

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БІЛЯ КРАЙОВИХ ТРІЩИН У ПЛАСТИНІ З ОТВОРОМ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

В. В. БОЖИДАРНИК, О. В. МАКСИМОВИЧ

Луцький національний технічний університет

Запропоновано підхід до розрахунку напруженого стану пластин з крайовими тріщинами біля отворів складної форми на основі методу інтегральних рівнянь. Досліджено коефіцієнти інтенсивності напружень для тріщин біля отворів, що мають форму рівностороннього многокутника та для системи тріщин різної довжини біля кругового отвору.

Ключові слова: *пластина з отвором, крайова тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, напружений стан.*

Дослідженню напруженого стану біля крайових тріщин у пластинах із отворами складної форми присвячено значно менше праць, ніж його вивченню біля внутрішніх [1, 2]. При цьому значна кількість результатів, що наведені в довідниках із визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) [3], отримана з використанням методу конформного відображення, який ефективний лише за розгляду окремих класів задач.

Загальний метод дослідження таких задач на основі методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) запропоновано раніше [1]. Відомо, що найефективніші підходи для визначення КІН в МГІР ґрунтуються на модифікованих інтегральних рівняннях, побудованих так, що умови на межі отвору задовольняються тотожно [1]. Так досліджували КІН для крайових тріщин біля отворів кругової форми у нескінченних та кільцевих пластинах, у пластинах, що містять тріщини з відгалуженнями [1], тощо.

Нижче розроблено методику розрахунку напруженого стану пластин з крайовими тріщинами для отворів практично довільної форми на основі модифікованих інтегральних рівнянь, які побудовані з допомогою методу конформного відображення.

Постава задачі та основні співвідношення. Розглянемо нескінченну пластину з отвором, послаблену системою крайових тріщин, що розміщені вздовж кривих L_j ($j = 1, \dots, J$). Приймемо, що пластина перебуває під дією зосереджених сил, двостороннього розтягу на нескінченності та прикладених до тріщини зусиль q_T , які вважаємо однаковими на її протилежних берегах. Тут $q_T = N_q + iT_q$, де N_q і T_q – нормальна та дотична проекції вектора зусиль, що прикладені до тріщини. Загальний розв'язок задачі теорії пружності для нескінченної пластини з внутрішніми тріщинами записано через комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ [1]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{Q_S(t)dt}{t-z} + \Phi_c(z), \quad \Psi(z) = \int_L \left[\frac{\bar{Q}_S d\bar{t}}{t-z} - \frac{i\bar{T}_Q dt}{(t-z)^2} \right] + \Psi_c(z), \quad (1)$$

де $Q_S = -\frac{2Gi}{\chi+1} \frac{d}{dt}([u] + i[v])$, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$, $[u]$ і $[v]$ – стрибки переміщень на контурі L , G – модуль зсуву, $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона; $\Phi_c(z)$ і $\Psi_c(z)$ – потенціали для суцільної пластини, що навантажена на нескінченності та зосередженими силами.

Вектор напружень $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ у довільній точці z кривої Γ на дотичній до неї площині знаходимо через комплексні потенціали [1, 3]:

$$q_\Gamma(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + d\bar{z} / dz [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \quad (2)$$

де dz – диференціал змінної z на кривій.

Щоб отримати інтегральні рівняння для знаходження функції $Q(t)$, підставимо потенціали (1) в формулу (2), спрямуємо $z \rightarrow L$ та врахуємо, що на тріщині $q_L = q_T$ [1]. Для інтегрального запису для пластини з отвором і тріщинами перепишемо формулу (1) у вигляді

$$\Phi(z) = \int_L \Phi_0(z, Q(t), t) ds + \Phi_c(z), \quad \Psi(z) = \int_L \Psi_0(z, Q(t), t) ds + \Psi_c(z), \quad (3)$$

