішаній хмарі або холодному тумані дозволив сформулювати кількісний критерій (параметр  $\gamma$ ), за яким можна розрізняти ці два типи процесів хмаро- та опадоутворення. Залежно від значень  $\gamma$  можливі два крайні сценарії еволюції змішаної хмари, коли визначальними загалом є конденсаційні ( $\gamma \gg 1$ ), або коагуляційні ( $\gamma \ll 1$ ) процеси. Як теоретично, так і чисельним моделюванням показано, що за коагуляційного сценарію ріст льоду проходить чотири етапи: початковий конденсаційний ріст, індивідуальний коагуляційний ріст частинок льоду без зміни концентрації крапель, швидка коагуляція з поглинанням крапель льодом та конденсаційний ріст на стадії льодяної хмари в результаті зменшення вологості.

Приведена в цій роботі спрощена модель змішаної хмари/холодного туману дозволяє оцінити часові інтервали кожного з мікрофізичних процесів у системі водяна пара/краплі/кристали льоду залежно від температури повітря, водності, кількості крапель та кількості активованих ядер льодоутворення.

Запропоновані спрощені рівняння, характерні часи окремих етапів росту льоду, безрозмірні параметри, які визначають можливі сценарії еволюції змішаної хмари, відкривають перспективу створення нових науково обґрунтованих параметризацій мікрофізичних процесів у змішаних хмарах для сучасних моделей прогнозу погоди.

