УДК 517.5:330.341

Янковой В.А.,
к.э.н.,
доцент кафедры экономики и планирования бизнеса,
Одесский национальный экономический университет

ПРИМЕНЕНИЕ CES-ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫХ С НЕЮ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Аннотация. В статье обсуждаются теоретические и практические вопросы использования производственных функций, обобщенных функцией с постоянной эластичностью замещения, в процессе моделирования выпуска продукции в зависимости от важнейших факторов – капитала и труда, представленных в стоимостном выражении.

Ключевые слова: производственная функция, эластичность замещения ресурсов, оценка параметров, оптимальная фондовооруженность.

Постановка проблемы. Среди производственных функций (ПФ), применяемых при моделирования показателей хозяйственной деятельности на всех уровнях управления, наиболее агрегированными являются двухфакторные модели, описывающие зависимость объема выпущенной продукции *Y* от средней годовой стоимости основных производственных фондов (*K*) и затрат на оплату труда (*L*). При этом можно указать, по крайней мере, четыре двухфакторные ПФ, которые наиболее популярны в экономических исследованиях и взаимосвязаны между собой: функция с постоянной эластичностью замещения или *CES*-функция (от англ. аббревиатуры *Constant Elasticity of Substitution*), функции Кобба-Дугласа, линейная и Леонтьева.

CES-функция представляется следующим образом:

$$Y = A_0[A_1K^{-p} + (1 - A_1)L^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}, \qquad (1)$$

где A_0 – коэффициент шкалы ($0 < A_0$); A_1 – весовой коэффициент производственного фактора ($0 < A_1 < 1$); p – параметр ПФ ($-1 < p$); γ – показатель степени однородности ПФ ($0 < \gamma$).

ПФ (1) используется для описания пространственной вариации переменных *Y, K, L*. В случае временной вариации этих переменных *CES*-функция несколько трансформируется (динамизируется):

$$Y = A_0e^{\lambda t}[A_1K^{-p} + (1 - A_1)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

Тут предполагается, что $\gamma = 1$, т.е. ПФ (2) является линейно однородной, а также вводится дополнительный фактор – так называемый нейтральный научно-технический прогресс с неизвестным средним темпом прироста λ, который отражает влияние на *Y* всех факторов, кроме *K, L* (*t* – переменная времени, которая принимает значения 1, 2, …, *N*).

ПФ (1) была разработана К. Эрроу, Г. Чинери, Б. Минхасом и Р. Солоу в 1961 г. [1]. В своей статье авторы CES-функции обратились к анализу эластичности ПФ. Использовавшиеся в то время ПФ предполагали, что эластичность замещения факторов σ принимает фиксированное числовое значение. Они отметили, что такого рода ограничения являются слишком жесткими, не отвечающими реальной экономической действительности.

Указанный аргумент явился решающим мотивом для обобщения трех существующих ПФ (Кобба-Дугласа, линейной и Леонтьева) в форме ПФ (1), у которой эластичность замещения также постоянна, но может принимать любые значения согласно следующей формуле:

$$\sigma = 1/(1 + p). \qquad (3)$$

При $p \to 0$ *CES*-функция превращается в ПФ Кобба-Дугласа ($\sigma = 1$), при $p \to -1$ ПФ (1) стремится к линейной функции ($\sigma = \infty$), при $p \to \infty$ *CES*-функция приближается к функции Леонтьева ($\sigma = 0$). Однако методологические аспекты выбора адекватной модели, описывающей влияние факторов *K, L* на результаты производства *Y,* исходя из свойств указанных четырех ПФ, разработаны недостаточно. Не существует вразумительного объяснения, почему ПФ Кобба-Дугласа в настоящее время получила наибольшее распространение в практике моделирования производственных процессов.

Анализ последних исследований и публикаций. Среди авторов, которые занимались в последнее время исследованием применения ПФ, обобщенных *CES*-функцией, необходимо отметить работы А. Артемовой [2], Д. Боровского [3], М. Казаковой [4], В. Подладчикова [5], С. Шумской [6] и др. Некоторые аспекты рассматриваемой проблемы встречаются в публикациях по микроэкономике [7; 8]. Однако системный подход к ее решению в современной экономико-математической литературе отсутствует.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы. До сих пор не проведен комплексный сравнительный анализ достоинств и недостатков семейства ПФ, обобщенных *CES*-функцией, не выделены их важнейшие экономические характеристики, не акцентировано внимание исследователей на существующие статистические критерии выбора между ПФ (1) и функцией Кобба-Дугласа, между ПФ Кобба-Дугласа и линейной функцией. Кроме того, в литературе отсутствует представление о наличии специального программного обеспечения для расчета неизвестных параметров *CES*-функции.