де ds – диференціал дуги;

$$\Phi_0(z, P, a) = \frac{P}{a-z}; \quad \Psi_0(z, P, a) = \frac{\bar{P}}{a-z} - \frac{\bar{a}P}{(a-z)^2}; \quad (4)$$

$$Q = -G'i \frac{d}{ds}([u] + i[v]), \quad (5)$$

$G' = \frac{G}{\pi(\chi+1)}$. Зазначимо, що Φ_0, Ψ_0 є аналітичні функції від змінної z та

$$Q = \frac{1}{2\pi} Q_S dt / ds.$$

Розглянемо напружено-деформований стан, який відповідає потенціалам $\Phi_0(z, P, a), \Psi_0(z, P, a)$ за довільних значень комплексної величини P та розміщення точки a . Відповідні їм головний вектор (X, Y) і момент M_a на довільному контурі, який обмежує точку a , рівні нулю. За повного обходу навколо точки a вздовж довільного контуру Γ переміщення терплять стрибки $(u+iv)_\Gamma = P/G'$. Тобто потенціали Φ_0, Ψ_0 належать до класу дислокаційних розв'язків, які детально розглянуті в праці [3] з відповідною механічною інтерпретацією.

Подання (1) і (3) справедливі, коли стрибки переміщень на кінцях кривої L рівні нулю. В іншому випадку (під час розгляду крайових тріщин) диференціювання в (5) розглядаємо в сенсі узагальнених функцій. Тоді до функції Q у виразі (5) справа необхідно додати компоненту Q_Δ :

$$Q_\Delta = -C_A \delta(s-s_A) + C_B \delta(s-s_B), \quad (6)$$

де $C_A = G'i(U_A + iV_A)$; $C_B = G'i(U_B + iV_B)$, (U_A, V_A) і (U_B, V_B) – стрибки переміщень у вершинах A і B тріщини; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; s_A, s_B – дугові координати вершин A і B . Тут розглянуто одну тріщину. Тоді потенціали (3) з урахуванням (6) такі:

$$\Phi(z) = \int_L \Phi_0(z, Q(t), t) ds - \Phi_0(z, C_A, c_A) + \Phi_0(z, C_B, c_B) + \Phi_c(z), \quad (7)$$

$$\Psi(z) = \int_L \Psi_0(z, Q(t), t) ds - \Psi_0(z, C_A, c_A) + \Psi_0(z, C_B, c_B) + \Psi_c(z).$$

Значимо, що зображення (7) можна отримати і іншим шляхом. Для цього спочатку необхідно записати первісні від потенціалів (1), які містять безпосередньо стрибки переміщень (а не похідні від них) [4], а далі інтегрувати за частинами та врахувати ненульові стрибки переміщень на кінцях кривої L .

Модифіковані інтегральні рівняння для пластини з отвором і тріщинами. Розглянемо тепер пластину з отвором. Позначимо через D область, яку займає серединна її площа. Побудуємо спочатку для області D дислокаційний розв'язок $\Phi_G(z, P, a)$, $\Psi_G(z, P, a)$ при $a, z \in D$, який задовольняє умову відсутності напружень на межі отвору. Будуємо розв'язок так, щоб потенціали $\Phi_G(z, P, a)$, $\Psi_G(z, P, a)$ мали такі ж полюси в точці $a \in D$, як і функції Φ_0 , Ψ_0 у формулах (4).

За побудованих дислокаційних потенціалів інтегральне подання для пластини з отвором і внутрішніми розрізами з ненульовими стрибками переміщень на кінцях запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_L \Phi_G(z, Q(t), t) ds - \Phi_G(z, C_A, c_A) + \Phi_G(z, C_B, c_B) + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \int_L \Psi_G(z, Q(t), t) ds - \Psi_G(z, C_A, c_A) + \Psi_G(z, C_B, c_B) + \Psi_D(z),\end{aligned}\quad (8)$$

де $\Phi_D(z)$, $\Psi_D(z)$ – комплексні потенціали для пластини з вільним від навантаження отвором, які відповідають прикладеному зовнішньому навантаженню (без урахування зусиль, що діють на берегах тріщини).

За побудовою в поданні (8) підінтегральні функції мають такі ж особливості, як і в (1). Тому вирази (8) і (1) визначають однакові стрибки переміщень на контурі L . Також за побудовою потенціали (8) автоматично задовольняють умову відсутності напружень на межі отвору.

