УДК 539.3

ПРУЖНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТОРУ З ВКЛЮЧЕННЯМ ДОВІЛЬНОЇ ЖОРСТКОСТІ В УМОВАХ ЗСУВУ

М. М. СТАДНИК

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Одержано зручні в інженерному застосуванні формули для обчислення напружень у тонкому включенні і їх концентрації у матриці біля його контуру. Досліджено вплив жорсткості включення та його геометричних параметрів на напруження в матриці і включенні. Розглянуто часткові випадки задачі для еліпсоїдальної порожнини і абсолютно жорсткого еліпсоїдального включення. Отримано вирази для обчислення відповідних коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Ключові слова: *сингулярні інтегродиференціальні рівняння, включення, стрибки напружень та зміщень.*

Розв'язки пружних задач для тіл з включеннями необхідні під час вивчення міцності матеріалів з різними дефектами. Пружну задачу для тіла з податливим тонким включенням в умовах зсуву розглядали раніше [1]. Нижче досліджено випадок пружного включення довільної жорсткості у тілі за умови чистого зсуву.

Формулювання і розв'язок задачі. Розглянемо тривимірне тіло, в якому розміщено пружне ($0 \le G_1/G < \infty$, G_1, G – модулі зсуву включення та матриці відповідно) тонке включення, обмежене гладкою поверхнею $z = \pm h(x, y)$ ($\max h << d$, $\rho << d$, d – найменший діаметр серединної площини включення S; ρ – радіус заокруглення його вершини). На поверхнях $z = \pm h(x, y)$ з'єднання включення–матриця існує ідеальний механічний контакт. Тіло на безмежності піддано дії рівномірно розподілених зсувних напружень τ^∞, паралельних до площини $z = 0$ у напрямку, який утворює кут α з віссю Ox декартової системи координат $Oxyz$ з початком у центрі включення. Задача полягає у визначенні напружень у включенні та матриці біля нього.

Поле напружень і зміщень в однорідному тілі за умови чистого зсуву буде:

$$[u_x^0]_* = 2Bh(x, y)/G\ ;\ [u_y^0]_* = 2B_1 h(x, y)/G\ ;\ (u_z^0)_* = 0\ ; \qquad (1)$$

$$(\sigma_{zx}^0)_* = 2B\ ;\ (\sigma_{zy}^0)_* = 2B_1\ , \qquad (1)$$

де $[\ ]_*$ і $(\ )_*$ визначають відповідно стрибок (різницю) і суму величин на поверхнях $\pm h(x, y)$; $B = \tau^\infty \cos\alpha$; $B_1 = \tau^\infty \sin\alpha$. Згідно зі співвідношеннями (1) і даними праці [2] задачу зводимо до розв'язку системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon'}\left(\frac{\partial^2}{d_1 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_S \frac{[\tilde{u}_x]_*}{R} d\xi d\eta + \frac{\mu}{2\pi\varepsilon' d_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\iint_S \frac{[\tilde{u}_y]_*}{R} d\xi d\eta -$$

Контактна особа: М. М. СТАДНИК, e-mail: maths@forest.Lviv.ua

$$-\frac{d_3}{4\pi G_1 d_1}\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{[\tilde{\sigma}_{zz}]_*}{R}d\xi d\eta - \frac{[\tilde{u}_x]_*}{h} = \frac{2B(\varepsilon'-1)}{G_1};$$

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon'}\left(\frac{\partial^2}{d_1\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iint_S \frac{[\tilde{u}_y]_*}{R}d\xi d\eta + \frac{\mu}{2\pi\varepsilon' d_1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\iint_S \frac{[\tilde{u}_x]_*}{R}d\xi d\eta -$$

$$-\frac{d_3}{4\pi G_1 d_1}\frac{\partial}{\partial y}\iint_S \frac{[\tilde{\sigma}_{zz}]_*}{R}d\xi d\eta - \frac{[\tilde{u}_y]_*}{h} = \frac{2B_1(\varepsilon'-1)}{G_1}; \quad (2)$$

$$\frac{[\tilde{u}_x]_*}{h} + \frac{1}{G_1 h}\int_{a_1}^{x}[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}]_* dx = \frac{2B(1-\varepsilon')}{G_1};$$

$$\frac{[\tilde{u}_y]_*}{h} + \frac{1}{G_1 h}\int_{b_1}^{y}[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}]_* dy = \frac{2B_1(1-\varepsilon')}{G_1},\ (x,y)\in S$$

