

УДК 620.191.22

КАТОДНІ ТА АНОДНІ ДІЛЯНКИ, ЗІНІЦІЙОВАНІ НАПРУЖЕННЯМИ НА МЕЖІ ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ ЗІ СЕРЕДОВИЩЕМ

М. Г. СТАЩУК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Встановлено взаємозв'язок між полем механічних напружень та зсувом електродного потенціалу на контурі еліптичного наскрізного вирізу, заповненого середовищем, який дає можливість у граничному випадку оцінювати зміщення електродного потенціалу, обумовленого напружено-деформованим станом в околі вершини еліптичної тріщини. Для цього чисельно розв'язано систему рівнянь типу Гельмгольца і встановлено відхилення електричних та електродного потенціалів під дією зовнішніх механічних зусиль від аналогічних за їх відсутності. Оцінено катодні та анодні ділянки, зініційовані полем напружень на межі еліптичного отвору зі середовищем.

Ключові слова: *еліптичний отвір, середовище, поле механічних напружень, зміщення електричних та електродного потенціалів, подвійний електричний шар, рівняння Гельмгольца, непрямий метод граничних елементів, катодні та анодні ділянки, поляризаційні опори.*

Внаслідок деформування металів, що контактують із середовищами, змінюються фізико-механічні параметри таких систем [1], зокрема електричний [2] та електродний потенціали [3, 4]. Зміщення електродного потенціалу, викликаного полем напружень, для плоских поверхонь [5, 6], що контактують із середовищем, та для кругового отвору [3, 4, 7], заповненого середовищем, оцінено аналітично у замкненому вигляді. Однак розрахунки електричних та електродного потенціалів для тріщиноподібних дефектів, зокрема еліптичного отвору, фактично відсутні. Розв'язання задач такого типу актуальні для граничного переходу від еліптичного дефекту, заповненого середовищем, до тріщиноподібного. До того ж це уможливає оцінку катодних та анодних ділянок, зініційованих деформаційним полем на межі еліптичного отвору та середовища. Саме такі задачі слід коректно розв'язати.

Постава задачі та основні вихідні рівняння. Розглянемо нескінченне металеве тіло з еліптичним отвором (рис. 1), яке розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності p . Вважаємо, що тіло знаходиться в умовах плоскої задачі [8, 9], а еліптичний отвір заповнений електролітичним середовищем. Під дією механічних навантажень у тілі виникає напружено-деформований стан, який ініціює зміну електричних потенціалів у системі метал–середовище та зміщує її електродний потенціал [2] в катодний або анодний боки. Потрібно встановити характер розподілу цього потенціалу за таких умов навантаження та вказати координати меж поділу катодних і анодних ділянок, тобто координати такого поділу.

За контакту металевого тіла із електролітом на лінії їх поділу виникає подвійний електричний шар [2]. Приймаємо, що товщина λ такого шару стала по контуру еліпса [2].

Для опису й розв'язання поставленої задачі скористаємось відповідними рівняннями. Електричний потенціал для пружного металевого тіла $\phi_m(x, y)$ у декартових координатах визначимо так [1]:

Контактна особа: М. Г. СТАЩУК, e-mail: stashchuk@ipm.lviv.ua

Рис. 1. Еліптичний отвір, заповнений середовищем, у пружному тілі, навантаженому зусиллями інтенсивності p : I – метал; II – подвійний електричний шар; III – середовище.

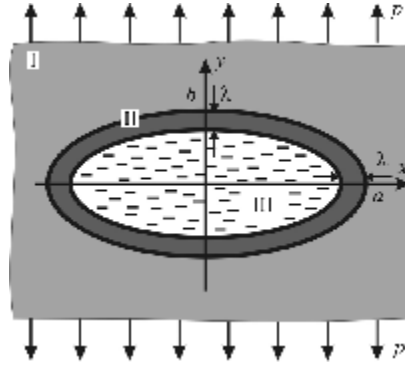


Fig. 1. An elliptic hole filled with environment, in an elastic body loaded with forces of intensity p : I – metal; II – a double electric layer; III – environment.

$$\Delta \varphi_m(x, y) = \chi_m^2 \varphi_m(x, y) + \frac{\beta K}{\varepsilon_0} \varepsilon_\sigma(x, y), \quad (x, y) \in \left\{ (x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1 \right\}, \quad (1)$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, $\chi_m^2 = \rho_m C_m \varepsilon_0^{-1}$, а ρ_m , C_m – відповідно густина та електроємність металу, ε_0 – діелектрична стала;

$$\varepsilon_\sigma(x, y) = p \frac{1+\nu}{3K} \left(1 + \operatorname{Re} \left(\frac{(a+b)^2 + a^2 - b^2}{z^2 + z\sqrt{z^2 - a^2 + b^2} - a^2 + b^2} \right) \right) - \text{відносне об'ємне розширення для плоскої задачі, коли тіло з еліптичним вирізом [8]; } z = x+iy, i^2 = -1;$$

β – електрострикційний коефіцієнт; ν , K – відповідно, коефіцієнт Пуассона та модуль об'ємного стиску; a , b – півосі еліптичного вирізу.