Цель статьи состоит в том, чтобы ознакомить широкий круг экономистов с возможностями математико-статистического моделирования существующих объективных связей между основными производственными факторами и выпуском продукции на базе *CES*-функции и связанных с нею ПФ, проиллюстрировать их на конкретном примере отечественного предприятия пищевой промышленности.

Изложение основного материала. Прежде всего, обсудим экономико-математические свойства четырех взаимосвязанных двухфакторных ПФ, которые определяют их практическое применение в экономических исследованиях. Начнем с рассмотрения функции Леонтьева:

$$Y = \min\left(\frac{K}{c_1}; \frac{L}{c_2}\right), \qquad (4)$$

где c_1, c_2 – удельные расходы соответствующего ресурса.

Вследствие полного отсутствия замещения ресурсов ($\sigma = 0$) ПФ (4) для производства определенного объема продукции Y имеет установленные коэффициенты технологии в виде заданного уровня фондовооруженности $K/L = c_1/c_2$. Классическим примером подобной технологии является копание рва, для которого необходим один рабочий и одна лопата. Чтобы ускорить копание, надо пропорционально увеличить и количество рабочих, и количество лопат, поскольку $K/L = const$. Либо перейти к новой технологии, основанной на механизации ручного труда. Увеличение лишь одного фактора, например, количества лопат, не повысит результаты работы при данной технологии.

Очевидно, что указанное экономико-математическое свойство функции Леонтьева определяет сферу ее практического использования: она может успешно применяться для моделирования строго детерминированных технологий, не допускающих отклонения от установленных удельных нормативов расхода производственных ресурсов. Как правило, ПФ (4) используется для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных экономических объектов. Что же касается уровня предприятия, отрасли, региона и всего народного хозяйства страны, то здесь функция Леонтьева фактически не применяется. Поэтому в данной статье основное внимание будет уделено практическому использованию линейной функции, ПФ Кобба-Дугласа и *CES*-функции.

Линейная функция представляется так:

$$Y - A_2 = A_3K + A_4L, \qquad (5)$$

где A_2 – свободный член; A_3, A_4 – предельные продукты соответствующих факторов ($0 \le A_3$, $0 \le A_4$).

Динамизированная линейная функция имеет следующий вид:

$$Y - A_2 = \lambda_1 t + A_3K + A_4L. \qquad (6)$$

Поскольку линейная функция аддитивна, то λ_1 здесь представляет собой средний годовой абсолютный прирост Y за счет всех факторов, кроме K, L. Оценка неизвестных коэффициентов линейной функции по методу наименьших квадратов не вызывает трудностей, поскольку она осуществляется на основе стандартных программ регрессионного анализа, например, в редакторе Excel.

Вследствие бесконечной эластичности замещения ($\sigma = \infty$) основное свойство ПФ (5), (6) состоит в том, что любой выпуск продукции Y обеспечивается даже при нулевых затратах одного из факторов. Поэтому линейную функцию целесообразно использовать при моделировании производства, когда один из факторов не влияет на его результаты, например, находится в избытке.

Разделив обе части выражения (5) на L, можно проанализировать характер зависимости производительности труда Y/L от фондовооруженности K/L:

$$Y/L - A_2/L = A_3K/L + A_4\,. \qquad (7)$$

Очевидно, что в рамках линейной функции в случае $K/L \to \infty$ при любых допустимых значениях ее коэффициентов производительность труда также стремится в бесконечность. В обозримой перспективе это довольно спорное экономическое утверждение.

ПФ Кобба-Дугласа записывается так:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (8)$$

где A – коэффициент шкалы ($0 < A$); α, β – параметры ПФ ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$).

Динамизированный аналог ПФ (8) известен под названием ПФ Кобба-Дугласа-Тинбергена:

$$Y = Ae^{\lambda t}K^{\alpha}L^{\beta}. \qquad (9)$$

Эластичность замещения ПФ (8), (9) $\sigma = 1$ означает, что при заданном выпуске продукции Y увеличение одного из производственных факторов на 1% обеспечивает снижение другого фактора также на 1% и, наоборот. В реальной экономической действительности данное соотношение часто не выполняется. Кроме того, легко показать, что для ПФ Кобба-Дугласа характер зависимости производительности труда Y/L от фондовооруженности K/L аналогичен линейной функции.