відносно стрибків збурених зміщень $[\tilde{u}_x]_*$, $[\tilde{u}_y]_*$ та напружень $[\tilde{\sigma}_{zz}]_*$=$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}]_*$+ +$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}]_*$ берегів $z=\pm 0$ тріщини S, на яких діють зусилля, що знесені з поверхонь включення $\pm h(x,y)$; $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; $\varepsilon'=G_1/G$; $d_1=1-\mu$; $d_3=1-2\mu$; $\vec{u}=\bar{\vec{u}}+\vec{u}^0$; $\hat{\sigma}=\hat{\bar{\sigma}}+\hat{\sigma}^0$; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці; a_1, b_1 – відповідно найменші значення абсциси і ординати контуру області S.

Розглянемо еліпсоїдальне ($x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\le 1$) включення, тобто $h(x,y)=\pm c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}$; S – еліптична область (x^2/a^2+ $+y^2/b^2\le 1$; $a_1=-a$; $b_1=-b$). Тоді розв'язок інтегральних рівнянь (2) подамо у вигляді

$$[\tilde{u}_x]_* = C_1\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2};\ [\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}]_* = C_2\partial\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}/\partial x;$$
$$[\tilde{u}_y]_* = C_3\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2};\ [\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}]_* = C_4\partial\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}/\partial y, \quad (3)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – невідомі сталі.

Підставивши вирази (3) у рівняння (2), одержимо:

$$C_1 = bB(1-\varepsilon')(d_3 b^2 F_1(k)/a^2+2d_1\lambda)/(\lambda G_1\Pi_1);$$
$$C_2 = 2bB(1-\varepsilon')(E(k)-\mu F_2(k))/(\lambda\varepsilon'\Pi_1);$$
$$C_3 = bB_1(1-\varepsilon')(d_3 F_2(k)+2d_1\lambda)/(\lambda G_1\Pi_2); \quad (4)$$
$$C_4 = 2bB_1(1-\varepsilon')(E(k)-\mu b^2 F_1(k)/a^2)/(\lambda\varepsilon'\Pi_2);$$
$$\Pi_1 = (E(k)-\mu F_2(k))/\varepsilon' + d_3 b^2 F_1(k)/(2a^2)+\lambda d_1;$$
$$\Pi_2 = (E(k)-\mu b^2 F_1(k)/a^2)/\varepsilon' + d_3 F_2(k)/2+\lambda d_1.$$

Тут $F_1(k)=(K(k)-E(k))/k^2$; $F_2(k)=(E(k)-b^2K(k)/a^2)/k^2$; (5)

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta;\ K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};\ \lambda=\frac{b}{c};\ k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Величини C_1, C_2, C_3, C_4 у часткових випадках набувають таких значень:

1) якщо $\varepsilon'=1$, то $C_1=C_2=C_3=C_4=0$; 2) якщо $\varepsilon'=0$, то

$$C_1 = Bb(2d_1a^2\lambda + b^2d_3F_1(k))/(a^2\lambda G(E(k)-\mu F_2(k)));\ C_2 = 2Bb/\lambda;$$
$$C_3 = B_1ba^2(2d_1\lambda + d_3F_2(k))/(\lambda G(a^2E(k)-b^2\mu F_1(k)))\ ;\ C_4 = 2B_1b/\lambda; \quad (6)$$

3) якщо $\varepsilon' \to \infty$, то

$$C_1 = -2Bb/(\lambda G)\ ;\ C_2 = -4bB(E(k)-\mu F_2(k))/(\lambda(d_3b^2F_1(k)/a^2 + 2\lambda d_1));$$
$$C_3 = -2bB_1/(\lambda G)\ ;\ C_4 = -4bB_1(E(k)-\mu b^2F_1(k)/a^2)/(\lambda(d_3F_2(k)+2\lambda d_1))\ ; \quad (7)$$

Користуючись розв'язком (3), на основі відомих даних [2], матимемо вирази

$$\sigma_{zx} = [2GC_1\left(\mu F_2(k)-E(k)\right) + d_3b^2C_2F_1(k)/a^2]/(4bd_1) + B\ ;$$
$$\sigma_{zy} = [2GC_3(\mu b^2F_1(k)/a^2 - E(k)) + d_3C_4F_2(k)]/(4bd_1) + B_1,\ (x,y)\in S \quad (8)$$