\* \*

1. Буйков М.В., Пірнач А.М. Моделирование распространения искусственной кристаллизации в смешанных слоистообразных облаках // Тр. УкрНИГМИ. — 1984. — Вып. 203. — С. 3-16.
2. Краковська С.В., Пірнач Г.М., Дюкель Г.О. Дослідження процесів льодоутворення у змішаних хмарах холодного півріччя над Україною // Наук. пр. УкрНДГМІ. — 2007. — Вип. 256. — С. 53-75.
3. Краковська С.В., Г.М. Пірнач. Мезомасштабні та мікрофізичні властивості смуг хмар та опадів фронтальної системи циклону вибухового поглиблення над антарктичним півостровом // Український антарктичний журнал. — 2003. — №1. — С. 85-92.
4. Пірнач Г. М. Чисельне моделювання хмар та опадів у системах атмосферних фронтів / Г. М. Пірнач. — К.: Ніка-Центр, 2008. — 295 с.
5. Curry J.A., and V.I.Khvorostyanov. Assessment of some parameterizations of heterogeneous ice nucleation in cloud and climate models // J. Atmos. Chem. Phys. — 2012. — Vol. 12. — P. 1151-1172.
6. Dudhia, J., S.-Y. Hong, and K.-S. Lim. A new method for representing mixed-phase particle fall speeds in bulk microphysics parameterizations // J. Met. Soc. Japan. — 2008. — Vol. 86A. — P. 33-44.
7. Khain, A.P., Ovtchinnikov, M., Pinsky, M., Pokrovsky, A., Krugliak, H. Notes on the state-of-the-art numerical modeling of cloud microphysics // Atmos. Res. — 2000. — Vol. 55. — P. 159-224.
8. Khotyayintsev V., R. Bardakov, S. Krakovska. Numerically efficient description of homogeneous mixed cloud microphysics // Workshop on Eulerian vs. Lagrangian methods for cloud microphysics, Warsaw, Poland. — 2015. Режим доступу до ресурсу: [http://foss.igf.fuw.edu.pl/workshop\\_2015/talks/Khotyayintsev.pdf](http://foss.igf.fuw.edu.pl/workshop_2015/talks/Khotyayintsev.pdf).
9. Khotyayintsev V., R. Bardakov, S. Krakovska. Towards improving parameterizations of mixed stratus cloud/fog formation in climate models and NWP // Symposium on Coupled Chemistry-Meteorology/Climate Modelling, WMO Headquarters, Geneva, Switzerland. — 2015. — Режим доступу до ресурсу: [http://www.eumetchem.info/images/meetings/ccmm/Session\\_2/Krakovska\\_Towards%20improving%20parameterizations%20of%20mixed%20stratus%20cloud.pdf](http://www.eumetchem.info/images/meetings/ccmm/Session_2/Krakovska_Towards%20improving%20parameterizations%20of%20mixed%20stratus%20cloud.pdf).
10. Khvorostyanov, V.I., and J.A. Curry. Terminal velocities of droplets and crystals: power laws with continuous parameters over the size spectrum // J. Atmos. Sci. — 2002. — Vol. 59. — P. 1872-1884.
11. Korolev, A.V., and I.P. Mazin. Supersaturation of water vapor in clouds. Journal of the Atmospheric Sciences 60.24 (2003): 2957-2974.
12. Korolev, A.V., and P.R. Field. The effect of dynamics on mixed-phase clouds: Theoretical considerations. Journal of the Atmospheric Sciences 65.1 (2008): 66-86.
13. Krakovska, S., Brenguier, J.-L., Geoffroy, O., Sandu, I. Tests of the bulk cloud microphysics parameterizations in the detailed explicit cloud model // Geophysical Research Abstracts, Vol. 9. — 2007. — 00217. — SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU2007-A-00217.
14. Krakovskaia, S.V. and A.M. Pirnach. Theoretical study of the microphysical structure of mixed stratiform frontal clouds and their precipitation // Atmos. Res. — 1998. — Vol. 47-48. — P. 491-503.
15. Lin, Y.-L., R. D. Farley, and H. D. Orville. Bulk parameterization of the snow field in a cloud model // J. Climate Appl. Meteor. — 1983. — Vol. 22. — P. 1065-1092.
16. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases. The Scientific Papers of J. C. Maxwell. — 1965. — Vol. 2. — P. 26-78.
17. Morrison, H., J.A. Curry, V.I. Khvorostyanov. A new double-moment microphysics parameterization for application in cloud and climate models. Part 1: Description // J. Atmos. Sci. — 2005. — Vol. 62 (6). — P. 1665-1677.
18. Pirnach, A.M. and S.V. Krakovskaya. Numerical studies of dynamics and cloud microphysics of the frontal rainbands // Atmos. Res. — 1994. — Vol. 33. — P. 333-365.
19. Pruppacher, H.R. and J.D. Klett. Microphysics of clouds and precipitation. — Kluwer. — 1997. — 954 p.
20. Seifert, A., A. Khain, A. Pokrovsky, and K. D. Beheng. A comparison of spectral bin and two-moment bulk mixed-phase cloud microphysics // Atmos. Res. — 2006. — Vol. 80. — P. 46-66.
21. Tao, W.-K., J. Simpson, and M. McCumber. An ice-water saturation adjustment // Mon. Wea. Rev. — 1989. — Vol. 117. — P. 231-235.
22. Thompson, G., P. R. Field, R. M. Rasmussen and W. D. Hall. Explicit Forecasts of Winter Precipitation Using an Improved Bulk Microphysics Scheme. Part II: Implementation of a New Snow Parameterization // Mon. Wea. Rev. — 2008. — Vol. 136. — P. 5095-5115.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Український гідрометеорологічний інститут, Київ

V.M. Khotyayintsev, R.V. Bardakov, S.V. Krakovska, V.M. Shpyg

#### Evolution of mixed cloud: ice particle growth

*The paper deals with theoretical analysis of the evolution of mixed clouds or cold fog from the moment of ice nuclei activation until complete crystallization. The simplest model that includes both supercooled cloud droplets and particles of ice of the same size as well as water vapor is used. The dimensionless input parameters of cloud were obtained. The main scenario and the stages of its evolution are singled out. The peculiarities of microphysical processes at each stage were shown. The appropriate characteristic times and the size of the particles were been calculated. The original approximations based on the physical results which in the future may serve as a basis for new scientifically substantiated and numerically efficient parameterizations of microphysical processes in the mixed clouds for modern weather forecasting models, are proposed. The relevance of theoretical analysis is confirmed by numerical modeling for a wide range of combinations of possible conditions in the atmosphere.*