Рівняння для визначення електричних потенціалів у подвійному електричному шарі φ_{mc} та середовищі φ_c матимуть вигляд [2–7]

$$\Delta \varphi_{mc}(x, y) = \chi_{mc}^2 \varphi_{mc}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{mc}, \quad (2)$$

$$\Delta \varphi_c(x, y) = \chi_c^2 \varphi_c(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_c. \quad (3)$$

Тут $\Omega_{mc} = \left\{ (x, y) : \left(x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1 \right) \cap \left(x^2/(a-\lambda)^2 + y^2/(b-\lambda)^2 > 1 \right) \right\}$;

$\Omega_c = \left\{ (x, y) : x^2/(a-\lambda)^2 + y^2/(b-\lambda)^2 < 1 \right\}$; $\chi_{mc}^2 = 2F^2 I (\varepsilon \varepsilon_0 R_g T)^{-1}$ та $\chi_c^2 = e^2 (kT \varepsilon \varepsilon_0)^{-1} \sum_j z_j^2 n_j$ – сталі подвійного електричного шару та середовища, де

I – іонна сила розчину, визначена за теорією розчинів Дебая–Гюккеля [2]; F – число Фарадея; R_g – універсальна газова стала; ε – відносна діелектрична проникність середовища; $e z_j$ – заряд j -го типу іонів; n_j – їх кількість; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура.

Умови спряження для системи диференціальних рівнянь (1)–(3) такі [4]:

$$\varphi_m(x, y) = \varphi_{mc}(x, y), \quad \sigma_m \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial \mathbf{n}^m} = \sigma_{mc} \frac{\partial \varphi_{mc}(x, y)}{\partial \mathbf{n}^{mc}}, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (4)$$

$$\varphi_c(x, y) = \varphi_{mc}(x, y), \quad \sigma_c \frac{\partial \varphi_c(x, y)}{\partial \mathbf{n}^c} = \sigma_{mc} \frac{\partial \varphi_{mc}(x, y)}{\partial \mathbf{n}^{mc}}, \quad (x, y) \in \Gamma_3. \quad (5)$$

Тут $\Gamma_2 = \left\{ (x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \right\}$, $\Gamma_3 = \left\{ (x, y) : x^2/(a-\lambda)^2 + y^2/(b-\lambda)^2 = 1 \right\}$; $\partial / \partial \mathbf{n}^V$ – похідна по одиничній зовнішній нормалі межі області Ω_V (тут і нижче

індекс V відповідає металевій області (m), подвійному шару (mc) та середовищу (c); область Ω_m визначимо далі); σ_m , σ_{mc} та σ_c – електропровідність металу, електричного шару та середовища. Межі Γ_j ($j = 1, 2, 3$) та області Ω_v зображені на рис. 2. Потрібно врахувати також обмеженість електричного потенціалу в металі на великій відстані від дефекту. Умови (4), (5) забезпечують неперервність електричних потенціалів та нормальних складників струмів на межі поділу відповідних електропровідних фаз.

Числова реалізація задачі. Систему рівнянь (1)–(3) розв’язуємо непрямым методом граничних елементів [10]. З аналізу отриманих раніше [3–7] результатів приймаємо, що на відстані порядку $\lambda_m = 10\chi_m^{-1}$ електричний потенціал металу набуває вигляду $\varphi_m(x, y) = -\beta K \varepsilon_\sigma(x, y) / \varepsilon_0 \chi_m^2$. Тому рівняння (1) розглядатимемо в області

$$\Omega_m = \left\{ (x, y) : \left(x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1 \right) \cap \left(x^2/(a + \lambda_m)^2 + y^2/(b + \lambda_m)^2 < 1 \right) \right\},$$

причому до умов спряження (4), (5) потрібно додати крайову умову

$$\varphi_m(x, y) = -\frac{\beta K}{\varepsilon_0 \chi_m^2} \varepsilon_\sigma(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (6)$$

де $\Gamma_1 = \left\{ (x, y) : x^2/(a + \lambda_m)^2 + y^2/(b + \lambda_m)^2 = 1 \right\}$.