Розглянемо тепер крайову тріщину. Тоді на основі подання (8) після граничного переходу точки c_A до точки c , яка лежить на межі отвору, та з урахуванням того, що у вершині c стрибки переміщень рівні (U_c , V_c), а у внутрішній – нульові, отримуємо:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_L \Phi_G(z, Q(t), t) ds + \Phi_G(z, C, c) + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \int_L \Psi_G(z, Q(t), t) ds + \Psi_G(z, C, c) + \Psi_D(z),\end{aligned}\quad (9)$$

де $C = -G'i(U_c + iV_c)$. Інтегруючи формулу (5) вздовж контуру L , визначимо взаємозв'язок між функцією Q і сталою C :

$$\int_L Q ds = -C. \quad (10)$$

Розглянемо довільний контур Γ , що охоплює отвір із крайовою тріщиною. За повного обходу вздовж нього переміщення, що визначають потенціали (9), мають стрибок. Прирівнюючи цей стрибок до нуля, отримуємо умову однозначності переміщень, яка збігається із формулою (10).

Розглянемо тепер систему крайових тріщин. Тоді на основі (9) дістанемо:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_{j=1}^J \left(\int_{L_j} \Phi_G(z, Q(t), t) ds + \Phi_G(z, C_j, c_j) \right) + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \sum_{j=1}^J \left(\int_{L_j} \Psi_G(z, Q(t), t) ds + \Psi_G(z, C_j, c_j) \right) + \Psi_D(z),\end{aligned}\quad (11)$$

де c_j – координати вершини j -ої тріщини, яка виходить на межу отвору; $C_j = -G'i(U_{c_j} + iV_{c_j})$, U_{c_j} і V_{c_j} – стрибки переміщень у цих вершинах. На підставі (10) маємо:

$$\int_{L_j} Q ds + C_j = 0, \quad j=1, \dots, J. \quad (12)$$

Отже, за виконання рівностей (12) умови однозначності переміщень для подань (11) задовольняються тотожно. Інтегральні подання (11) з урахуванням умов (12) можна записати також у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} [\Phi_G(z, Q(t), t) - \Phi_G(z, Q(t), c_j)] ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} [\Psi_G(z, Q(t), t) - \Psi_G(z, Q(t), c_j)] ds + \Psi_D(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Зазначимо, що за використання виразів (13) умови однозначності переміщень виконуються тотожно. Для запису наведених подань у явному вигляді врахуємо, що дислокаційні потенціали, які є лінійні відносно параметра P , можна зобразити так:

$$\Phi_G(z, P, a) = PF_1(z, a) + \bar{P}F_2(z, a), \quad \Psi_G(z, P, a) = Pf_1(z, a) + \bar{P}f_2(z, a), \quad (14)$$

де F_j, f_j – відомі функції. Тоді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{j=1}^J \left\{ \int_{L_j} [Q(t)F_1(z, t) + \overline{Q(t)}F_2(z, t)] ds + C_j F_1(z, c_j) + \overline{C_j} F_2(z, c_j) \right\} + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \sum_{j=1}^J \left\{ \int_{L_j} [Q(t)f_1(z, t) + \overline{Q(t)}f_2(z, t)] ds + C_j f_1(z, c_j) + \overline{C_j} f_2(z, c_j) \right\} + \Psi_D(z). \end{aligned} \quad (15)$$

Зображення (13) будуть:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} [Q(t)F_{1j}(z, t) + \overline{Q(t)}F_{2j}(z, t)] ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} [Q(t)f_{1j}(z, t) + \overline{Q(t)}f_{2j}(z, t)] ds + \Psi_D(z), \end{aligned} \quad (16)$$

де $F_{kj}(z, t) = F_k(z, t) - F_k(z, c_j)$, $f_{kj}(z, t) = f_k(z, t) - f_k(z, c_j)$, $k=1, 2$.