Путем логарифмирования левой и правой частей (8), (9) ПФ Кобба-Дугласа преобразуется в линейную функцию с возможностью дальнейшего применения стандартной программы «Регрессия» для расчета ее неизвестных параметров.

Сравнительный анализ показывает, что экономико-математические свойства *CES*-функции обеспечивают ей явные преимущества по сравнению с линейной ПФ и функцией Кобба-Дугласа. Величина σ для нее может принимать любые постоянные значения, что в большей степени отвечает условиям производства в каждом конкретном случае. Как показано в работах [5; 7], при $0 < p$ ПФ (1), (2) в условиях $K/L \to \infty$ ограничены сверху, а при $p \le 0$ они ведут себя аналогично линейной функции и ПФ Кобба-Дугласа.

Считается, что ПФ (1), (2) целесообразно использовать в качестве инструментов моделирования производства, когда есть основания полагать, что уровень замещения факторов существенно не варьирует при изменении объемов привлеченных ресурсов, т.е. когда применяемая технология устойчива в смысле определенных значений фондовооруженности. *CES*-функция может использоваться при моделировании производственных систем любого уровня.

Однако, существует одно важное обстоятельство, которое делает *CES*-функцию редким гостем в современных экономических исследованиях. Дело в том, что ПФ (1), (2) привести к линейному виду принципиально невозможно, поэтому для оценки их неизвестных коэффициентов необходимо использовать приближенные методы расчета, что требует наличия специального программного обеспечения. Именно относительная простота определения неизвестных коэффициентов ПФ Кобба-Дугласа является ее основным преимуществом по сравнению с *CES*-функцией. Этот факт обусловливает исключительную популярность ПФ (8), (9) в эконометрии.

Рассмотрим теперь существующие статистические критерии, позволяющие в каждом конкретном исследовании объективно обосновать выбор между *CES*-функцией и ПФ Кобба-Дугласа, между ПФ Кобба-Дугласа и линейной функцией. Поскольку ПФ Кобба-Дугласа путем логарифмирования левой и правой частей легко преобразуется в линейную функцию, то ее сравнение с ПФ (5) не вызывает особых трудностей. Предпочтение следует отдать той линейной функции, которая удовлетворяет следующее требование: коэффициент детерминации $R2$ принимает максимальное значение при статистической значимости всех оцененных параметров регрессии. Значительно сложнее представляется выбор между ПФ Кобба-Дугласа и *CES*-функции.

Следуя Дж. Кменте [9], Р. Винн и К. Холден [10, с. 84-85] разделили левую и правую части формулы (1) на L, прологарифмировав рифмировали найденные результаты и разложили один из элементов полученной *CES*-функции в ряд Тейлора. Они показали, что по сути различия между ПФ (1) и ПФ Кобба-Дугласа сводятся к четвертому слагаемому, стоящему в правой части преобразованной ПФ (1):

$$\ln(Y/L) = C + D\ln L + E\ln(K/L) - M[\ln(K/L)]^2. \qquad (10)$$

Здесь *C, D, E, M* – определенные коэффициенты, которые выражаются через исходные параметры исследуемых ПФ. При этом если $p = 0$, то $M = 0$ и эти функции полностью совпадают, т. е. происходит переход от ПФ (1) к ПФ (8). Проверка статистической надежности (значимости) коэффициента M в модели (10) с помощью t-критерия Стьюдента может служить объективным основанием для выбора конкретной математической формы из двух рассмотренных ПФ. При этом в качестве нулевой гипотезы выступает $H0$: $M = 0$, против альтернативы $H_{a.}$: $M \neq 0$.

Обсудим теперь существующие возможности приближенной оценки неизвестных параметров *CES*-функции. М. Кубинива и др., используя подход *Кменты* в качестве инструмента нахождения первоначальной оценки параметров ПФ (2), разработали процедуру поиска решения поставленной задачи с заданной точностью на базе использования итеративного алгоритма минимизации целевой функции остатков модели по методу Марквардта. Она нашла свое воплощение в программе MACRO6, написанной на языке Бейсик [11, с. 137–149], которая достаточно легко адаптируется к современному программному обеспечению с помощью макросов редактора *Excel*.