Інтегральне зображення розв’язків рівнянь (1)–(3). Побудова дискретно-континуальної моделі. Розв’язок кожного з цих рівнянь шукаємо в окремій площині \mathbf{R}_V^2 .

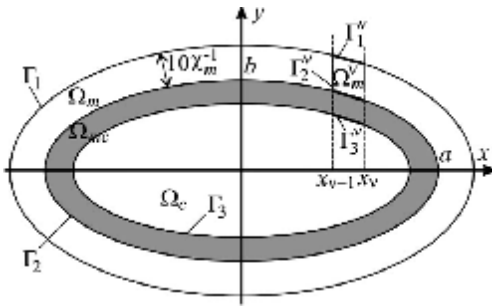


Рис. 2. Дискретизація меж та областей еліптичної форми.

Fig. 2. Discretization of borders and areas of an elliptical form.

При цьому на межі кожної області для металу, подвійного шару та середовища вводимо фіктивні джерела потенціалів невідомої наперед інтенсивності φ_{vj} (індекс j вказує на межу Γ_j , на якій задаємо фіктивні потенціали). Межу Γ_j кожної області Ω_v дискретизуємо з допомогою лінійних граничних елементів Γ_j^v ($j = 1, 2, 3$), причому $\Gamma_j^v \cap \Gamma_j^\mu = \emptyset$, коли $v \neq \mu$, а саму область Ω_m – за допомогою квадратичних елементів Ω_m^v (рис. 2).

Лінійні граничні елементи Γ_j^v характеризуємо координатами їх середніх точок (x_j^v, y_j^v) . Приймаємо, що вздовж кожного з них інтенсивність фіктивних джерел потенціалів φ_{vj}^v постійна.

Оскільки товщина області Ω_m є мала (порядку нанометрів), то припускаємо, що для комірки Ω_m^v величина $\beta K \varepsilon_\sigma(x, y) / \varepsilon_0$ є стала і позначаємо її через ψ^v . Тоді для кожної дискретизованої області Ω_v запишемо такі інтегральні зображення для відшукування електричних потенціалів $\varphi_v(x, y)$ та потоків $\beta_v(x, y)$ [10]:

– для металу

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{v=1}^N \varphi_{m1}^v P_{m1}^v(x, y) + \sum_{v=1}^N \varphi_{m2}^v P_{m2}^v(x, y) + \sum_{v=1}^N \psi^v d^v(x, y) + C_m, \quad (7)$$

$$\beta_m(x, y) = \frac{\partial \phi_m(x, y)}{\partial \mathbf{n}^m(x, y)} = \sum_{v=1}^N \phi_{m1}^v T_{m1}^v(x, y) + \sum_{v=1}^N \phi_{m2}^v T_{m2}^v(x, y) + \sum_{v=1}^N \psi^v r^v(x, y);$$

– для подвійного електричного шару

$$\phi_{mc}(x, y) = \sum_{v=1}^N \phi_{mc2}^v P_{mc2}^v(x, y) + \sum_{v=1}^N \phi_{mc3}^v P_{mc3}^v(x, y) + C_{mc}, \quad (8)$$

$$\beta_{mc}(x, y) = \frac{\partial \phi_{mc}(x, y)}{\partial \mathbf{n}^{mc}(x, y)} = \sum_{v=1}^N \phi_{mc2}^v T_{mc2}^v(x, y) + \sum_{v=1}^N \phi_{mc3}^v T_{mc3}^v(x, y);$$

– для середовища

$$\phi_c(x, y) = \sum_{v=1}^N \phi_{c3}^v P_{c3}(x, y) + C_c, \quad \beta_c(x, y) = \frac{\partial \phi_c(x, y)}{\partial \mathbf{n}^c(x, y)} = \sum_{v=1}^N \phi_{c3}^v T_{c3}(x, y). \quad (9)$$

$$\text{Тут } P_{Vj}^v(x, y) = \int_{\Gamma_j^v} G_v((x, y), (\xi, \eta)) d\Gamma_j^v(\xi, \eta); \quad d^v(x, y) = \int_{\Omega_m^v} G_m((x, y), (\xi, \eta)) d\Omega_m^v(\xi, \eta);$$

$$T_{Vj}^v(x, y) = \int_{\Gamma_j^v} F_V((x, y), (\xi, \eta), \mathbf{n}^V) d\Gamma_j^v(\xi, \eta);$$

$$r^v(x, y) = \int_{\Omega_m^v} F_m((x, y), (\xi, \eta), \mathbf{n}^m) d\Omega_m^v(\xi, \eta); \quad G_V((x, y), (\xi, \eta)) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\chi_V r) -$$

фундаментальний розв'язок (ФР) для оператора $\Delta - \chi_V^2$; $F_V((x, y), (\xi, \eta), \mathbf{n}^V) = -\frac{\chi_V}{4} H_1^{(1)}(i\chi_V r) \left(\frac{x-\xi}{r} n_x^V(x, y) + \frac{y-\eta}{r} n_y^V(x, y) \right)$; $H_0^{(1)}(z)$, $H_1^{(1)}(z)$ – функції

Ханкеля першого роду нульового та першого порядків [11]; $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$;

$\mathbf{n}^V(x, y) = (n_x^V, n_y^V)$ – вектор одиничної нормалі.