Під час розрахунків зручно перейти до дійсних невідомих. Для цього подамо $Q = Q_R + iQ_I$ та $C_j = C_{Rj} + iC_{Ij}$. Тоді (13) перепишемо так:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} \left\{ Q_R(t) [\Phi_R(z, t) - \Phi_R(z, c_j)] + Q_I(t) [\Phi_I(z, t) - \Phi_I(z, c_j)] \right\} ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} \left\{ Q_R(t) [\Psi_R(z, t) - \Psi_R(z, c_j)] + Q_I(t) [\Psi_I(z, t) - \Psi_I(z, c_j)] \right\} ds + \Psi_D(z), \end{aligned} \quad (17)$$

де $\Phi_R(z, t) = \Phi_G(z, 1, t)$; $\Psi_R(z, t) = \Psi_G(z, 1, t)$; $\Phi_I(z, t) = \Phi_G(z, i, t)$; $\Psi_I(z, t) = \Psi_G(z, i, t)$.

Інтегральні рівняння для знаходження невідомої функції Q отримуємо після підстановки інтегральних зображень у формулу (2) та врахування, що

на тріщині $q_L = q_T$. За граничного переходу $z \rightarrow L$ використовуємо формулу Племеля–Сохоцького. В результаті отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^J \int_{L_j} \left\{ Q_R(t) [q_R(z, t) - q_R(z, c_j)] + Q_I(t) [q_I(z, t) - q_I(z, c_j)] \right\} ds = \quad (18)$$

$$= q_T(z) - q_D(z), \quad z \in L,$$

де $q_R(z, a)$, $q_I(z, a)$, $q_D(z)$ – вектори напружень q_L в точці z кривої L , які визначаємо за формулою (2) через відповідно комплексні потенціали $(\Phi_R(z, a), \Psi_R(z, a))$, $(\Phi_I(z, a), \Psi_I(z, a))$, $(\Phi_D(z), \Psi_D(z))$. У рівнянні (18) ядра, якщо $t \rightarrow c_j$, рівні нулю. Така умова необхідна для розв’язальності інтегральних рівнянь у разі крайових тріщин [1].

Дислокаційні розв’язки для пластини з отвором довільної форми.

Для визначення дислокаційного розв’язку (14) використовуємо метод Мухелішвілі. Розглядатимемо випадок, коли площина з вирізаним кругом одиничного радіуса в площині ζ відображається конформно на область D функцією $z = \omega(\zeta)$, де $\omega(\zeta) = d_0\zeta + d_1/\zeta + \dots + d_M/\zeta^M$, d_0, d_1, \dots, d_M – відомі комплексні коефіцієнти. Первісні від комплексних потенціалів $\Phi_G(z)$, $\Psi_G(z)$ у нових змінних позначимо $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ [5]. Для еліптичного отвору з півосями a_1, a_2

$$\varphi(\zeta) = -A \left[\ln(\zeta - \zeta_0) - \ln \left(\frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta} \right) \right] + \bar{\gamma} A \frac{\zeta_*^2}{(\zeta - \zeta_*)}, \quad (19)$$

$$\psi(\zeta) = \bar{A} \left[-\ln(\zeta - \zeta_0) + \ln \left(\frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta} \right) \right] + \gamma A \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)} - \frac{\zeta(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \varphi'(\zeta),$$

де ζ_0 – така точка, що $\omega(\zeta_0) = a$; $\zeta_* = 1/\bar{\zeta}_0$; $\gamma = [\overline{\omega(\zeta_0)} - \overline{\omega(1/\zeta_0)}] / \omega'(\zeta_0)$, ненульові коефіцієнти у функції $\omega(\zeta)$ рівні $d_0 = (a_1 + a_2)/2$, $d_1 = (a_1 - a_2)/2$, $m = d_1/d_0$.

Для знаходження дислокаційного розв’язку, коли точка c лежить на межі області отвору, перейдемо до границі $z_0 \rightarrow c$. Враховуючи, що при цьому $\zeta_* = \zeta_0$, $\gamma = 0$, з (19) отримаємо:

$$\varphi(\zeta) = -P \ln \zeta, \quad \psi(\zeta) = -\bar{P} \ln \zeta + P \frac{1 + m^2}{\zeta^2 - m}. \quad (20)$$

Тобто потенціали $\Phi_G(z, P, c)$, $\Psi_G(z, P, c)$, якщо $c \in L$, для еліптичного отвору не залежать від розміщення точки c . Можна показати [6], що дислокаційні потенціали не залежать від розміщення точки c і на межі отвору довільної форми. Зазначимо, що такий висновок можна зробити і на основі безпосереднього використання встановленої в праці [3] механічної інтерпретації дислокаційних розв’язків.

