УДК 330.46

Навроцький Р.Л.,
здобувач,
Національний університет водного господарства
та природокористування

РОЗРОБЛЕННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕФЕКТИВНОГО РОЗПОДІЛУ КОШТІВ МІЖ ПРОЕКТАМИ В УМОВАХ ДЕФІЦИТУ ФІНАНСОВИХ РЕСУРСІВ

Анотація. У статті зроблено спробу оптимізувати вкладені інвестиції між проектами за допомогою задач динамічного програмування. Наведені основні економічні характеристики інвестиційних природоохоронних проектів зі встановлення сортувальної лінії та когенераційного модуля на полігоні твердих побутових відходів. На основі вихідних даних побудовано оптимальний план поквартального розподілу інвестицій між двома проектами, використовуючи економіко-математичну модель динамічного програмування. Обґрунтовано поквартальний розподіл інвестицій, за якого досягається максимальний квартальний дохід.

Ключові слова: динамічне програмування; інвестиції; сортувальна лінія; когенераційний модуль.

Постановка проблеми. У результаті обмеженості фінансових ресурсів інвестори вибирають найбільш оптимальний проект для вкладення коштів, який дасть змогу отримати найбільший прибуток. Для проведення розрахунків оптимальності вкладення коштів інвесторами використовуються різні методи дослідження та прогнозування майбутніх прибутків. Одним із методів, за допомогою якого можна здійснити оптимальний розподіл, є використання методів динамічного прогнозування. Під динамічним програмуванням розуміють поетапне планування багатокрокового процесу, за якого на кожному етапі, враховуючи розвиток всього процесу, оптимізовують тільки один крок, тобто під час прийняття рішення враховують майбутнє.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проблемам накопичення твердих побутових відходів та видобуванню біогазу з ТПВ присвячено праці Ю. Матвєєва, Г. Гелетухи, О. Пухнюк, Н. Зіновчук, В. Попович. Розподілом інвестицій між проектами за допомогою динамічного програмування займалися такі науковці, як О. Цеслів, Г. Цегелик, П. Грицюк. Загальні аспекти використання задач динамічного програмування досліджувалися у роботах Р. Беллмана, І. Федоренко, М. Моїсеєва.

Метою статті є оптимальний розподіл інвестицій між двома проектами природоохороного призначення з метою отримання максимального прибутку.

Виклад основного матеріалу дослідження. На основі розрахунків природоохоронних проектів з економічного обґрунтування виробництва біогазу на Рівненському полігоні ТПВ та встановлення сміттєпереробного комплексу із сортування ТПВ необхідно розробити математичну модель оптимального розподілу коштів між проектами для отримання максимального прибутку. Розподіл коштів буде здійснюватися за такими двома проектами, як встановлення сортувальної лінії на Рівненському полігоні твердих побутових відходів та встановлення когенераційного модуля на Рівненському полігоні твердих побутових відходів. Основні економічні характеристики проектів наведені в таблиці 1.

Зазвичай інвестиції надходять не одразу у повному обсязі, а окремими частинами. У науковій літературі показано [4], що залежність приросту доходу від розміру вкладених інвестицій добре описується логістичною функцією:

$$y = \frac{be^{kx}}{1+ae^{kx}} + y_0 \qquad (1)$$

Тут y – функція доходу, x – розмір інвестицій, a, b, k – параметри, які можна підібрати, використовуючи проектні дані. За малих інвестицій приріст доходу також є невеликим; у разі досягнення деякого критичного рівня інвестицій дохід починає швидко зростати; під час завершення інвестування дохід виходить на деякий максимальний рівень. Параметри логістичної функції для обох проектів були визначені нами з урахуванням даних табл.1 за методом Левенберга-Марквардта (табл. 2).