Введення констант C_v у зображеннях (7)–(9) пов'язане з відповідним характером поведінки ФР у нескінченно віддалених точках. Задовольняючи крайову умову (6) та умови спряження (4), (5), на основі інтегральних зображень (7)–(9) одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для відшукування невідомих $\phi_{V,j}^v$.

Зокрема, з крайової умови (6)

$$\sum_{v=1}^N \left(\phi_{m1}^v P_{m1}^v(x_1^\mu, y_1^\mu) + \phi_{m2}^v P_{m2}^v(x_1^\mu, y_1^\mu) \right) = -\sum_{v=1}^N \psi^v d^v(x_1^\mu, y_1^\mu) - \frac{\beta_K}{\epsilon_0 \chi_m^2} \epsilon_\sigma(x_1^\mu, y_1^\mu) - C_m, \quad (10)$$

$$(x_1^\mu, y_1^\mu) \in \Gamma_1^v \subset \Gamma_1,$$

де $\mu = 1 \dots N$;

з умови спряження (4) на контурі Γ_2

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^N \phi_{mj}^v P_{mj}^v(x_2^\mu, y_2^\mu) - \sum_{j=2}^3 \sum_{v=1}^N \phi_{mcj}^v P_{mcj}^v(x_2^\mu, y_2^\mu) = -\sum_{v=1}^N \psi^v d^v(x_2^\mu, y_2^\mu) - C_m + C_{mc}, \quad (11)$$

$$(x_2^\mu, y_2^\mu) \in \Gamma_2^v \subset \Gamma_2,$$

$$\sigma_m \sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^N \phi_{mj}^v T_{mj}^v(x_2^\mu, y_2^\mu) - \sigma_{mc} \sum_{j=2}^3 \sum_{v=1}^N \phi_{mcj}^v T_{mcj}^v(x_2^\mu, y_2^\mu) = -\sigma_m \sum_{v=1}^N \psi^v r^v(x_2^\mu, y_2^\mu),$$

$$(x_2^\mu, y_2^\mu) \in \Gamma_2^v \subset \Gamma_2;$$

з умови (5) на контурі Γ_3

$$\sum_{v=1}^N \phi_{mc2}^v P_{mc2}^v(x_3^\mu, y_3^\mu) + \sum_{v=1}^N \phi_{mc3}^v P_{mc3}^v(x_3^\mu, y_3^\mu) - \sum_{v=1}^N \phi_{c3}^v P_{c3}(x_3^\mu, y_3^\mu) = -C_{mc} + C_c,$$

$$(x_3^\mu, y_3^\mu) \in \Gamma_3^v \subset \Gamma_3, \quad (12)$$

$$\sigma_{mc} \sum_{v=1}^N \phi_{mc2}^v T_{mc2}^v(x_3^\mu, y_3^\mu) + \sigma_{mc} \sum_{v=1}^N \phi_{mc3}^v T_{mc3}^v(x_3^\mu, y_3^\mu) - \sigma_c \sum_{v=1}^N \phi_{c3}^v T_{c3}(x_3^\mu, y_3^\mu) = 0.$$

Для визначення констант C_v необхідно СЛАР (10)–(12) доповнити рівняннями, що виражають рівність нулю сумарної дії всіх джерел у кожній області Ω_v :

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^N \phi_{mj}^v \int_{\Gamma_j^v} d\Gamma_j^v(\xi, \eta) = -\sum_{v=1}^N \psi^v \int_{\Omega^v} d\Omega_m^v(\xi, \eta), \quad \sum_{j=2}^3 \sum_{v=1}^N \phi_{mcj}^v \int_{\Gamma_j^v} d\Gamma_j^v(\xi, \eta) = 0,$$

$$\sum_{v=1}^N \phi_{c3}^v \int_{\Gamma_3^v} d\Gamma_3^v(\xi, \eta) = 0. \quad (13)$$

Чисельне інтегрування. Всі інтеграли у рівняннях (10)–(13) обчислюємо у звичайному сенсі, за винятком $T_{Vj}^\mu(x_j^\mu, y_j^\mu)$, що мають особливість $(1/r)$, коли $(\xi, \eta) = (x_j^\mu, y_j^\mu)$. Їх потрібно розглядати в сенсі головного значення інтеграла Коші [8, 9] з додатковим членом, визначеним за заданою особливістю.