для обчислення напружень у включенні, звідки, враховуючи (4), одержимо:

$$\sigma_{zx} = B - B(1-\varepsilon')(E(k)-\mu F_2(k))/(\varepsilon'\Pi_1)$$
$$\sigma_{zy} = B_1 - B_1(1-\varepsilon')(E(k)-\mu b^2F_1(k)/a^2)/(\varepsilon'\Pi_2),\quad (x,y)\in S.$$

Як бачимо, задовольняються умови для однорідного тіла, якщо $\varepsilon' = 0$, то $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$, а для $\varepsilon' \to \infty$

$$\sigma_{zx} = B + 2B(E(k)-\mu F_2(k))/(d_3b^2F_1(k)/a^2 + 2\lambda d_1)\ ;$$
$$\sigma_{zy} = B_1 + 2B_1(E(k)-b^2\mu F_1(k)/a^2)/(d_3F_2(k)+2\lambda d_1)\ ,\ (x,y)\in S\ . \quad (9)$$

Перейшовши до рухомої локальної системи координат O_1ntz з початком на контурі області S, матимемо асимптотичні подання для стрибків зміщень та напружень:

$$[\tilde{u}_x]_* = C_1\sqrt{-2f(\varphi)n/(ab)} + O(n)\ ;\ [\tilde{u}_y]_* = C_3\sqrt{-2f(\varphi)n/(ab)} + O(n)\ ;$$
$$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}]_* = -C_2\cos\varphi/\sqrt{-2nf(\varphi)a/b} + O(n)\ ; \quad (10)$$
$$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}]_* = -C_4\sin\varphi/\sqrt{-2nf(\varphi)b/a} + O(n),$$

де $f(\varphi) = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$; O_1n – зовнішня нормаль до контуру області S; φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$); $|n| \ll a, b$.

Враховуючи, що

$$[\tilde{u}_n]_* = [\tilde{u}_x]_*\cos\theta + [\tilde{u}_y]_*\sin\theta;\qquad [\tilde{u}_t]_* = -[\tilde{u}_x]_*\sin\theta + [\tilde{u}_y]_*\cos\theta\ ,$$

одержуємо формули

$$[\tilde{u}_n]_* = (C_1b\cos\varphi + C_3a\sin\varphi)\sqrt{-2n/(abf(\varphi))} + O(n)\ ;$$
$$[\tilde{u}_t]_* = (-C_1a\sin\varphi + C_3b\cos\varphi)\sqrt{-2n/(abf(\varphi))} + O(n)\ , \quad (11)$$

де θ – кут між додатними напрямками осей Ox і O_1n; $\cos\theta = b\cos\varphi/f(\varphi)$; $\sin\theta = a\sin\varphi/f(\varphi)$.

Для визначення відповідних стрибків напружень $[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}]_*$ матимемо співвідношення

$$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}]_* = [\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}]_*\cos\theta + [\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}]_*\sin\theta\ ;\quad [\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}]_* = -[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}]_*\sin\theta + [\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}]_*\cos\theta\ ,$$

або, враховуючи вирази (3), (10),

$$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}]_* = -(C_2b^2\cos^2\varphi + C_4a^2\sin^2\varphi)/\sqrt{-2nabf^3(\varphi)} + O(n)\ ;$$
$$[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}]_* = \sqrt{ab}\sin 2\varphi(C_2 - C_4)/\left(2\sqrt{-2nf^3(\varphi)}\right) + O(n)\ . \quad (12)$$

Тут $[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}]_*$ і $[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}]_*$ – стрибки напружень, вектори згинних моментів яких відповідно перпендикулярні до площин $t = 0$ і $n = 0$.