Таблиця 1

Економічні характеристики інвестиційних проектів на Рівненському полігоні твердих побутових відходів

№ з/п	Назва проекту	Обсяг інвестицій, необхідний для виходу на проектний рівень, потужності, млн грн	Очікуваний річний дохід, млн грн	Річні експлуатаційні витрати, млн грн
1	Сортувальна лінія	9,5	21,7	1,15
2	Когенераційний модуль	23,6	19,2	1,80

Складено автором на основі джерел

Таблиця 2

Параметри логістичної функції доходу інвестиційних проектів на Рівненському полігоні твердих побутових відходів

№ з/п	Назва проекту	a	b	k	y0
1	Сортувальна лінія	0,05	1,14	0,84	–1,10
2	Когенераційний модуль	0,05	1,01	0,40	–1,00

Використовуючи отримані коефіцієнти логістичної функції, будуємо графіки залежності приросту доходу від розміру інвестицій для обох проектів (рис. 1).

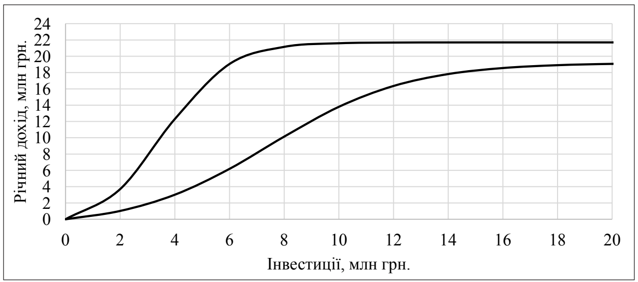

Рис. 1. Залежність приросту доходу від розміру інвестицій.

Суцільна лінія – проект «когенераційний модуль»; штрихова лінія – проект «сортувальна лінія»

Найчастіше інвестиційні кошти надходять не відразу, а окремими частинами. При цьому прибутковість інвестиційного об'єкта наростає за законом логістичної функції. Під час інвестування двох об'єктів потрібно правильно розподілити кожен отриманий транш, щоб у результаті загальна прибутковість обох об'єктів у процесі інвестування виявилась максимальною.

Таблиця 3

Розрахунок грошових потоків проекту «когенераційний модуль» та «сортувальна лінія»

Час	Інвестиції	Накопичені інвестиції	Дохід	Накопичений дохід	Експлуатаційні витрати	Чистий дохід
Когенераційний модуль						
1	2	2	1,01	1,01	1,8	–2,78
2	2	4	1,99	3,00	1,8	–1,81
3	2	6	3,19	6,19	1,8	–0,63
4	2	8	3,95	10,14	1,8	0,15
5	2	10	4,35	14,49	1,8	0,55
6	2	12	4,65	19,14	1,8	0,85
7	2	14	4,75	23,89	1,8	0,95
8	2	16	4,80	28,69	1,8	1,00
9	2	18	4,80	33,49	1,8	1,00
10	2	20	4,80	38,29	1,8	1,00
11	2	22	4,80	43,09	1,8	1,00
12	1.6	23,6	4,80	47,89	1,8	1,40
13	0	23,6	4,80	52,69	1,8	3,00
14	0	23,6	4,80	57,49	1,8	3,00
15	0	23,6	4,80	62,29	1,8	3,00
16	0	23,6	4,80	67,09	1,8	3,00
«Сортувальна лінія»						
1	2	2	5,10	5,10	1,15	1,95
2	2	4	5,25	10,35	1,15	2,10
3	2	6	5,35	15,70	1,15	2,20
4	2	8	5,40	21,10	1,15	2,25
5	1,5	9,5	5,42	26,52	1,15	2,77
6	0	9,5	5,425	31,95	1,15	4,275
7	0	9,5	5,425	37,37	1,15	4,275
8	0	9,5	5,425	42,80	1,15	4,275

Згідно з умовами інвестиційної угоди інвестиційні транші будуть надходити від інвестора поквартально в обсязі 2 млн грн. Наше завдання буде полягати в оптимальному розподілі цих коштів між двома проектами з метою отримання максимального прибутку. У табл. 3 наведені основні фінансові показники обох проектів (інвестиції, доходи, експлуатаційні витрати).