Приймаємо, що для функції Ханкеля за великих z [11]

$$iH_0^{(1)}(iz) = O(\sqrt{2/\pi z} e^{-z}) \quad \text{та} \quad H_1^{(1)}(iz) = O(\sqrt{2/\pi z} e^{-z}). \quad (14)$$

Оскільки χ_v становить 10^7 m^{-1} і більше, то з досить високою точністю на основі асимптот (14) можна допустити, що у СЛАР (10)–(13)

$P_{Vj}^v(x_k^\mu, y_k^\mu) \approx 0$, $T_{Vj}^v(x_k^\mu, y_k^\mu) \approx 0$, $d^v(x_j^\mu, y_j^\mu) \approx 0$ та $r^v(x_2^\mu, y_2^\mu) \approx 0$, якщо $v \neq \mu$, (15) що справедливо за відносно великих розмірів еліпсоподібного вирізу.

Інтеграли у СЛАР (10)–(13), якщо $v = \mu$, визначаємо чисельно за квадратурними формулами Гауса:

$$P_{Vj}^\mu(x_j^\mu, y_j^\mu) \approx -\frac{1}{2} \chi_{(v)}^{-1}, \quad d^\mu(x_1^\mu, y_1^\mu) = d^\mu(x_2^\mu, y_2^\mu) \approx -\frac{1}{2} \chi_m^{-2} \quad \text{та} \quad r^\mu(x_2^\mu, y_2^\mu) \approx \frac{1}{2} \chi_m^{-1}.$$

Інтеграл $T_{Vj}^\mu(x_j^\mu, y_j^\mu)$ із сильною особливістю типу Коші [9, 10] отримуємо у граничному випадку, спрямувавши δ до 0, тобто [10]:

$$T_{Vj}^\mu(x_j^\mu, y_j^\mu) = -\int_{\Gamma_j^\mu} \left[(x_j^\mu - \delta n_x^v - \xi) n_x^v + (y_j^\mu - \delta n_y^v - \eta) n_y^v \right] \frac{\chi_v}{4r} H_1^{(1)}(i\chi_v r) d\Gamma_j^v(\xi, \eta) \approx -1/2.$$

Ненульові інтеграли $P_{Vj}^\mu(x_k^\mu, y_k^\mu)$ та $T_{Vj}^\mu(x_k^\mu, y_k^\mu)$, де $j \neq k$, також визначаємо чисельно за допомогою квадратурних формул Гауса. Після знаходження неві-

домих ϕ_V^j , як розв'язків СЛАР (10)–(13), електричні потенціали $\phi_V(x, y)$ обчислюємо за формулами (7)–(9). Стрибок електродного потенціалу [1] вздовж еліптичного отвору, обумовленого напружено-деформованим станом, знаходимо за формулою

$$\Delta\phi = \phi_m(x_2, y_2) - \phi_c(x_3, y_3), \text{ де } (x_2, y_2) \in \Gamma_2 \text{ та } (x_3, y_3) \in \Gamma_3.$$

Співвідношення для визначення анодних та катодних ділянок, зініційованих напруженнями. Нехай L – серединний контур проміжкового подвійного шару. Координати (x_α, y_α) розділяють катодні та анодні ділянки. Відповідно у точці (x_α, y_α) умовою поділу на ділянки катодного й анодного впливів буде:

$$\Delta j(\Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)) = 0, \quad (16)$$

де $\Delta j(\Delta\phi(x, y))$ – густина струму через поверхню подвійного шару, обумовлена механічними напруженнями [8, 9].

Так як струми малозмінні, то функцію $\Delta j(\Delta\phi(x, y))$ запишемо у вигляді

$$\Delta j(\Delta\phi(x, y)) = \Delta j(\Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)) + F^{\pm}(\Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha))(\Delta\phi(x, y) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)) + o(\Delta\phi(x, y)),$$

де $F^{\pm}(\Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)) = \lim_{\Delta\phi(x, y) \rightarrow \Delta\phi(x_\alpha \pm 0, y_\alpha \pm 0)} \frac{F(\Delta\phi(x, y)) - F(\Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha))}{\Delta\phi(x, y) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)}$ – відповідно ліва та права похідні у точці (x_α, y_α) . З умови (16) маємо:

$$\Delta j(\Delta\phi(x, y)) = \begin{cases} \frac{1}{b_a}(\Delta\phi(x, y) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)), & (x, y) \in \Omega_a \\ \frac{1}{b_k}(\Delta\phi(x, y) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)), & (x, y) \in \Omega_k \end{cases}, \quad (17)$$