Підставивши співвідношення (11), (12) у вирази

$$K_{\mathrm{II}} = -\lim_{n\to -0}\sqrt{-2\pi n}[G[\tilde{u}_n]'_{*n} - d_3[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}]_*/2]/(2d_1);$$

$$K_{\mathrm{III}} = -\lim_{n\to -0}\sqrt{-2\pi n}[G[\tilde{u}_t]'_{*n} - d_3[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}]_*/(2d_1)]/2,$$

одержуємо подання

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{II}} &= \sqrt{\pi}\left[G(bC_1\cos\varphi + aC_3\sin\varphi) - d_3(C_2b^2\cos^2\varphi + \right.\\ &\left. + C_4a^2\sin^2\varphi)/(2f(\varphi))\right]/(2d_1\sqrt{abf(\varphi)});\\ K_{\mathrm{III}} &= \sqrt{\pi}\left[G(-aC_1\sin\varphi + bC_3\cos\varphi) + d_3ab\sin 2\varphi(C_2 - \right.\\ &\left. - C_4)/(4d_1f(\varphi))\right]/(2\sqrt{abf(\varphi)}) \end{aligned} \tag{13}$$

для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_{II} і K_{III} для еліптичної тріщини, на берегах якої діють напруження, що знесені з поверхонь $\pm h(x, y)$ пружного включення.

Якщо у виразах (13) перейти спочатку до границі $\lambda\to\infty$ ($c\to 0$), то одержимо, що для пластинчастого пружного включення $K_{\mathrm{II}}=K_{\mathrm{III}}=0$. Перейшовши у (13) спочатку до границі $\varepsilon'\to 0$, одержимо подання для обчислення КІН у разі еліптичної тріщини

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{II}} &= \frac{\tau^\infty\sqrt{\pi b}}{2d_1\lambda\sqrt{af(\varphi)}}\left[\frac{b(2d_1a^2\lambda + d_3b^2F_1(k))}{a^2(E(k) - \mu F_2(k))}\cos\alpha\cos\varphi + \right.\\ &\left. + \frac{a^3(2d_1\lambda + d_3F_2(k))}{a^2E(k) - \mu b^2F_1(k)}\sin\alpha\sin\varphi - d_3(b^2\cos\alpha\cos^2\varphi + a^2\sin\alpha\sin^2\varphi)/f(\varphi)\right];\\ K_{\mathrm{III}} &= \frac{\tau^\infty\sqrt{\pi b}}{2\lambda\sqrt{af(\varphi)}}\left[-\frac{b^2d_3F_1(k) + 2d_1a^2\lambda}{a(E(k) - \mu F_2(k))}\cos\alpha\sin\varphi + \right.\\ &\left. + \frac{ba^2\left(d_3F_2(k) + 2d_1\lambda\right)}{a^2E(k) - \mu b^2F_1(k)}\sin\alpha\cos\varphi - d_3ab\sqrt{2}\sin 2\varphi\,\sin(\alpha - \pi/4)/(2d_1f(\varphi))\right], \end{aligned} \tag{14}$$

на берегах якої діють напруження, знесені з поверхонь еліпсоїдальної порожнини. Поклавши у виразах (14) $c\to 0$, одержимо відомі [3, 4] подання для K_{II} і K_{III} для еліптичної тріщини.

Якщо у виразах (13) $\varepsilon'\to\infty$, одержимо формули

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{II}} &= -\tau^\infty\sqrt{\pi b}\left[b(1 - d_3b(E(k) - \mu F_2(k))\cos\varphi/(f(\varphi)(d_3b^2F_1(k)/a^2 + \right.\\ &+ 2\lambda d_1)))\cos\alpha\cos\varphi + a(1 - d_3a(E(k) - \mu b^2F_1(k)/a^2)\sin\varphi/(f(\varphi)(d_3F_2(k) + \\ &\left. + 2\lambda d_1)))\sin\alpha\sin\varphi\right]/(d_1\lambda\sqrt{af(\varphi)});\\ K_{\mathrm{III}} &= \tau^\infty\sqrt{\pi b}\left[a\cos\alpha\sin\varphi - b\sin\alpha\cos\varphi - d_3ab\sin 2\varphi((E(k) - \right.\\ &- \mu F_2(k))\cos\alpha/(d_3b^2F_1(k)/a^2 + 2\lambda d_1) - (E(k) - b^2\mu F_1(k)/a^2)\sin\alpha/\left(d_3F_2(k) + \right.\\ &\left.\left. + 2\lambda d_1)\right)/(2d_1f(\varphi))\right]/(\lambda\sqrt{af(\varphi)}) \end{aligned} \tag{15}$$

для обчислення КІН для еліптичної тріщини, на берегах якої $z=\pm 0$ діють напруження, знесені з поверхонь $\pm h(x, y)$ абсолютно жорсткого включення.