Для побудови оптимального плану поквартального розподілу інвестицій між двома проектами побудуємо економіко-математичну модель задачі, використовуючи методику математичного програмування. Математична модель екстремальної задачі полягає у відшуканні екстремуму (мінімуму або максимуму) цільової функції

$$f(X_1, X_2, ..., X_n) \to \max(\min) \qquad (2)$$

за обмежень

$$g_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le b_i, \quad i = \overline{1, m} \qquad (3)$$

де f і g_i – задані функції, b_i – деякі задані числа.

Окремими класами задач математичного програмування є задачі цілочисельного, параметричного і дробово-лінійного програмування. Всі перераховані вище класи задач є одноетапними, тобто вказують оптимальний розв'язок для одного моменту чи одного варіанту розвитку подій. Задачі, процес знаходження розв'язку яких є багатоетапним, належать до задач динамічного програмування. Знаходження розв'язку задачі методами динамічного програмування містить декілька етапів або кроків, на кожному з яких визначається розв'язок деякої часткової задачі, зумовленої вихідною. У цих задачах знаходяться оптимальні розв'язки послідовно для кожного етапу, що забезпечує оптимальний розвиток всього процесу загалом.

Як відомо, в кожному процесі є останній (k-ий) крок, прийняття рішення на якому не залежить від майбутнього. На цьому кроці вибирають управління, яке дає змогу отримати найбільший ефект. Спланувавши цей крок, до нього можна приєднати попередній (k-1)-й крок, до якого, у свою чергу, – (k-2)-й крок і т. д. Врешті-решт приходять у початковий стан системи S_0. Процес динамічного програмування ніби «розгортається» від кінця до початку. Для того, щоб спланувати k-й крок, потрібно знати стан системи на (k-1)-му кроці. Якщо стан системи на (k-1)-му кроці невідомий, то, виходячи з характеру цього процесу, роблять різні припущення про можливі стани системи на цьому кроці. Для кожного припущення вибирають оптимальне управління на останньому k-му кроці. Таке оптимальне управління називають умовно оптимальним. Під час вибору умовно оптимальних рішень на кожному кроці використовують принцип оптимальності Беллмана [1]: який би не був стан системи перед наступним кроком, управління на цьому кроці потрібно вибрати так, щоб виграш на цьому кроці в сумі з оптимальними виграшами на всіх наступних кроках був максимальний.

Наведемо математичне формулювання задачі динамічного програмування і принципу оптимальності. Введемо позначення:

S^0 – початковий стан системи; S^n – кінцевий стан системи;

$U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – оптимальна стратегія управління;

$\varphi_i = f_i(S_{i-1}, u_i)$ – виграш, який дає на i-му кроці управління u_i, якщо перед цим система перебувала в стані S_{i-1};

$S_i = w_i(S_{i-1}, u_i)$ – зміна стану системи під впливом управління u_i.

Основне рекурентне співвідношення динамічного програмування (рівняння Беллмана) виражає умовний оптимальний виграш $\varphi_i(S_{i-1})$ (починаючи з i-го кроку i до кінця) через функцію виграшу $\varphi_{i+1}(S_i)$:

$$\varphi_i(S_{i-1}) = \max_{u_i}\{f_i(S_{i-1}, u_i) + \varphi_{i+1}(w_i(S_{i-1}, u_i))\} \qquad (4)$$

Цьому виграшу відповідає умовно оптимальне управління на i-му кроці.

Розпочинаємо розв'язування задачі з кінця. Для цього здійснюється умовна оптимізація останнього (n-го) кроку за формулою

$$\varphi_n(S_{n-1}) = \max_{u_n}\{f_n(S_{n-1}, u_n)\} \tag{5}$$

і визначається відповідне для цього умовно оптимальне управління.