Зокрема, випишемо на основі (19) функції, які входять у потенціали $\Phi_G(z, P, a)$, $\Psi_G(z, P, a)$ (формули (14)), та інтегральні подання для кругового отвору радіуса r . Тоді

$$F_1(z, a) = -\frac{1}{z - a} + \frac{r^2}{z(\bar{z}\bar{a} - r^2)}, \quad f_1(z, a) = \frac{-\bar{a}}{(z - a)^2} + \frac{r^2}{az^2} + \frac{r^4(3z\bar{a} - 2r^2)}{z^3(\bar{z}\bar{a} - r^2)^2},$$

$$F_2(z, a) = \frac{r^2 - a\bar{a}}{\bar{a}} \frac{r^2}{(\bar{z}\bar{a} - r^2)^2},$$

$$f_2(z, a) = -\frac{1}{z-a} + \frac{r^2}{z(z\bar{a}-r^2)} + \frac{r^2 - a\bar{a}}{\bar{a}} r^4 \frac{3z\bar{a} - r^2}{z^2(z\bar{a}-r^2)^3}.$$

Коли точка a лежить на межі отвору ($a = c$), знаходимо:

$$F_1(z, c) = -\frac{1}{z}, \quad F_2(z, c) = 0, \quad f_1(z, c) = -\frac{2r^2}{z^3}, \quad f_2(z, c) = -\frac{1}{z}.$$

Підставляючи ці функції в інтегральне подання (15) та замінюючи в ньому величину C_j інтегралом (12), отримуємо інтегральне подання для пластини із круговим отвором та крайовими тріщинами, яке збігається із побудованим для цього випадку зображенням [1] іншим методом.

Числовий алгоритм розв'язування рівнянь. В інтегральні рівняння входять інтеграли вигляду

$$R = \int_L F(t) ds, \quad H(z) = \int_L \frac{F(t)}{t-z} ds, \quad z \in L, \quad (21)$$

де L – гладкий розімкнутий контур; інтеграл H розглядаємо в сенсі головного значення. Для обчислення інтегралів контур інтегрування опишемо параметрично $t = g(\xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Розглядаємо далі випадок, коли після заміни змінних підінтегральна функція має кореневі особливості $F(g(\xi)) = U(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$, де $U(\xi)$ – гладка обмежена функція. Для обчислення інтегралів у нових змінних з використанням квадратурної формули Лобатто маємо [5]:

$$R = \sum_{n=1}^N A_n U_n, \quad H(z_v) = \sum_{n=1}^N A_n \frac{U_n}{t_n - z_v}, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

де N – вибрана кількість вузлових точок; $U_n = U(\xi_n)$; $z_v = g(\tau_v)$; $t_n = g(\xi_n)$, $\xi_n = -\cos(\pi_N(n-1))$, $\tau_v = -\cos(\pi_N(v-0,5))$. Тут $A_n = \pi_N s'_n$, якщо $n \neq 1$ і $n \neq N$; $A_1 = 0,5\pi_N s'_1$; $A_N = 0,5\pi_N s'_N$; $s'_n = s'(\xi_n)$; $\pi_N = \pi/(N-1)$; $s'(\xi) = |g'(\xi)|$.

Розглянемо спочатку детальніше випадок, коли тріщина одна. Застосовуючи формули (27) до рівняння (18), отримуємо систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N (a_{vn} R_n + b_{vn} I_n) = d_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (23)$$

де $a_{vn} = A_n [q_R(z_v, t_n) - q_R(z_v, c)]$; $b_{vn} = A_n [q_I(z_v, t_n) - q_I(z_v, c)]$; $d_v = q_T(z_v) - q_D(z_v)$; $R_n = R(\xi_n)$, $I_n = I(\xi_n)$. Тут використано зображення $Q_R(g(\xi)) = R(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$, $Q_I(g(\xi)) = I(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$.