де b_a і b_k – відповідно анодний та катодний питомі поляризаційні опори [12], а Ω_a і Ω_k – площі анодних та катодних ділянок, зініційованих полем напружень. Тоді координати (x_α, y_α) визначаємо з умови балансу виходу і входу анодних і катодних струмів:

$$\int_{\Omega_a} \frac{1}{b_a}(\Delta\phi(x, y) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)) ds + \int_{\Omega_k} \frac{1}{b_k}(\Delta\phi(x, y) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)) ds = 0. \quad (18)$$

Для кругового отвору радіуса ρ в полярних координатах

$$\int_0^\alpha \frac{\Delta\phi(\theta) - \Delta\phi(\alpha)}{b_a} \rho d\theta + \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\Delta\phi(\theta) - \Delta\phi(\alpha)}{b_k} \rho d\theta = 0.$$

Для еліптичного отвору рівняння для відшукування координати x_α таке:

$$\int_0^{x_\alpha} \frac{\Delta\phi(x, y(x)) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)}{b_k} dx + \int_{x_\alpha}^a \frac{\Delta\phi(x, y(x)) - \Delta\phi(x_\alpha, y_\alpha)}{b_a} dx = 0. \quad (19)$$

Воно визначальне для встановлення точки поділу еліптичного контуру на анодні та катодні ділянки, які є ініціаторами катодних й анодних струмів, викликаних, зокрема, механічними напруженнями, напруженнями від ударів, пом'ятин та інших пошкоджень металів. Його розв'язок виконуємо чисельно.

Числові результати. На основі наведених вище міркувань чисельно розраховували зміщення електричних та електродного потенціалів за таких вхідних даних (рис. 3–7 і таблиця): $\sigma_m/\sigma_{mc} = 10^3$, $\sigma_{mc}/\sigma_c = 10^2$; $\lambda = 10^{-9}$ м; $\beta = -2 \cdot 10^{-3}$ V $^{-1}$; $K = E/(3(1-2\nu))$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$; $a = 10$ мм; $\chi_{mc} = 0,930 \cdot 10^9$ м $^{-1}$, $\chi_c = 1,01 \cdot 10^7$ м $^{-1}$ – відповідають характеристикам 3%-го NaCl, $\chi_{mc} = 0,826 \cdot 10^9$ м $^{-1}$, $\chi_c = 0,584 \cdot 10^7$ м $^{-1}$ – 1%-го NaCl, $\chi_{mc} = 0,547 \cdot 10^9$ м $^{-1}$, $\chi_c = 0,387 \cdot 10^7$ м $^{-1}$ – 0,3%-го NaCl; $\chi_m = 0,939 \cdot 10^9$ м $^{-1}$, де $\rho_m = 7,8 \cdot 10^3$ кг·м $^{-3}$, $C_m = 10^3$ F/kg, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Приймали, що інтенсивність зовнішнього навантаження $p = 30$ МПа. Для рис. 4–7 та таблиці розраховували для 1%-го NaCl.

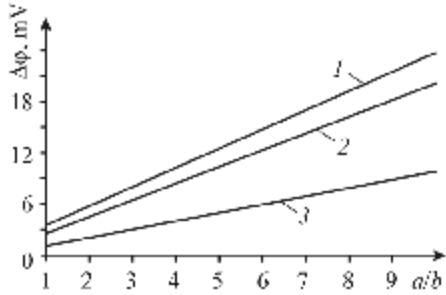


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Зміщення електродного потенціалу у вершині еліпса залежно від величини a/b : 1 – 3% NaCl; 2 – 1%; 3 – 0,3%.

Fig. 3. Shift of electrode potential at the ellipse apex depending on value a/b : 1 – 3% NaCl; 2 – 1%; 3 – 0.3%.

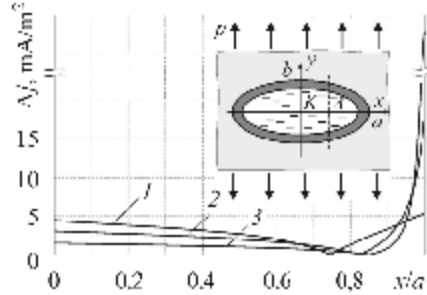


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Зміна катодного й анодного струмів вздовж контуру еліптичного отвору, заповненого середовищем: 1 – $a/b = 1$; 2 – 3; 3 – 7; $b_a = 0,340$ Ω·м 2 , $b_k = 0,460$ Ω·м 2 .