Для визначення напружень σ_{zn} і σ_{zt} у матриці скористаємося співвідношеннями [2]

$$\begin{aligned}&\sigma_{zn}=2nK_{\rm II}/\sqrt{\pi(\rho+2n)^3}+\tilde{\sigma}_{zn}(0)\rho\sqrt{\rho}/\sqrt{(\rho+2n)^3}+\sigma_{zn}^0\,;\\&\sigma_{zt}=K_{\rm III}/\sqrt{\pi(\rho+2n)}+\sigma_{zt}^0\,,\ \rho=bf(\varphi)/(a\lambda^2)\end{aligned}\qquad(16)$$

для їх розподілу в околі включення. Тут $\tilde{\sigma}_{zn}(0)$ – збурене контактне напруження на контурі області S.

Аналіз першої із формул (16) свідчить, що напруження σ_{zn} набуває найбільшого значення для $n=\rho(2K_{\rm II}-3\tilde{\sigma}_{zn}(0)\sqrt{\pi\rho})/(2K_{\rm II})$, яке залежить від пружних і геометричних параметрів включення. У кожному конкретному випадку, за необхідності, його можна обчислити, використовуючи рівності (8) і (13). Вважаючи, що у виразах (16) n=0, ρ>0, на основі (8), (13) і рівності контактних напружень на контурі області S одержуємо подання

$$\begin{aligned}\sigma_{zn}=&\Big[b(2GC_1(\mu F_2(k)-E(k))+d_3C_2b^2F_1(k)/a^2)\cos\varphi+\\&+a(2GC_3(\mu b^2F_1(k)/a^2-E(k)\big)+d_3C_4F_2(k))\sin\varphi\Big]/(4bd_1f(\varphi))+\\&+\tau^\infty\psi_1(\alpha,\varphi)/f(\varphi);\\\sigma_{zt}=&\big[G(-aC_1\sin\varphi+bC_3\cos\varphi)+d_3ab\sin2\varphi(C_2-\\&-C_4\big)/(4d_1f(\varphi))\big]/(2cf(\varphi))+\tau^\infty\psi_2(\alpha,\varphi)/f(\varphi),\end{aligned}\qquad(17)$$

які служать для обчислення концентрації напружень у матриці на контурі S. Тут $\psi_1(\alpha,\varphi)=b\cos\alpha\cos\varphi+a\sin\alpha\sin\varphi$; $\psi_2(\alpha,\varphi)=b\sin\alpha\cos\varphi-a\cos\alpha\sin\varphi$.

Поклавши у виразах (17) $\varepsilon'=0$, одержуємо формули для визначення концентрації напружень на контурі еліпсоїдальної порожнини:

$$\begin{aligned}\sigma_{zt}=&\frac{\tau^\infty}{2f(\varphi)}\Bigg[-\frac{a(b^2d_3F_1(k)/a^2+2d_1\lambda)}{E(k)-\mu F_2(k)}\cos\alpha\sin\varphi+\\&+\frac{b(d_3F_2(k)+2d_1\lambda)}{E(k)-b^2\mu F_1(k)/a^2}\sin\alpha\cos\varphi-\\&-d_3ab\sqrt{2}\sin2\varphi\sin(\alpha-\pi/4)/(2d_1f(\varphi))\Bigg]+\tau^\infty\psi_2(\alpha,\varphi)/f(\varphi);\ \ \sigma_{zn}=0.\end{aligned}\qquad(18)$$

Якщо $a=b$, то із подань (18) дістанемо відповідні співвідношення

$$\begin{aligned}\sigma_{zt}=&\tau^\infty\big[\sin(\alpha-\varphi)((8d_1\lambda+d_3\pi)/(2\pi(2-\mu))+1)-\\&-d_3\sqrt{2}\sin2\varphi\sin(\alpha-\pi/4)/(4d_1)\big]\,;\ \sigma_{zn}=0\end{aligned}\qquad(19)$$

для сфероїдальної порожнини.