Вважаємо, що параметру $\xi = -1$ відповідає точка виходу тріщини на межу отвору, в якій напруження обмежені. Тому приймаємо умови [1]: $R(-1) = 0$, $I(-1) = 0$. Звідси отримуємо два додаткові рівняння $R_1 = 0$, $I_1 = 0$, які разом із рівняннями (23) складають замкнену систему рівнянь для крайових тріщин. КІН через знайдені зі системи коефіцієнти визначимо [1] за формулою $K_I^+ - iK_{II}^+ = -2\pi\sqrt{\pi} |g'(1)| (R_N + iI_N)$.

Система рівнянь (23) справедлива і для системи тріщин, якщо в ній покласти: $N = N_1 + N_2 + \dots, N_J$; N_k – кількість вузлових точок на k -му розрізі; t_1, t_2, \dots, t_N – сукупність впорядкованих вузлових точок $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_{N_1}^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots,$

$t_{N_2}^{(2)}, \dots, t_1^{(J)}, \dots, t_{N_J}^{(J)}$; z_1, z_2, \dots, z_{N-J} – сукупність точок $z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1-1}^{(1)}$; $z_1^{(2)}, \dots, z_{N_2-1}^{(2)}$; \dots ; $z_1^{(J)}, \dots, z_{N_J-1}^{(J)}$; A_1, A_2, \dots, A_N – сукупність коефіцієнтів $A_1^{(1)}, \dots, A_{N_1}^{(1)}$; \dots ; $A_1^{(J)}, \dots, A_{N_J}^{(J)}$; R_1, R_2, \dots, R_N – сукупність значень $R_1^{(1)}, \dots, R_{N_1}^{(1)}$; \dots ; $R_1^{(J)}, \dots, R_{N_J}^{(J)}$; I_1, I_2, \dots, I_N – сукупність значень $I_1^{(1)}, \dots, I_{N_1}^{(1)}$; \dots ; $I_1^{(J)}, \dots, I_{N_J}^{(J)}$. Цифри зверху вказують на належність введених вище коефіцієнтів чи величин до тріщини з відповідним номером.

До системи рівнянь (23), в якій $v=1, \dots, N-J$, необхідно долучити рівняння $R_k=0, I_k=0$ при $k=1, N_1+1, N_1+N_2+1, \dots, N_1+N_2+\dots+N_{J-1}+1$. Під час визначення коефіцієнтів у формулах (23) точки c_j на межі отвору можна вибрати довільно.

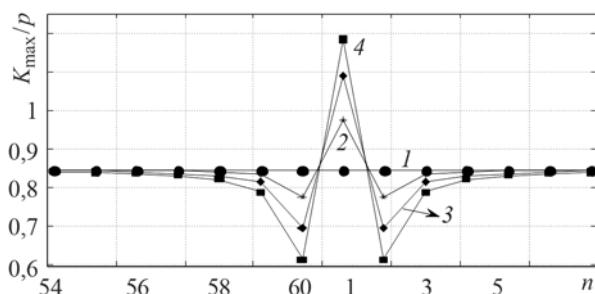
Результати розрахунків. Розглянемо пластину з отвором, що має форму рівностороннього многокутника з N_c сторонами, на який із вершини A виходить прямолінійна крайова тріщина довжиною l вздовж бісектриси відповідного внутрішнього кута. Коефіцієнти відображальної функції вибирали на основі праці [7]. Відносні значення КІН $F_1 = K_1 / p\sqrt{\pi(d+l)/2}$ для розтягу пластини зусиллями p в напрямку, перпендикулярному до тріщини за відносних довжин $\lambda = l/d$, наведено в таблиці за кількості сторін від 3 до 10, де d – довжина бісектриси від вершини A до точки, в якій вона перетинає многокутник. У розрахунках утримували 100–120 коефіцієнтів у відображальній функції. В четвертому стовпчику наведено дані для чотиристороннього многокутника (квадрата) із довідника [2]. В передостанньому та останньому – результати розрахунків для прямокутного рівнобедреного трикутника та відповідні дані із праці [2]. Як бачимо, знайдені різними методами значення КІН за довжин, для яких $\lambda \geq 0,1$, практично збігаються. Деяко більше вони різняться, коли $\lambda = 0,05$. Отримані нами КІН для різних кількостей вузлових точок при $N > 60$ відрізняються від наведеного в таблиці значення на четвертій значущій цифрі.