Fig. 4. Change of cathode and anode currents along the contour of the elliptic hole filled with environment: 1 – $a/b = 1$; 2 – 3; 3 – 7; $b_a = 0.340$ Ω·м 2 , $b_k = 0.460$ Ω·м 2 .

Як бачимо (рис. 3), зміщення електродного потенціалу для вказаних концентрацій розчину NaCl росте зі сплюсненістю еліптичного отвору та має лінійний характер.

На рис. 4 зображено розподіл густини електричного струму на межі еліптичного отвору Γ_2 для кола ($a/b = 1$) та еліпса ($a/b = 3$, $a/b = 7$). Як бачимо, за еліптичного отвору густина анодного струму суттєво збільшується, ніж за колового. При цьому анодна ділянка з ростом сплюсненості еліпса локалізується у вершині більшої півосі. Розрахункові зміщення електродного потенціалу $\Delta\phi$ для еліптичного ($a/b = 7$) та колового ($a/b = 1$) вирізів подано в таблиці.

Відхилення електродного потенціалу на межі контакту середовища та пружного тіла

x/a	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	1,0
$\Delta\phi$, mV ($a/b = 1$)	-0,89	-0,75	-0,31	0	0,39	0,85	1,41	2,02	2,32	2,55	2,65
$\Delta\phi$, mV ($a/b = 7$)	-0,89	-0,86	-0,76	-0,68	-0,57	-0,43	-0,23	0,18	0,82	3,12	13,2

Так само, як електричний, електродний потенціал суттєвіше змінюється за еліптичного отвору і має різкий стрибок у вершині еліпса. Отримані в частковому випадку чисельні результати для колового вирізу збігаються з відомими аналітичними [7]. Розрахунок координат поділу анодних та катодних ділянок, зніщених полем напружень для різних питомих поляризаційних опорів та геометричних параметрів еліпса, проілюстровано рис. 5 та 6.

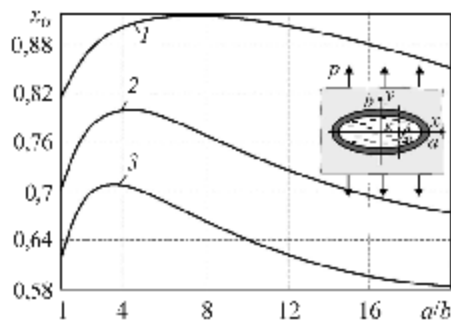


Рис. 5. Fig. 5.

Рис. 5. Зміна координати x_α залежно від геометрії еліпса для відносних значень параметра B : 1 – $B = b_k/b_a = 3$; 2 – 1; 3 – 0,5.

Fig. 5. Change of co-ordinate x_α depending on the ellipse geometry for relative sizes of parameter B : 1 – $B = b_k/b_a = 3$; 2 – 1; 3 – 0.5.

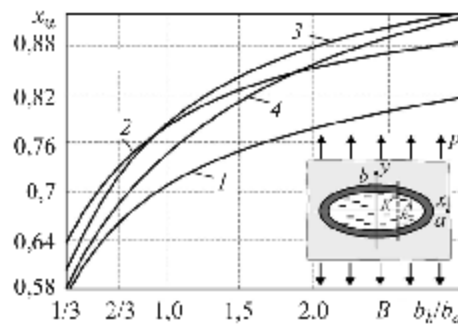


Рис. 6. Fig. 6.

Рис. 6. Зміна координати x_α залежно від відношення питомих поляризаційних опорів: 1 – $a/b = 1$; 2 – 3; 3 – 7; 4 – 10.

Fig. 6. Change of co-ordinate x_α depending on the relation of specific polarization resistances: 1 – $a/b = 1$; 2 – 3; 3 – 7; 4 – 10.

Встановлено (рис. 5 та 6), що з ростом відношення питомих поляризаційних опорів розмір анодних зон корозії зменшується та з наближенням еліптичного вирізу до тріщини такий дефект стає небезпечним корозійним концентратором напружень. Отже, тріщина, заповнена середовищем, найнебезпечніша. У той же час характер зміни сумарного катодного струму з поверхні катодної ділянки (рис. 7) вказує, що найбільший струм виходить з поверхні колового отвору, чого й очікували.