Проиллюстрируем указанную процедуру на примере статистической отчетности частного мясоперерабатывающего предприятия «Гармаш» по данным за 2005–2015 гг. (таблица 1). Здесь Y обозначает объем реализованной продукции предприятия.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования динамики реализованной продукции ЧП «Гармаш»

Годы	Y, тыс. грн.	K, тыс. грн.	L, тыс. грн.	t	K / L
2005	14820	13978	851	1	16,42538
2006	23439	14690	1401	2	10,48537
2007	40538	17644,5	2409	3	7,324408
2008	46790	23492,5	2839	4	8,274921
2009	42603	26834	3502	5	7,662479
2010	43214	30933	4913	6	6,296153
2011	53988	36957	7940	7	4,654534
2012	68049	37001,5	9202	8	4,021028
2013	67577	38113	8959	9	4,254158
2014	60321	42575	9591	10	4,439057
2015	66149	49128	8293	11	5,924032

Разработано автором

В результате логарифмирования исходных данных и построения модели (10) получено следующее значение t-статистики Стьюдента для коэффициента M: -2,369; p-значение 0,049. Поскольку p-значение $0{,}049 < 0{,}050$, то нулевая гипотеза H_0: $M = 0$ отклоняется. Следовательно, с достоверностью (1 – p-значение) = 1 - 0,049 = 0,951 или 95,1% можно утверждать, что коэффициент M модели (10) является статистически значимым, надежным. Поэтому приходим к выводу, что эмпирические данные, характеризующие динамику реализованной продукции ЧП «Гармаш», будут точнее смоделированы на базе *CES*-функции.

Построим *CES*-функцию (2) в явном виде, которая моделирует зависимость реализованной продукции предприятия от капитала и труда с учетом нейтрального научно-технического прогресса. На шестой итерации было получено оптимальное решение (таблица 2).

Таблица 2

Результаты моделирования ПФ (2)

Константа A_0	0,695057496
Темп прироста НТП λ	0,036406882
Эластичность замещения σ	1,119975315
Весовой коэффициент A_1	0,602481383
Стандартная ошибка A_0	0,072653509
Стандартная ошибка λ	0,010552778
Стандартная ошибка σ	0,512748173
Стандартная ошибка A_1	0,089507862
Скорректированный коэффициент детерминации R^2	0,999661768
Сумма квадратов регрессионных остатков *RSS*	0,000310241
Коэффициент Дарбина-Уотсона *DW*	2,279238999

Рассчитано автором

Таким образом, искомая *CES*-функция запишется так:

$$Y = 0{,}6951e^{0{,}0364t}[0{,}6025K^{0{,}1071} + 0{,}3975L^{0{,}1071}]^{9{,}3350}. \qquad (11)$$

Здесь параметр модели p найден по формуле (3) с учетом оцененного значения $\sigma = 1{,}11997$. Уравнение (11) достаточно точно описывает динамику реализованной продукции на ЧП «Гармаш»: коэффициент детерминации R^2 показывает, что 99,97% вариации реализованной продукции предприятия описывается построенной моделью; сумма квадратов остатков уравнения достаточно мала (0,0003); значение критерия Дарбина-Уотсона (2,28) не слишком отличается от оптимального (2,0).

Величина темпа прироста нейтрального научно-технического прогресса $\lambda = 0{,}0364$ показывает, что на исследуемом предприятии в среднем за год реализация возрастала на 3,64% под влиянием всех факторов, кроме изменения капитала и труда.

Как показано в работе [12], для *CES*-функции существует оптимальная фондовооруженность $(K / L)^*$, которая максимизирует выпуск реализованной продукции:

$$(K / L)^* = \left(\frac{A_1}{1 - A_1}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}; \;\; Y_{\max} = A_0 e^{\lambda t} L(1 - A_1)^{-\frac{1}{p}}[(K / L)^* + 1]^{-\frac{1}{p}}. \qquad (12)$$

На основе параметров модели (11) рассчитаем показатель оптимальной фондовооруженности по первой формуле (12) для ЧП «Гармаш»:

$$(K / L)^* = \left(\frac{0{,}6025}{1 - 0{,}6025}\right)^{\frac{1}{1+0{,}1071}} = 1{,}5931.$$

Если обратиться к данным последнего столбца табл. 1, то можно увидеть, что фактическая фондовооруженность на предприятии существенно превышает оптимальную. Это означает, что производственные фонды на предприятия находятся в избытке. Данный вывод подтвердила и построенная ПФ Кобба-Дугласа: коэффициент при переменной ln(K) оказался статистически незначимым (критерий Стьюдента равен -0,358, p-значимость 0,73).