Відносні КІН для крайової тріщини, яка виходить на отвір у вигляді многокутника

$\lambda \backslash N_c$	3	4	4, [2]	5	6	7	8	9	10	3*	3, [2]
0,001	1,104	0,929	–	0,804	0,649	0,539	0,471	0,416	0,373	1,015	–
0,005	1,123	0,999	–	0,943	0,809	0,742	0,668	0,624	0,580	1,121	–
0,01	1,129	1,026	–	0,995	0,876	0,823	0,755	0,718	0,677	1,153	–
0,05	1,128	1,072	1,040	1,102	1,024	1,013	0,970	0,960	0,935	1,208	–
0,10	1,118	1,074	1,073	1,127	1,068	1,077	1,047	1,051	1,035	1,212	1,180
0,20	1,100	1,061	1,060	1,125	1,080	1,104	1,083	1,097	1,085	1,195	1,191
0,40	1,076	1,036	1,036	1,095	1,058	1,085	1,066	1,082	1,071	1,154	1,152
0,75	1,054	1,015	–	1,058	1,028	1,049	1,034	1,047	1,038	1,107	–

Розглянемо пластину з круговим отвором радіуса r , послабленим системою J крайових рівновіддалених тріщин довжиною l , які перпендикулярні до його межі. Значення відносних КІН $F_1 = K_1 / (p\sqrt{\pi}l)$ за всебічного розтягу пластини зусиллями p , $l/a = 0,1$, $J = 60$ наведено на рисунку, де на горизон-

тальній осі n – номер тріщини. Точкам на лінії 1 відповідають значення КІН в 1–7 та 54–60 тріщинах (всі значення КІН однакові). Розглянуто випадок, коли перша тріщина піросла і рівна $l/r = 0,11; 0,12; 0,13$. Розраховані значення відносних КІН для цих випадків позначено відповідно *, ♦, ■ (через них проведено лінії 2–4).



Розподіл відносних КІН для системи 60 тріщин з локально збільшеною однією тріщиною.

Distribution of relative SIF for a system of 60 cracks with a locally increased one crack.

Як бачимо, КІН істотно зростає на локально збільшеній тріщині, а на сусідніх – зменшується. Збільшена за розміром тріщина істотно впливає на КІН тільки на перших п'яти сусідніх тріщинах.

ВИСНОВОК

Запропоновано методу розрахунку КІН для крайових тріщин у пластинах з отворами практично довільної форми, яка ґрунтується на методі інтегральних рівнянь, для побудови яких використано методи Мухелішвілі та конформного відображення. Досліджено КІН для крайових тріщин біля отворів, що мають форму рівностороннього многокутника. Встановлено, що КІН істотно зростає для локально збільшеної тріщини в системі крайових тріщин біля кругового отвору.

РЕЗЮМЕ. Предложен подход к расчету напряженного состояния пластин с краевыми трещинами возле отверстий сложной формы на основе метода интегральных уравнений. Исследованы коэффициенты интенсивности напряжений для краевых трещин около отверстий, имеющих форму равностороннего многоугольника и для системы трещин различной длины возле кругового отверстия.

SUMMARY. The approach to the stress-state determination of plates with edge cracks at holes of complicated configuration based on the integral equations method is proposed. The stress intensity factors for edge cracks at holes of equilateral polygon configuration and a system of cracks of different length at the hole have been investigated.

1. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
2. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.
3. Мухелішвілі Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. Линьков А. М. Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными уравновешенными системами сил // Докл. АН СССР. – 1974. – **218**, № 6. – С. 1294–1297.
5. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк, 2003. – 226 с.
6. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Визначення напруженого стану пластинок з отворами і тріщинами за допомогою методів інтегральних рівнянь та конформного відображення // Машиностроение и техносфера XXI века. Сб. тр. ХУ междунар. науч.-техн. конф. – Донецьк, 2008. – **3**. – С. 123–129.
7. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.

Одержано 02.07.2009