Потім здійснюється умовна оптимізація n-1-го, n-2-го та інших попередніх кроків за формулою (4) і для кожного кроку визначається умовно оптимальне управління.

Після завершення зворотного ходу здійснюється безумовна оптимізація шляхом переміщення у прямому напрямі – від першого кроку до останнього. Використовуючи функціональне рівняння Беллмана, знаходимо розв'язок розглядуваної задачі.

Отже, розглянемо детально математичну модель про розподіл інвестицій між двома проектами. Для реалізації двох природозахисних проектів $П_1$ і $П_2$ необхідні інвестиції в розмірі Y_1 = 23,6 млн грн, Y_2 = 9,5 млн грн. Але негайне повне інвестування обох проектів неможливе. Інвестор згоден виділяти необхідні інвестиції шляхом здійснення поетапних квартальних траншів у розмірі 2 млн грн. Використання j-им проектом X_i тис. ум. од. зі вказаної суми забезпечує приріст доходу, який визначається значенням логістичної функції $y = f_j(x_i)$ (1). Необхідно здійснити оптимальний розподіл інвестицій серед проектів, який забезпечить максимальний кумулятивний дохід.

Математична постановка задачі полягає у визначенні найбільшого значення функції:

$$F = \sum_{j=1}^{m} f_j(X_i) \tag{6}$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = Y_1 + Y_2, \tag{7}$$

$$X_i \geq 0, (1 = 1{,}n). \tag{8}$$

Сформульована задача є задачею нелінійного програмування. Враховуючи складний характер логістичної функції $f(X)$, для розв'язування задачі неможливо застосувати метод множників Лагранжа чи інші аналогічні методи. Тому для розв'язування задачі (6) – (8) необхідно застосувати методику динамічного програмування. Для цього вихідну задачу потрібно розглянути як багатоетапну. Замість того, щоб розглядати допустимі варіанти розподілу капіталовкладень між проектами і оцінювати їхню ефективність, будемо досліджувати ефективність вкладення засобів спочатку в один проект, а потім – у два проекти. Таким чином, отримуємо два етапи, на кожному з яких стан системи описується обсягом засобів, які інвестовані у проекти. Рішення про об'єм інвестиції для i-го проекту і є управліннями. Задача полягає у виборі таких управлінь, за яких функція (6) приймає найбільше значення.

Розв'яжемо поставлену задачу за умов, наведених вище: сумарний об'єм інвестицій становить 34 млн грн., а значення накопичених інвестицій X_i і доходу $f(X_i)$ наведені в таблиці 3. Максимальний обсяг інвестицій 34 млн грн. ми вибрали дещо більшим від реально необхідного (33,1 млн грн.) для зручності розв'язування задачі, оскільки перебір варіантів здійснюється із кроком 2 млн грн.

Для розв'язування цієї задачі динамічного програмування необхідно скласти рекурентне співвідношення Беллмана. Це співвідношення приводить до таких функціональних рівнянь:

$$\varphi_1(X) = \max_{0 \leq X_1 \leq X}\{f_1(X_1)\};$$

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \leq X_2 \leq X}\{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}; \tag{9}$$

. . . .

$$\varphi_{n-1}(X) = \max_{0 \leq X_{n-1} \leq X}\{f_{n-1}(X_{n-1}) + \varphi_{n-2}(X - X_{n-1})\}.$$

Тут функції $\varphi_i(X), i = \overline{1, n-1}$ визначають максимальний приріст випуску продукції за відповідних розподілів накопичених інвестицій X між проектами. Використовуючи рекурентні співвідношення (9) і вихідні дані задачі (таблиці 1 – 3), приступимо до знаходження розв'язку задачі, тобто до знаходження спочатку умовно оптимальних, а потім – і оптимальних розподілів інвестицій між двома проектами.

Почнемо з визначення умовно оптимальних інвестицій, що виділяються для розвитку першого проекту. Розглянемо всі можливі варіанти накопиченого обсягу інвестування із кроком 2 млн грн.