ВИСНОВКИ

У результаті розроблення аналітико-числового методу розрахунку розмірів катодних та анодних ділянок, зніциюваних полем напружень на межі еліптичного отвору із середовищем, встановлено:

- відхилення електродного потенціалу, обумовлене напружено-деформованим станом металу на поверхні тріщиноподібного еліптичного отвору, яке змінює свій знак залежно від співвідношення півосей;
- пряmlinійну залежність зміщень електродного потенціалу від інтенсивності напружень у вершинах еліпса з ростом відношення його більшої півосі до меншої;
- зменшення густини катодного струму (порівняно з коловим концентратором напружень, у якого радіус рівний більшій півосі еліпса) з наближенням до тріщиноподібного дефекту та зростання густини анодного струму у його вершині, що стає вагомим чинником корозійних подряпин, тріщин та раковин;

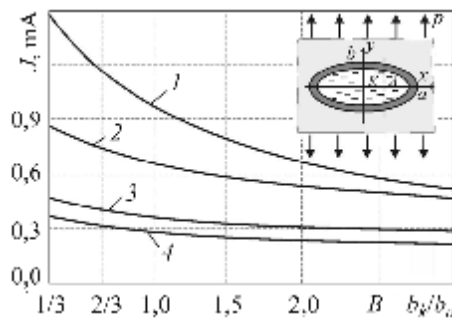


Рис. 7. Зміна сумарного катодного струму залежно від відношення питомих поляризаційних опорів: 1 – $a/b = 1$; 2 – 3; 3 – 7; 4 – 10.

Fig. 7. Change of total cathode current depending on the relation of specific polarization resistances: 1 – $a/b = 1$; 2 – 3; 3 – 7; 4 – 10.

– зі зростанням відношення питомих поляризаційних опорів координати поділу катодних й анодних ділянок наближаються до вершини еліпса, що відповідає більшій півосі;

– сумарний катодний струм з ростом сплюсненості еліпса та відношення катодного і анодного питомих поляризаційних опорів спадає.

РЕЗЮМЕ. Установлена взаємозв'язь между полем механических напряжений и смещением электродного потенциала на контуре эллиптического сквозного выреза, заполненного средой. Такая взаимосвязь позволяет в граничном случае оценить смещение электродного потенциала, обусловленное напряженно-деформированным состоянием в окрестности вершины эллиптической трещины. Для решения задачи выполнено численную процедуру реализации системы уравнений типа Гельмгольца, на основании чего выявлено отклонение электрических и электродного потенциалов при воздействии внешних механических усилий от аналогичных при их отсутствии, а также оценены катодные и анодные участки, вызванные полем напряжений на границе эллиптического отверстия со средой.

SUMMARY. Interrelation between the field of mechanical stresses and displacement of electrode potential on the contour of an elliptic through cut filled with environment is established. Such interrelation allows us in a boundary case to estimate the displacement of the electrode potential conditioned by the stress-strain state in the vicinity of the elliptic crack tip. For the problem solution a numerical procedure of realization of the system of Helmholtz equations is done, on the basis of which the deviation of the electric and electrode potentials under effect of external mechanical forces from the similar ones, when the last are absent, was found. Cathode and anode regions, caused by the stress field at the border of elliptic hole and environment, are evaluated.

1. Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.
2. Антропов Л. І. Теоретична електрохімія. – К.: Либідь, 1993. – 544 с.
3. Стащук М. Г. Визначення электродного потенціалу та струмів корозії уздовж поверхонь концентраторів напружень // Механіка руйнування і міцність конструкцій: у 3-х т. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Вип. 2. – С. 213–219.
4. Стащук М. Г. Оцінка впливу пружної деформації на электродний потенціал металевого циліндра в середовищі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 1. – С. 47–50.
(Stashchuk M. H. Analysis of the Influence of Elastic Deformation on the Electrode Potential of a Metal Cylinder in a Medium // Materials Science. – 2000. – № 1. – P. 54–59.)
5. Аналітичне визначення впливу пружних деформацій на электродні потенціали біля плоских поверхонь металевих тіл / В. Г. Горобацький, І. М. Дмитрах, М. Г. Стащук, Р. В. Коваленко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. – 2001. – Вип. 3. – С. 61–76
6. Оцінка зміщення электродного потенціалу металу за чистого згину балкового зразка в середовищі / М. Г. Стащук, І. М. Дмитрах, М. І. Дорош, Р. М. Лещак // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 5. – С. 85–92.
7. Стащук М. Г., Горобацький В. Г. Залежність зміни электродного потенціалу на контурі заповненого корозійним середовищем кругового дефекту металічної пластини від навантаження // Машинознавство. – 2000. – № 6. – С. 2–7.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Стащук М. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К.: Наук. думка, 1993. – 357 с.
10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
11. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
12. Дмитрах І. М., Панасюк В. В. Вплив корозійних середовищ на локальне руйнування металів біля концентраторів напружень. – Львів: Вид. Фіз.-мех. ін-ту ім. Г. В. Карпенка Національної академії наук України, 1999. – 341 с.

Одержано 09.06.2010