**Keywords:** mixed cloud, ice formation, parameterization, condensation and coagulation processes in the cloud

**В.М. Хотяинцев, Р.В. Бардаков, С.В. Краковская, В.М. Шпиг**

#### **Эволюция смешанного облака: рост частиц льда**

*В данной работе выполнен теоретический анализ эволюции смешанного облака или холодного тумана с момента активации ядер льдообразования до полной кристаллизации. Использована максимально простая модель, которая включает переохлажденные облачные капли одинакового размера, частицы льда одинакового размера и водяной пар. Получены безразмерные входные параметры облака, выделены основные сценарии и этапы её эволюции, показаны особенности развития микрофизических процессов на каждом из этапов, вычислены*

*соответствующие характерные времена и размеры частиц. На основе полученных физических результатов предложены оригинальные приближения, которые в перспективе могут послужить основой для создания новых научно обоснованных и численно эффективных параметризаций микрофизических процессов в смешанных облаках для современных моделей прогноза погоды. Обоснованность теоретического анализа подтверждена численным моделированием для широкого диапазона комбинаций реально возможных условий в атмосфере.*

**Ключевые слова:** смешанное облако, льдообразование, параметризация, процессы конденсации и коагуляции

УДК 551.583

**В.Ф. Мартазинова, Е.К. Иванова, А.А. Щеглов**

## **ТЕНДЕНЦИЯ СОВРЕМЕННОГО ТЕМПЕРАТУРНО-ВЛАЖНОСТНОГО РЕЖИМА УКРАИНЫ К АНОМАЛЬНОСТИ ЗА СЧЕТ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛЕТНИЙ СЕЗОН**

Проведено сравнение температурно-влажностного режима последних десятилетий на территории Украины с предшествующими годами. Внимание заострено на состоянии современного температурно-влажностного режима территории Украины в условиях нового характера глобальной температуры воздуха и состояния крупномасштабной атмосферной циркуляции начала XXI века. Указано на тенденцию к сухим и знойным процессам в летний сезон.

**Ключевые слова:** температурно-влажностный режим, крупномасштабная циркуляция атмосферы, синоптические процессы.

#### **Введение**

За последние 20 лет на территории Европы отмечались засухи и сильные наводнения, связанные с экстремальными или длительными осадками. В докладе руководителя блока по изменению климата на заседании Европейской Комиссии в августе 2015 г. было отмечено: «Европа — это та территория, где мы ожидаем более экстремальные погодные условия (наводнения и засухи) в будущем, их мы постепенно начинаем видеть и в настоящее время». Растущее число исследований указывает на наличие существенных тенденций к увеличению экстремальных осадков в Европе в течение последних десятилетий [1-10]. Они привели к таким крупным наводнениям в Европе, как наводнение весной 2010 г. в Польше, в мае 2008 г. в Германии и Франции, в июле 2008 г. в

Украине и Румынии, летом 2007 г. в Великобритании и к многочисленным наводнениям (<http://www.ecad.eu/events/selectevents.php>) в ноябре 2011 г. в Генуе (Италия). Также в последние годы на большей части европейского континента в результате продолжительных периодов с очень высокими температурами и недостатком осадков отмечаются сильные засухи, например, летом 2003 г., а также в июне-августе 2015 года [1].

Нередко эти события, связанные с экстремальными аномальными осадками, порождают вопрос — «Является ли характер осадков более экстремальным в последние годы по сравнению с предыдущими десятилетиями?» Некоторые исследователи отмечают, например, что зимой, весной и осенью в Северной Европе намечается тенденция к увеличению осадков, а в летнее вре-