Нехай X_1 = 0; тоді $\varphi_1(0)$ = 0. Візьмемо тепер X_1 = 2. Тоді згідно з табл. 3 отримаємо:

$$\varphi_1(2) = \max\begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix} = 1.01, X_1^0 = 2.$$

Тут перший рядок відповідає розв'язку X_1 = 0, а другий рядок – розв'язку X_1 = 2. Умовно оптимальним розв'язком є X_1^0 = 2. Аналогічно знаходимо умовно оптимальні розв'язки для інших значень X_1. Результати обчислень і отримані умовно оптимальні розв'язки записуємо в таблицю 4.

Таблиця 4

Умовно оптимальні розв'язки за накопиченого інвестування лише першого проекту

Обсяг інвестицій X, виділених для першого проекту (млн грн.)	Максимальний дохід $\varphi_1(X)$ (млн грн./квартал)	Умовно оптимальний обсяг інвестицій X_1^0, виділених першому проекту (млн грн)
2	1,01	2
4	1,99	4
6	3,19	6
8	3,95	8
10	4,35	10
12	4,65	12
14	4,75	14
16	4,80	16
18	4,80	18
20	4,80	20
22	4,80	22
24	4,80	24

Використовуючи тепер дані таблиці 3, визначимо умовно оптимальні обсяги капіталовкладень, виділених для другого проекту, за вище наведеною методикою та записуємо дані у таблицю 5. Знайдемо

$$\varphi_2(X) = \max\{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\};$$

$$0 \leq X_2 \leq X$$

для кожного з допустимих значень X, які дорівнюють 0, 2, 4, … , 32, 34: $\varphi_2(0) = 0, X_2^0 = 0$. Продовжуючи аналогічний перебір варіантів до максимального значення сумарної інвестиції для двох проектів 34 млн грн отримуємо оптимальний розподіл інвестицій між проектами. Отримані результати і знайдені умовно оптимальні обсяги інвестицій, виділених для другого проекту, записуємо в таблицю 5.

Як бачимо, два останні варіанти розподілу дають однаковий фінансовий результат, який відповідає максимальній сумарній дохідності обох розглянутих проектів. Всі подальші етапи будуть давати той же фінансовий результат за умови виділення на другий проект інвестицій у розмірі 10 млн грн.

Висновок. Викладемо економічну інтерпретацію одержаного нами розв'язку. За прийнятих нами умов рекомендована поквартальна структура розподілу інвестицій відповідає наведеній у табл. 5. У результаті реалізації обох проектів вдається вийти на максимальний квартальний дохід 10,22 млн грн. у тринадцятому кварталі, тобто через три роки після початку інвестицій. За запропонованої нами схеми інвестування двох об'єктів за весь час реалізації проекту (17 кварталів) буде отримано максимально можливий дохід розміром 156,29 млн грн. За інших варіантів інвестування накопичений дохід буде значно меншим. Якщо інвестувати спочатку у перший проект, а потім – у другий, то загальний накопичений дохід за 17 кварталів становитиме 98,41 млн грн. Якщо ж інвестувати спочатку у другий проект, а потім – у перший, то загальний накопичений дохід становитиме 139,45 млн грн. Ілюстрація отриманого доходу за інвестування спочатку в один проект, а потім – у інший наведена на рис. 2.

Отже, в результаті фінансування обох проектів досягається максимально можлива сума отримуваного доходу.

Література:

1. Дослідження операцій в економіці / За ред. І.К. Федоренко, О.І. Черняка. – К.: Знання, 2007. – 558 с.
2. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
3. Вітлінський В.В. Моделювання економіки. – К.: КНЕУ, 2005. – 408 с.
4. Моисеев Н.Н. Математика – управление – экономика. М.: Изд. «Знание», 1970.
5. Мотиваційні механізми дематеріалізаційних та енергоефективних змін національної економіки: монографія / за раг. ред. доктора екон. наук, проф. І.М. Сотник. – Суми: Університетська книга, 2016. – 368 с.