Для визначення σ_{zn} і σ_{zt} у матриці на контурі S для абсолютно жорсткого еліпсоїдального включення $(\varepsilon'\to\infty)$ із (17) одержуємо вирази

$$\begin{aligned}&\sigma_{zn}=2\tau^\infty\big[b(E(k)-\mu F_2(k))\cos\alpha\cos\varphi/(d_3b^2F_1(k)/a^2+2d_1\lambda)+\\&+a\big(E(k)-\mu b^2F_1(k)/a^2)\sin\alpha\sin\varphi/(d_3F_2(k)+2\lambda d_1)\big]/f(\varphi)+\tau^\infty\psi_1(\alpha,\varphi)/f(\varphi);\\&\sigma_{zt}=\tau^\infty d_3ab\sin2\varphi\Big[(E(k)-\mu b^2F_1(k)/a^2)\sin\alpha/(d_3F_2(k)+2\lambda d_1)-\\&-(E(k)-\mu F_2(k))\cos\alpha/(d_3b^2F_1(k)/a^2+2\lambda d_1)\Big]/(2d_1f^2(\varphi)).\end{aligned}\qquad(20)$$

Якщо у співвідношеннях (20) покласти $a = b$, то матимемо подання

$$\sigma_{zn} = \tau^{\infty} \cos(\alpha - \varphi)(1 + 2\pi(2 - \mu)/(d_3\pi + 8\lambda d_1)) ;$$
$$\sigma_{zt} = \tau^{\infty} d_3\pi\sqrt{2}\,(2 - \mu)\sin 2\varphi \sin(\alpha - \pi/4)/(2d_1(d_3\pi + 8d_1\lambda)), \tag{21}$$

що служать для встановлення концентрації напружень біля тонкого сфероїдального абсолютно жорсткого включення.

Якщо для визначення контактних напружень $\tilde{\sigma}_{zn}(0)$ на контурі області S, коли $\rho << d$, використати відоме $[4]$ подання $\tilde{\sigma}_{zn}(0) = K_{\text{II}}/\sqrt{\pi\rho}$, що не забезпечує їх рівності, то на основі виразів (16) при n=0 одержимо, що

$$\sigma_{zn} = K_{\text{II}}/\sqrt{\pi\rho} + \tau^{\infty}\psi_1(\alpha,\varphi)/f(\varphi), \tag{22}$$

де K_{II} – подається формулою (13).

Підставивши K_{II} із подань (14) у вираз (22) і спрямувавши $\rho \to 0$, отримаємо, що $\sigma_{zn} \to \infty$, тобто матимемо результат для тріщини.

Для обчислення концентрації напружень σ_{zx} і σ_{zy} у матриці біля пружного включення потрібно користуватися формулами

$$\sigma_{zx} = (b\sigma_{zn}\cos\varphi - a\sigma_{zt}\sin\varphi)/f(\varphi),$$
$$\sigma_{zy} = (a\sigma_{zn}\sin\varphi + b\sigma_{zt}\cos\varphi)/f(\varphi), \tag{23}$$

де σ_{zn}, σ_{zt} визначають співвідношеннями (17).

Якщо у поданнях (8), (13), (17) спрямувати $a \to \infty$, то за відповідних значень α і φ одержимо співвідношення для тунельного пружного еліптичного включення ($y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1$), тобто розв'язок плоскої і антиплоскої задач, зокрема для абсолютно жорсткого лінійного включення [5].

РЕЗЮМЕ. Получены удобные для инженерного применения формулы для вычисления напряжений в тонком включении и их концентрации в матрице возле его контура. Исследовано влияние жесткости включения и его геометрических параметров на напряжения в матрице и включении. Рассмотрены частные случаи задачи для эллипсоидальной полости и абсолютно жесткого эллипсоидального включения. Получены выражения для вычисления соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений.

SUMMARY. The formulae for evaluation of stresses in a thin inclusion and their concentration in the matrix at the inclusion contour, convenient for engineering applications, have been obtained. The influence of inclusion rigidity and its geometrical parameters on stresses in the matrix and in the inclusion has been investigated. Special cases of the problem for ellipsoidal emptiness and absolutely rigid ellipsoidal inclusion are considered. Correlations for corresponding stress intensity factors are obtained.

1. *Силованюк В. П., Стадник М. М.* Тонкое упругое включение в условиях сдвига // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 2. – С. 95–101.
2. *Стадник М. М.* Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – № 6. – С. 30–40.
   (*Stadnyk M. M.* A Method for the Solution of Three-Dimensional Thermoelasticity Problems for Bodies with Thin Inclusions // Materials Science. – 1994. – № 6. – P. 643–652.)
3. *Kassir M. K. and Sih G. C.* Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings // Trans ASME, ser. E, J. Appl. Mech. – 1966. – **33**, № 3. – P. 601–611.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
5. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.

Одержано 14.07.2009