Ближайшее к оптимальному фактическое значение фондовооруженности (4,021) наблюдалось в 2012 г. (см. табл. 1). И в этом же году ЧП «Гармаш» действительно получило максимальную за исследуемый период реализованную продукцию 68049 тыс. грн. Возникает вопрос: какую выручку от реализации предприятие получило бы в 2012 г. при оптимальной фондовооруженности 1,5931? Чтобы ответить на него, воспользуемся второй из формул (12):

$$Y_{\max} = 0{,}6951 \times 2{,}718282^{0{,}0364 \times 8} 9202(1 - 0{,}6025)^{9{,}335}[1{,}5931 + 1]^{9{,}335} =$$
$$= 70446{,}33 \quad \textit{тыс.} \quad \textit{грн.}$$

Итак, резерв роста реализованной продукции за счет оптимизации фондовооруженности (например, продажи части неиспользованных производственных фондов и вложения средств в рабочую силу) составляет на предприятии 70446 - 68049 = 2397 тыс. грн.

Выводы. *CES*-функция по ряду важных экономико-математических свойств превосходит ПФ Кобба-Дугласа и линейную функцию, однако ее использование на практике обычно сдерживается отсутствием надлежащего программного обеспечения. Проверка статистической значимости коэффициента M в модели (10) с помощью t-критерия Стьюдента может служить надежной основой для объективного выбора конкретной формы из рассмотренных ПФ. Расчет неизвестных параметров *CES*-функции уместно вести на базе итеративного алгоритма минимизации целевой функции остатков модели по методу Марквардта.

Построенная *CES*-функция позволяет исследователю проанализировать широкий круг экономико-математических характеристик производственного процесса на изучаемом предприятии. В частности, появляется возможность определить оптимальную фондовооруженность, сравнить ее с фактической и рассчитать резерв роста реализованной продукции в случае избыточности последней.

Литература:

1. Arrow K., Chenerry H., Minhas B., Solow R. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // The Review of Economics and Statistics. – Vol. 43. – № 3. – P. 225–250.
2. Артемова А. Методика оценивания затрат при производстве продукции / А. Артемова, М. Грищенко, Д. Лисняк [Электронный ресурс]. – Режим доступа : file:///C:/Users/qwerty/Downloads/piprp_2014_1_3%20(4).pdf.
3. Боровской Д. Производственные функции и проблема выбора экономико-математической модели активного элемента / Д. Боровской // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 1(28). – С. 172–177.
4. Казакова М. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М. Казакова, 2013 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.
5. Подладчиков В. Микроэкономика. Производственные функции / В. Подладчиков [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm.
6. Шумська С. Виробнича функція в економічному аналізі : теорія і практика використання / С. Шумська // Економіка прогнозування. – 2007. – № 2. – С. 138–153.
7. Определение производственной функции и её свойства. Маргинальные продукты [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://ouek.onu.edu.ua/uploads/courses/matheconomics.pdf.
8. Теорія виробництва і граничного продукту. Виробнича функція та її властивості [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.lnu.edu.ua/faculty/pravo/ekt/t17.doc.
9. Kmenta J. (1967). On Estimation of the CES Production Function. International Economic Review, Vol. 8. – P. 180–189.
10. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден. Пер. с англ. С. Николаенко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
11. Математическая экономика на персональном компьютере : Пер. с япон. / М. Кубинива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ; под ред. М. Кубинива. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
12. Янковий В. До проблеми оптимального поєднання факторів у рамках виробничої функції / В. Янковий // Науковий вісник Чернівецького університету : Економіка. – Вип. 777–778. – Чернівці, 2016. – С. 12–19.

Янковий В.О. Застосування CES-функції і пов'язаних із нею виробничих функцій в економічних дослідженнях

Анотація. У статті обґрунтовано теоретичні і практичні питання використання виробничих функцій, узагальнених функцією з постійною еластичністю заміщення, в процесі моделювання випуску продукції залежно від найважливіших чинників – капіталу і праці, представлених у вартісному вираженні.

Ключові слова: виробнича функція, еластичність заміщення ресурсів, оцінка параметрів, оптимальна фондоозброєність.

Yankovoi V.A. Using of the CES-function and associated production functions in economic research

Summary. Theoretical and practical questions of using production functions, which are generalized by the function with constant elasticity of substitution, are discussed. The simulation of output depending on the most important factors (capital and labour) is presented in terms of value.

Keywords: production function, elasticity of substitution of resources, estimation of parameters, optimal capital-labour ratio.