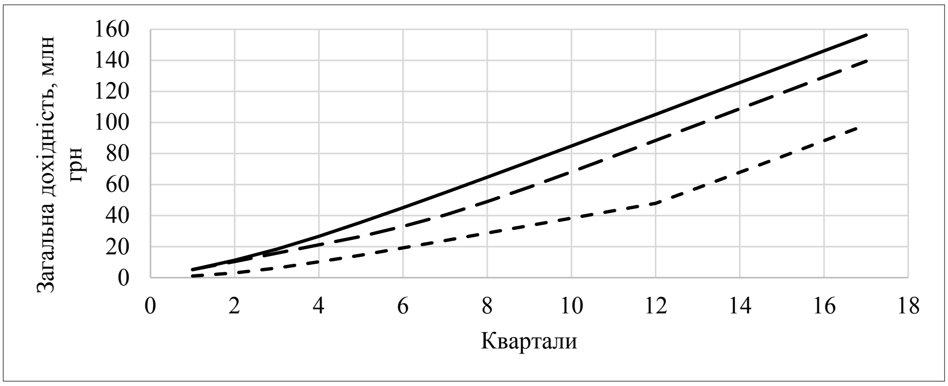

Рис. 2. Залежність загального доходу від схеми інвестування.

Суцільна лінія – оптимальна схема; штрихова лінія – інвестування спочатку другого проекту; пунктирна – інвестування спочатку першого проекту.

Таблиця 5

Умовно оптимальні розв'язки за інвестування першого і другого проектів

Квартал	Обсяг накопичених інвестицій X, виділених для 1-го і 2-го проектів (млн грн.)	Умовно оптимальний обсяг накопичених інвестицій X_1^0, виділених першому проекту (млн грн.)	Умовно оптимальний обсяг накопичених інвестицій X_2^0, виділених другому проекту (млн грн.)	Максимальний дохід φ_2 (X) (млн грн. /квартал)
1	2	0	2	5,10
2	4	2	2	6,11
3	6	4	2	7,09
4	8	6	2	8,29
5	10	8	2	9,05
6	12	10	2	9,45
7	14	12	2	9,75
8	16	12	4	9,90
9	18	14	4	10,00
10	20	14	6	10,10
11	22	16	6	10,15
12	24	16	8	10,20
13	26	18	8	10,22
14	28	18	10	10,22
15	30	20	10	10,22
16	32	22	10	10,22
17	34	24	10	10,22

Навроцкий Р.Л. Разработка экономико-математической модели эффективного распределения средств между проектами в условиях дефицита финансовых ресурсов

Аннотация. В статье сделана попытка оптимизировать вложенные инвестиции между проектами с помощью задач динамического программирования. Приведены основные экономические характеристики инвестиционных природоохранных проектов по установлению сортировочной линии и когенерационного модуля на полигоне твердых бытовых отходов. На основе исходных данных построен оптимальный план поквартального распределения инвестиций между двумя проектами, используя экономико-математическую модель динамического программирования. Обоснованно поквартальное распределение инвестиций, при котором достигается максимальный квартальный доход.

Ключевые слова: динамическое программирование; инвестиции; сортировочная линия; когенерационный модуль.

Navrotskyi R.L. Development of the economic-mathematical model of effective project allocation between projects in the conditions of the deficit of financial resources

Summary. The article attempts to optimize the investments between projects using dynamic programming problems. The basic economic characteristics of investment projects on the establishment of protected sorting lines and cogeneration module to landfill are given. Based on initial data, constructed an optimal plan of quarterly distribution of investments between the two projects, using a mathematical model of dynamic programming. Grounded quarterly distribution of investment, at which the maximum quarterly revenue can be achieved.

Keywords: dynamic programming; investment; sorting line; cogeneration module.